L. Lesieur

Les treillis en topologie. II

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 7 (1953-1954), exp. n° 4, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1953-1954__7__A4_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire d'ALGEBRE
et de THEORIE des NOMBRES

Année 1953-1954
-:-:-:-

LES TREILLIS EN TOPOLOGIE. II

-:-:-:-

Conférence faite par L. LESIEUR, le 26 avril 1954

-:-:-:-

1.- Filtre $V(a)$ des voisinages fermés de a dans un treillis distributif quelconque

Dans la conférence I, nous avons défini et étudié le treillis des filtres d'un treillis distributif $\mathcal{T}$ quelconque (§ 4). Nous allons donner ici un nouvel exemple de filtre dans $\mathcal{T}$, ainsi que son interprétation topologique lorsque le treillis considéré est le treillis Φ des éléments fermés d'une topologie dans un treillis de Boole complet T.

Soit $\mathcal{T}$ un treillis distributif quelconque avec o et u. Soit a un élément fixé dans $\mathcal{T}$. Considérons les éléments v tels qu'on puisse trouver un élément $x(v)$ vérifiant:

$$a \cap x = o \quad , \quad x \cup v = u.$$

Cet ensemble V n'est pas vide puisque $u \in V$ ($a \cap o = o$, $o \cup u = u$).

Montrons que V est un filtre. Supposons $v_1 \in V$ et $v_2 \in V$. On a donc:

$$a \cap x_1 = o, \quad x_1 \cup v_1 = o \quad ; \quad a \cap x_2 = o \quad , \quad x_2 \cup v = u$$

On en déduit:

$$a \cap (x_1 \cup x_2) = o \quad , \quad (x_1 \cup x_2) \cup (v_1 \cap v_2) = u$$

d'où

$$v_1 \cap v_2 \in V .$$

Supposons maintenant $v \in V$ et soit $z \geqslant v$. On a donc:

$$a \cap x = o \quad , \quad x \cup v = u \quad , \text{ d'où } \quad x \cup z = u \quad , \text{ et } \quad z \in V .$$

L'ensemble V est donc un filtre $V(a)$.

<u>Théorème I</u> - <u>L'ensemble des éléments v tels que</u>:

$$\underline{a \cap x = o} \quad , \quad \underline{x \cup v = u}$$

<u>forme un filtre</u> $V(a)$ <u>vérifiant les propriétés suivantes</u>:

1°) $\underline{V(a) \subseteq)a(}$ 2°) $\underline{V(a \cup b) = V(a) \cap V(b)}$ 3°) $\underline{V(o) =)o(}$.

1°) En effet, $a = a \cap u = a \cap (x \cup v) = (a \cap x) \cup (a \cap v) = a \cap v$,

d'où $a \leqslant v.$

2°) Soit $w \in V(a \cup b)$; on a donc

$$(a \cup b) \cap x = o \quad , \quad x \cup w = u$$

d'où $\quad (a \cap x) \cup (b \cap x) = o \,,\; a \cap x = o \,,\quad b \cap x = o \quad , \; x \cup w = u \;, \; w \in V(a) \cap V(b)$

et
$$V(a \cup b) \subseteq V(a) \cap V(b)$$

Inversement, soit $w \in V(a) \cap V(b)$. On a :

$$a \cap x = o \,,\; x \cup w = u \quad ; \quad b \cap y = o \quad , \quad y \cup w = u \,,$$

d'où
$$(a \cup b) \cap x \cap y = o \,, \quad w \cup (x \cap y) = u \,, \quad w \in V(a \cup b)$$

et
$$V(a) \cap V(b) \subseteq V(a \cup b)$$

3°) $V(o)$ est le filtre impropre $)o($; $V(a)$ est toujours un filtre propre lorsque $a \neq o$.

DEFINITION 1 - Dans le treillis distributif quelconque $\mathcal{T}$, le filtre $V(a)$ s'appelle le filtre des voisinages fermés de a.

Cette définition provient de l'interprétation topologique qu'on peut en donner dans le cas particulier où $\mathcal{T}$ est le treillis Φ des éléments fermés d'une topologie dans un treillis de Boole complet T. (I, § 2).

Théorème 2 - Φ étant le treillis des éléments fermés d'une topologie dans T, le filtre des voisinages fermés de $a \in \Phi$ coïncide avec l'ensemble des voisinages fermés de a dans la topologie considérée.

Soit v un voisinage fermé de a dans la topologie de T.
On a donc:

$$a \leq \omega \leq v$$

ω étant un ouvert de T. Le complément $x = \omega'$ de ω dans T est un fermé qui vérifie:

$$a \cap x \leq \omega \cap x = o \quad , \; \text{d'où} \; a \cap x = o \quad ; \quad x \cup v \geq x \cup \omega = u \,.$$

L'élément v est donc un élément du filtre $V(a)$ dans Φ.

Réciproquement, soit $v \in V(a)$. Il existe donc un élément fermé x tel que:

$$a \cap x = o \quad , \quad x \cup v = u.$$

On sait déjà que $a \leq v$ (Th. 1). Le complément $\omega = x'$ de x est un ouvert qui vérifie

$$a \leq \omega \leq v.$$

v est bien un voisinage fermé de a dans la topologie considérée.

2.- Eléments séparés dans un treillis distributif quelconque

Définition 2 - Dans un treillis distributif quelconque avec o et u, deux éléments a et b sont séparés s'il existe deux éléments a' et b' tels que:

(1) $\quad a \cap a' = o \,, \quad b \cap b' = o \,, \quad a' \cup b' = u \,.$

Propriété 1 - Deux éléments séparés sont étrangers (ou disjoints)(1)

....;

(1) Deux éléments a et b sont étrangers ou disjoints, s'ils vérifient $a \cap b = o$

En effet:

$$a \cap b = a \cap b \cap u = (a \cap b) \cap (a' \cup b') = (a \cap b \cap a') \cup (a \cap b \cap b') = o$$

Propriété 2 - Pour que deux éléments a et b soient séparés, il faut et il suffit que l'un soit étranger à un voisinage fermé de l'autre.

La condition est nécessaire, puisque, d'après (1), b' est un voisinage fermé de a vérifiant $b \cap b' = o$. Elle est suffisante, puisque, si b est étranger à un voisinage b' de a, on a $b \cap b' = o$ et il existe un élément a' vérifiant $a \cap a' = o$, $a' \cup b' = u$.

La notion de séparation est susceptible d'une interprétation topologique dans le cas où $\mathcal{T}$ est le treillis Φ des éléments fermés d'une topologie dans un treillis de Boole complet T.

Théorème 2 - Pour que deux éléments fermés a et b soient séparés dans le treillis Φ des fermés d'une topologie dans T, il faut et il suffit qu'il existe dans T deux voisinages (1) de a et b disjoints.

La condition est nécessaire. Supposons a et b séparés dans Φ. Il existe donc a' et b' vérifiant $a \cap a' = o$, $b \cap b' = o$, $a' \cup b' = u$. Les compléments de a' et b' sont deux éléments ouverts ω_1 et ω_2. La relation $a' \cup b' = u$ entraîne $\omega_1 \cap \omega_2 = o$ et les relations $a \cap a' = o$ et $b \cap b' = o$ entraînent $a \leqslant \omega_1$ et $b \leqslant \omega_2$. ω_1 et ω_2 sont donc deux voisinages de a et b disjoints dans T.

La condition est suffisante. Supposons qu'il existe dans T deux voisinages disjoints v_1 et v_2 de a et b. On a donc:

$$a \leqslant \omega_1 \leqslant v_1 \;,\quad b \leqslant \omega_2 \leqslant v_2 \;,\quad v_1 \cap v_2 = o \;,\ \text{d'où}\ \ \omega_1 \cap \omega_2 = o.$$

Les compléments a' et b' de ω_1 et ω_2 sont fermés. La relation $\omega_1 \cap \omega_2 = o$ entraîne $a' \cup b' = u$. On a de plus:

$$a \cap a' \leqslant \omega_1 \cap a' = o \;,\quad b \cap b' \leqslant \omega_2 \cap b' = o \;,\ \text{d'où:}\ \ a \cap a' = o,\ b \cap b' = o.$$

Les éléments fermés a et b sont donc séparés dans Φ.

Le théorème 3 permet donc d'exprimer la propriété ou axiome de séparation de deux éléments fermés d'une topologie dans T uniquement en termes de Φ et non de T. Or, cette propriété de séparation est à la base de la classification des principales topologies (voir § 4,5,6).

3.- Treillis de KURATOWSKI

On sait qu'un espace topologique E est un espace de Kuratowski, ou espace

....

(1) Il s'agit ici de voisinages ordinaires dans T, tels qu'ils sont définis Conf. I, § 5.

T_1 , si tous ses points, c'est-à-dire tous les éléments de E , sont des ensembles fermés. Dans ce cas, le treillis Φ des ensembles fermés de E , est un treillis distributif complet dans lequel tout élément est union de points. Ce treillis est donc un treillis de Kuratowski, au sens de la définition abstraite suivante:

<u>Définition 3</u> - On appelle <u>treillis de Kuratowski</u> un treillis distributif complet dans lequel tout élément non nul est union de points.

Il est intéressant de comparer cette définition avec celle d'un treillis géométrique (Conf. Treillis géométriques, I, § 2, déf.2). Toutes les propriétés de la définition d'un treillis géométrique sont vérifiées, à l'exclusion de la propriété IV : si un point P est situé dans l'union de points P_α en nombre infini, il est situé dans l'union d'un nombre fini d'entre eux. Si cette propriété IV était vérifiée dans un treillis de Kuratowski, celui-ci serait donc un treillis distributif et géométrique, donc un treillis de parties P(E) (Conf. Treillis géom., II, Th.1). D'ailleurs, un treillis géométrique n'est pas en général $\cup$ -continu, tandis qu'un treillis de Kuratowski l'est en vertu de la propriété plus générale suivante:

<u>Propriété 3</u> - <u>Un treillis de Kuratowski</u> Φ_1 <u>vérifie la loi de</u> $\cup$ -<u>distributivité générale</u> :

$$\underline{x \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} y_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (x \cup y_\alpha)}$$

On a toujours dans tout treillis complet:

$$x \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} y_\alpha \right) \leq \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (x \cup y_\alpha)$$

Inversement, soit p un point tel que:

$$p \leq \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (x \cup y_\alpha)$$

On a donc $p \leq x \cup y_\alpha$ pour tout α et, puisque Φ_1 est distributif, $p \leq x$ ou $p \leq y_\alpha$. Le premier cas implique $p \leq x \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} y_\alpha \right)$.
Supposons donc $p \nleq x$, d'où $p \leq y_\alpha$ pour tout α et par suite $p \leq \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} y_\alpha$, c'est-à-dire $p \leq x \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} y_\alpha \right)$.

<u>Propriété 4</u> - <u>Tout treillis de Kuratowski</u> Φ_1 <u>peut être immergé dans un treillis</u> P(E) <u>avec conservation des intersections infinies</u>, E <u>étant l'ensemble des points de</u> Φ_1 .

A chaque élément $x \in \Phi_1$ faisons correspondre l'ensemble $f(x)=X \in P(E)$ des points $p \leq x$. Cet ensemble est non vide si $x \neq o$; si $x = o$, on prend $X = \emptyset$. Tout élément non nul de Φ_1 étant union de points, on obtient ainsi une application biunivoque de Φ_1 sur un sous-ensemble de (P(E). Cette application conserve les intersections infinies:

$$f(\cap x_\alpha) = \textstyle\bigcap X_\alpha .$$

En effet, soit $p \leq \cap x_\alpha$; on a donc pour tout α :

$p \leq x_\alpha$ d'où $p \in X_\alpha$ et $p \in \bigcap X_\alpha$

Inversement, si $p \in \bigcap X_\alpha$, on a pour tout α :

$p \in X_\alpha$, donc $p \leq x_\alpha$ et $p \leq \cap x_\alpha$

c'est-à-dire

$p \in f(\cap x_\alpha)$

Cette application conserve les unions finies:

$$f(x \cup y) = X \textstyle\bigcup Y$$

En effet, soit $p \in f(x \cup y)$; on a donc $p \leq x \cup y$, c'est-à-dire, le treillis Φ_1 étant distributif,

$p \leq x$ où $p \leq y$, donc $p \in X$ ou $p \in Y$

et par suite

$p \in X \bigcup Y$

Réciproquement, si $p \in X \bigcup Y$, on a $p \in X$ ou $p \in Y$, d'où $p \leq x$ ou $p \leq y$, c'est-à-dire $p \leq x \cup y$ et $p \in f(x \cup y)$.

De la propriété 4 résulte qu'un treillis abstrait de Kuratowski peut être considéré comme le treillis des ensembles fermés d'un espace topologique E de Kuratowski. On a donc le théorème suivant:

<u>Théorème 4 - Pour qu'un treillis Φ_1 soit isomorphe au treillis des ensembles fermés d'un espace topologique de Kuratowski, il faut et il suffit que ce soit un treillis abstrait de Kuratowski.</u>

Remarquons en outre, que l'espace topologique E est défini par le treillis Φ_1 à un homéomorphisme près. En effet, si E' est un 2me espace topologique admettant pour treillis d'ensembles fermés un treillis isomorphe à Φ_1, l'ensemble des $X \in P(E)$ et l'ensemble des $X' \in P(E)$ peuvent être mis en correspondance biunivoque par l'intermédiaire des points de Φ_1. A un ensemble fermé de E correspond un élément de Φ_1 et par suite, un ensemble fermé de E'. Inversement, tout ensemble fermé de E' est l'image d'un ensemble fermé de E. L'application $X \longrightarrow X'$ est donc bien un homéomorphisme entre les deux espaces topologiques E et E'.

4.- Treillis de Hausdorff

On sait qu'un espace topologique de Hausdorff ou espace T_2 est un espace topologique de Kuratowski dans lequel deux points distincts possèdent toujours deux voisinages disjoints. D'après le théorème 3 (§ 2), cette propriété peut s'énoncer au moyen du treillis Φ_2 des ensembles fermés de T_2, sous la forme suivante : il faut et il suffit que deux points distincts du treillis Φ_2

soient toujours séparés dans Φ_2 (au sens de la définition 2). Ceci nous conduit à la définition abstraite suivante:

Définition 4 - On appelle treillis de Hausdorff, ou treillis Φ_2, un treillis de Kuratowski dans lequel deux points distincts sont toujours séparés.

Des théorèmes 3 et 4 résultent alors le théorème suivant:

Théorème 5 - Pour qu'un treillis soit isomorphe au treillis des ensembles fermés d'un espace topologique de Hausdorff, il faut et il suffit que ce soit un treillis Φ_2 de Hausdorff.

L'espace de Hausdorff E est alors défini par Φ_2 à un homéomorphisme près.

Un treillis de Hausdorff peut aussi être caractérisé par une propriété du filtre des voisinages fermés d'un point, défini au paragraphe 1.

Théorème 6 - Pour qu'un treillis de Kuratowski soit un treillis de Hausdorff il faut et il suffit que l'intersection des éléments du filtre $V(a)$ des voisinages fermés de tout point a soit égale à a.

Rappelons que $v \in V(a)$ si et seulement si on peut trouver x tel que:

(1) $a \cap x = o \quad , \quad x \cup v = u$.

Considérons l'intersection i des éléments du filtre $V(a)$ et supposons $i > a$. Le treillis étant de Kuratowski, il existerait un point b tel que $b < i$ et $b \neq a$. Le treillis étant de Hausdorff, on peut trouver a' et b' vérifiant:

(2) $a \cap a' = o \quad , \quad b \cap b' = o \quad , \quad a' \cup b' = u$.

Les relations (2) montrent que $b' \in V(a)$; on en déduit $i \leq b'$ et $b < b'$, d'où $b \cap b' = b \neq o$, contrairement à l'hypothèse $b \cap b' = o$.

Réciproquement, soit Φ_2 un treillis de Kuratowski dans lequel les voisinages fermés de tout point a ont une intersection égale à a. Donnons nous un deuxième point b différent de a. Par hypothèse, il existe un voisinage fermé b' de b ne contenant pas a. Il en résulte, d'après la propriété 2 (§ 2) que les points a et b sont séparés. Φ_2 est donc un treillis de Hausdorff.

5.- Treillis réguliers.

Un espace topologique régulier ou espace T_3 est un espace topologique de Kuratowski dans lequel un ensemble fermé a et un point $p \notin a$ sont toujours séparés. D'après le théorème 3 (§ 2), cette propriété peut s'énoncer en termes du treillis Φ_3 des ensembles fermés de T_3 sous la forme suivante: il faut et il suffit que, dans Φ_3, un élément a et un point $p \nleq a$ soient séparés (au sens algébrique de la définition 2). Ceci suggère la définition abstraite suivante:

Définition 5 - On appelle treillis régulier, ou treillis Φ_3 , un treillis de Kuratowski dans lequel un élément a et un point $p \not\leq a$ sont toujours séparés

Des théorèmes 3 et 4 résultent alors immédiatement:

Théorème 6 - Pour qu'un treillis soit isomorphe au treillis des ensembles fermés d'un espace topologique régulier, il faut et il suffit que ce soit un treillis Φ_3 régulier.

En comparant les définitions 4 et 5 , on voit qu'un treillis régulier est un treillis de Hausdorff particulier.
La démonstration du théorème 6 s'étend aussitôt aux treillis réguliers pour donner le théorème suivant:

Théorème 7 - Pour qu'un treillis de Kuratowski soit régulier, il faut et il suffit que l'intersection des éléments du filtre V(a) des voisinages fermés de tout élément a soit égale à a .

6 .- Treillis normaux.

Un espace topologique normal, ou espace T_4 , est un espace topologique de Kuratowski dans lequel deux ensembles fermés disjoints sont toujours séparés au sens topologique. Cette propriété peut donc s'énoncer en termes du treillis Φ_4 des ensembles fermés de T_4 sous la forme suivante : il faut et il suffit que, dans Φ_4 , deux éléments a et b disjoints ($a \cap b = o$) soient toujours séparés (au sens algébrique de la définition 2). Ceci conduit à la définition abstraite suivante:

Définition 6 - On appelle treillis normal , ou treillis Φ_4 , un treillis de Kuratowski dans lequel deux éléments a et b disjoints ($a \cap b = o$) sont toujours séparés.
Par suite:

Théorème 8 - Pour qu'un treillis soit isomorphe au treillis des ensembles fermés d'un espace topologique normal, il faut et il suffit que ce soit un treillis Φ_4 normal.

Un treillis normal est évidemment un cas particulier de treillis régulier. Le théorème 7 est valable pour un treillis normal,mais il ne peut être renforcé. Par contre, on peut donner une propriété caractéristique algébrique intéressante qui n'est autre qu'une forme algébrique équivalente à la notion d'éléments séparés. Cette forme fait intervenir le treillis $\mathcal{I}$ des idéaux d'un treillis

distributif quelconque $\mathcal{T}$ avec o et u , que nous supposons connu (au même titre que le treillis $\mathcal{F}$ des filtres, étudié dans la Conf. I, § 4).
Ce treillis étant $\cap$ -distributif général peut être considéré comme un demi-groupe réticulé résidué, et les notions de pseudo-complément A^{*} ou résiduel $O : A$, y sont valables. (Cf. Conf. I, § 6) , ainsi que celle de filtre principal (a).

La propriété suivante est alors une propriété caractéristique de deux éléments séparés; elle est par suite équivalente à la propriété 2 (§ 2).

<u>Propriété 5</u> - <u>Pour que deux éléments</u> a et b <u>de</u> $\mathcal{T}$ <u>soient séparés, il faut et il suffit que l'on ait dans le treillis $\mathcal{J}$ des idéaux de</u> $\mathcal{T}$:

(2) $\quad o : (a) \cup o : (b) = (u)$

En effet, $o : (a)$ est l'idéal des éléments $x \in T$ qui vérifient $a \cap x = o$. de même, $o : (b)$ est l'idéal des éléments $y \in T$ qui vérifient $b \cap y = o$. La relation (2) revient alors à l'existence d'un élément $a' \in o : (a)$ et d'un élément $b' \in o : b$ tels que : $a' \cup b' = u$, c'est-à-dire à l'existence de a' et b' vérifiant

$$a \cap a' = o \qquad b \cap b' = o \qquad a' \cup b' = u.$$

ce qui est la relation (1) de la définition 2 (§ 2).
D'où:

<u>Théorème 9</u> - <u>Pour qu'un treillis de Kuratowski</u> Φ_4 <u>soit normal, il faut et il suffit que, dans le treillis des idéaux de</u> Φ_4 , <u>la relation</u> $(a) \cap (b) = o$ <u>implique</u> $o : (a) \cup o : (b) = (u)$.

La notion de treillis normal se généralise de façon évidente aux treillis sans points.

7.- <u>Treillis compacts</u>.

<u>Définition 7</u> : Un treillis Φ <u>compact</u> est un treillis de Hausdorff qui vérifie l'axiome suivant:

<u>Toute intersection nulle d'éléments</u> x_α <u>est aussi l'intersection d'un nombre fini d'entre eux</u>.

La définition d'un treillis compact est évidemment suggérée par le théorème suivant:

<u>Théorème 10</u> - <u>Pour qu'un treillis soit isomorphe au treillis des ensembles fermés d'un espace topologique compact,</u>(1) <u>il faut et il suffit que ce soit un treillis compact</u>.

(1) Au sens de Bourbaki, "bicompact" suivant d'autres auteurs.

Les treillis compacts sont des treillis réguliers et normaux particuliers:

<u>Théorème 11</u> - <u>Un treillis compact est régulier</u>.

Considérons dans le treillis compact Φ un point p et un élément fermé $b \not\geq p$. Puisque le treillis est de Hausdorff, l'intersection $\bigcap_{\alpha \in A} v_\alpha$ des voisinages fermés V_α de p est égale à p. Donc:

$$b \cap \left(\bigcap_{\alpha \in A} v_\alpha \right) = 0$$

et, puisque Φ est compact, une intersection finie de ces éléments est nulle. Comme une intersection finie de voisinages fermés de p est un voisinage fermé de p, il existe donc un voisinage fermé v de p tel que $b \cap v = 0$. Celà prouve que (Propr.2, § 2) que p et b sont séparés dans Φ, qui est par suite régulier.

<u>Théorème 12</u> - <u>Un treillis compact est normal</u>. (démonstration analogue).

Les théorèmes suivants donnent des propriétés caractéristiques d'un treillis compact.

<u>Théorème 13</u> - <u>Pour qu'un treillis de Hausdorff Φ soit compact, il faut et il suffit, que tout filtre propre ait une intersection non nulle</u>.

La condition est nécessaire, car si $\bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha = o$ pour les éléments x_α d'un filtre F propre d'un treillis compact, on a aussi:

$$x_{\alpha_1} \cap \dots \cap x_{\alpha_n} = o ,$$

ce qui est impossible puisque F est un filtre propre.

La condition est suffisante ; soit en effet: $\bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha = o$ pour un ensemble quelconque d'éléments x_α de Φ, et supposons que toute intersection finie d'éléments x_α soit non nulle. Ces intersections finies forment une base (1) de filtre propre F ; celui-ci ayant une intersection i non nulle, on aurait $x_\alpha \geq i \neq o$ d'où $\bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha \geq i \neq o$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

<u>Théorème 14</u> - <u>Pour qu'un treillis de Hausdorff Φ soit compact, il faut et il suffit que tout ultrafiltre soit principal</u>.

En effet, un ultrafiltre (2) U d'un treillis compact possède, d'après le le théorème 13, une intersection p non nulle.

On a donc, $U \subseteq)\, p\, ($, ce qui prouve que $U =)\, p\, ($, et que p est un point.

(1) C'est-à-dire que les éléments qui leur sont supérieurs ou égaux forment un filtre propre F.

(2) Existence et définition données dans la Conf. I (§ 4, propr. 3).

Réciproquement, si tout ultrafiltre de Φ est principal, on a pour tout filtre propre F un ultrafiltre $U =)\, p\, ($ contenant F, d'où

$$x_\alpha \geq p \text{ , pour tout } \alpha$$

c'est-à-dire $\bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha \neq 0$.

Le théorème 13 montre alors que Φ est compact.

Toutes les définitions et tous les résultats de cette conférence possèdent évidemment des définitions duales et des résultats duaux, s'appliquant au treillis des ensembles ouverts d'un espace topologique. Nous ne les énoncerons pas ici.