Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

L. Lesieur

Les treillis en topologie. I

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 7 (1953-1954), exp. n° 3, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1953-1954__7__A3_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire d'ALGÈBRE
et de THÉORIE DES NOMBRES

Année 1953/1954

-:-:-:-

LES TREILLIS EN TOPOLOGIE. I.

-:-:-:-

Conférence faite par L. LESIEUR, le 5 avril 1954

-:-:-:-

1.- ÉLÉMENTS OUVERTS.

Une topologie dans un ensemble E peut être définie par les ensembles ouverts de E , qui vérifient les axiomes suivants :

O_1 - Une réunion quelconque d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

O_2 - L'intersection de deux ensembles ouvert est un ensemble ouvert.

O_3 - L'ensemble vide et l'ensemble E sont ouverts.

(Voir par exemple, N. Bourbaki, Topologie générale, Chap. I).

Les ensembles ouverts sont donc des éléments, non pas de E , mais du treillis $P(E)$ des parties de l'ensemble E , et les axiomes précédents expriment que les éléments ouverts constituent un sous-treillis Ω de $T = P(E)$, comprenant $\emptyset$ et E , avec la propriété suivante : l'union d'une infinité d'éléments existe dans Ω et c'est la même que dans T . Cette propriété signifie que Ω est un sous-treillis $\cup$-complet de T . En appelant 0 l'élément nul $\emptyset$ et u l'élément universel E de T , les axiomes des ensembles ouverts peuvent donc être condensés sous la forme suivante :

<u>AXIOME 1.-</u> <u>Les ouverts forment un sous-treillis $\cup$-complet Ω de T , comprenant 0 et u .</u>

Cet énoncé reste valable même si le treillis T n'est plus un treillis de parties $P(E)$, c'est-à-dire un treillis de BOOLE complet et atomique (Voir Treillis géométriques, Conf. II , th. 2). Nous supposerons seulement que T est un <u>treillis de BOOLE complet</u>, sans postuler par conséquent l'existence de <u>points</u> dans T . Nous donnerons d'ailleurs à la fin un bel exemple d'origine topologique de treillis de BOOLE complet non atomique.

<u>DÉFINITION 1.</u> - T étant un treillis de BOOLE complet, une topologie dans T est définie par un sous-ensemble Ω d'éléments de T , appelés <u>ouverts</u>, qui

vérifient l'axiome 1 .

On sait qu'un treillis de BOOLE complet vérifie la loi de $\cap$-distributivité générale :

$$x \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} y_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (x \cap y_\alpha)$$

Il en résulte que Ω vérifie aussi la loi de $\cap$-distributivité générale. Par contre il ne vérifie pas nécessairement la loi de $\cup$-distributivité générale, puisqu'il n'est pas un sous-treillis $\cap$-complet de T. Cependant Ω est, en tant qu'ensemble ordonné en treillis, un treillis complet. Donc :

PROPRIÉTÉ 1.- L'ensemble Ω des ouverts est un treillis complet vérifiant la loi de $\cap$-distributivité générale.

2.- ÉLÉMENTS FERMÉS.

DÉFINITION 2.- Un élément x d'une topologie dans T est fermé si son complément est ouvert.

Les propriétés des compléments dans un treillis de BOOLE complet montrent immédiatement que les éléments fermés vérifient l'axiome suivant :

AXIOME 1'.- Les fermés forment un sous-treillis $\cap$-complet de T, comprenant 0 et u.

Autrement dit, on a les 3 axiomes suivants des éléments fermés :

F_1 - Une intersection quelconque d'éléments fermés est un fermé.

F_2 - L'union de deux éléments fermés est un fermé.

F_3 - Les éléments 0 et u sont fermés.

Il est clair que le sous-treillis Φ des éléments fermés de T détermine le sous-treillis Ω des éléments ouverts. On peut d'ailleurs se donner Φ arbitrairement, satisfaisant à l'axiome 1' ; les compléments des éléments de Φ déterminent un sous-treillis Ω satisfaisant à l'axiome 1 , et par suite une topologie dans T ; d'où la définition suivante d'une topologie, équivalente à la définition 1 .

DEFINITION 1'.- T étant un treillis de BOOLE complet, une topologie dans T est définie par un sous-treillis Φ d'éléments de T , appelés fermés, qui vérifient l'axiome 1'.

Ce sous-treillis Φ possède la propriété suivante :

PROPRIETE 1'.- L'ensemble Φ des fermés est un treillis complet vérifiant la loi de $\cup$-distributivité générale, soit :

$$x \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} y_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (x \cup y_\alpha) .$$

3.- FERMETURE TOPOLOGIQUE.

Soit x un élément quelconque de T. Les éléments fermés x_α qui vérifient $x_\alpha \geqslant x$ forment un sous-ensemble non vide de T puisque u en fait partie, et ils admettent un élément minimum $\bar{x}$ qui est leur intersection $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} x_\alpha$ puisque Φ est sous-treillis $\cap$-complet de T (axiome 1'). L'application $x \to \bar{x}$ de T dans T possède les propriétés suivantes :

AXIOMES de fermeture topologique[1]

1°/ $\bar{x} \geqslant x$ (extensivité)

2°/ $\bar{\bar{x}} = \bar{x}$ (idempotence)

3°/ $\overline{x \cup y} = \bar{x} \cup \bar{y}$ ($\cup$-homomorphisme)

4°/ $\bar{0} = 0$; $\bar{u} = u$.

$\bar{x}$ s'appelle la fermeture topologique de x

Les propriétés 1° , 2° , 4° se démontrent immédiatement. Pour démontrer 3° remarquons d'abord l'isotonie :

$$x \geqslant y \quad \text{entraîne} \quad \bar{x} \geqslant \bar{y}$$

qui résulte du fait que les éléments fermés $\geqslant x$ font partie des éléments fermés $\geqslant y$. On en déduit : $\overline{x \cup y} \geqslant \bar{x} \cup \bar{y}$. Mais $\bar{x} \cup \bar{y}$ est un élément fermé puisque Φ est un sous-treillis de T ; par suite, on a : $\bar{x} \cup \bar{y} \geqslant x \cup y$ et $\bar{x} \cup \bar{y} \geqslant \overline{x \cup y}$, d'où : $\overline{x \cup y} = \bar{x} \cup \bar{y}$. Dans cette application, les éléments fermés sont caractérisés par

$$\bar{x} = x .$$

Réciproquement, étant donnée une application $x \to \bar{x}$ de T dans T satisfaisant aux axiomes de fermeture topologique, on démontre aisément que les éléments vérifiant $\bar{x} = x$ constituent un sous-treillis Φ de T $\cap$-complet, comprenant 0 et u .

---

(1) - Cf. MAC-KINSEY et A. TARSKI : The Algebra of Topology (Annals of Math., 45 (1944), p. 141-191)

MAC-KINSEY et A. TARSKI : On closed elements in closure algebras (Ann. of Math., 47 (1946), p. 122-162)

Ce dernier point est assuré par la propriété 4°. D'autre part Φ est fermé pour l'union et la propriété 3° entraîne en particulier l'isotonie. Il reste à démontrer que Φ est fermé pour une intersection même infinie. Considérons $x = \bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha$, avec $\overline{x_\alpha} = x$. D'après l'isotonie, $x_\alpha \geqslant x$ entraîne $\overline{x_\alpha} = x \geqslant \overline{x}$, d'où $\bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha \geqslant \overline{x}$. Mais, d'après la propriété 1°, on a aussi : $\overline{x} = \overline{\bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha} \geqslant x$. Par suite $\overline{x} = x$ est bien un élément fermé.

Φ détermine donc d'après la définition 1' une topologie dans T . Pour cette topologie, l'application de fermeture est l'application donnée $x \to \overline{x}$. En effet $\overline{x} \geqslant x$ est fermé d'après la propriété 2° et si l'on a $z \geqslant x$, avec z fermé, on en déduit d'après l'isotonie $\overline{z} = z \geqslant \overline{x}$. L'élément $\overline{x}$ est bien la fermeture de x , et on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1.- L'application de T dans T qui fait correspondre à x l'intersection $\overline{x}$ des éléments fermés $\geqslant x$ vérifie les axiomes de fermeture topologique. Réciproquement, toute application $x \to \overline{x}$ vérifiant les axiomes de fermeture topologique définit une topologie unique dans laquelle la fermeture de x est $\overline{x}$; les éléments fermés sont ceux qui vérifient $\overline{x} = x$.

Ce théorème permet donc une nouvelle définition d'une topologie dans T , équivalente aux deux précédentes. O. ORE a introduit une notion plus générale au moyen d'axiomes de fermeture algébrique qui se déduisent des axiomes de fermeture topologique en remplaçant la propriété 3° ($\cup$-homomorphisme) par l'isotonie. (O. ORE, Annals of Math., 47 (1946), p. 56-78).

4.- FILTRES D'UN TREILLIS DISTRIBUTIF.

Les filtres d'un treillis P(E) ont été étudiés par G. BIRKHOFF, H. CARTAN, G. CHOQUET, J. SCHMIDT[1]. Les filtres d'un treillis distributif quelconque avec O et u ont été utilisés par H. WALLMANN, P. SAMUEL[2].

DÉFINITION 3.- On appelle filtre d'un treillis distributif T avec O et u une partie non vide de T , soit F telle que :

1°/ x et $y \in F$ entraînent $x \cap y \in F$ '

(1)- G. BIRKHOFF : A new definition of limit, Bull. Amer. Math. Soc. 41,636 (1935)
H. CARTAN : C.R.Acad.Sc.,205,595-598 (1937) et 205, 777-779 (1937)
G. CHOQUET : Sur les notions de filtre et de grille, C.R.Acad.Sc.,224,171-173(1947)
J. SCHMIDT : Beiträge zur Filtertheorie, Math. Nachr. 7,360-378 (1952) et 10,197-232(1953)

(2)-H. WALLMANN:Lattices and topological spaces,Ann. of Math.39,112-126(1938)
P. SAMUEL:Ultrafilters and compactification of uniform spaces, Trans.Amer. Math. Soc.64,100-132(1948)

2°/ $x \in F$ et $z \geq x$ entraînent $z \in F$

Si $0 \in F$, on a $F = T$ et le filtre est dit <u>impropre</u>. Le filtre est <u>propre</u> lorsque $0 \notin F$.

<u>EXEMPLE 1</u>.- $a \neq 0$ étant un élément de T, l'ensemble des éléments $x \geq a$ forme le <u>filtre principal propre</u> $)a($.

<u>EXEMPLE 2</u>.- $a \neq u$ étant un élément de T, l'ensemble des éléments a' premiers à a, c'est-à-dire vérifiant $a \cup a' = u$, forme un filtre.

<u>EXEMPLE 3</u>.- E étant un ensemble infini quelconque, les complements des parties finies de E forment un filtre dans $T = P(E)$ qu'on appelle le <u>filtre caractéristique</u> (C) de E.

Un filtre dans T est donc un élément de $P(T)$; en particulier, un filtre dans $P(E)$ est un élément de $P(P(E))$. On peut donc ordonner les filtres par la relation d'inclusion des ensembles dans $P(T)$; on obtient alors le théorème suivant :

<u>THÉORÈME 2</u>.- <u>L'ensemble des filtres de T, ordonné par la relation des ensembles dans $P(T)$, forme un treillis distributif complet $\mathcal{F}$ vérifiant la loi de $\cap$-distributivité générale</u>.

En effet, l'intersection d'un famille de filtres F_α au sens de la théorie des ensembles est encore un filtre $F = \cap F_\alpha$. Si tous les filtres F_α sont propres, il en est de même de F. L'ensemble $\mathcal{F}$ est bien un treillis avec élément minimum $)u($, ou filtre réduit au seul élément u, et élément maximum $)0($ qui est le filtre impropre. L'union d'une famille de filtres F_α est le filtre dont les éléments sont les intersections dans T d'un nombre fini d'éléments appartenant aux F_α. Cette union n'est pas toujours un filtre propre.

Pour montrer que $\mathcal{F}$ vérifie la loi de $\cap$-distributivité générale, il faut établir la relation :

$$A \cap \Big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (A \cap B_\alpha) .$$

Or on a toujours : $A \cap \big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha\big) \supseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (A \cap B_\alpha)$. Il suffit donc de vérifier $A \cap \big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha\big) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (A \cap B_\alpha)$. Soit donc $x \in A \cap \big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha\big)$; on a $x \in A$ et $x = b_{\alpha_1} \cap b_{\alpha_2} \cap \ldots \cap b_{\alpha_n}$, avec $b_{\alpha_i} \in B_{\alpha_i}$, ce qui peut s'écrire $x = (x \cup b_{\alpha_1}) \cap (x \cup b_{\alpha_2}) \cap \ldots \cap (x \cup b_{\alpha_n})$. Comme $x \cup b_{\alpha_i} \in B_{\alpha_i} \cap A$ on a bien : $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (A \cap B_\alpha)$. Le théorème est démontré.

Le treillis des filtres de T est lié à $\dot{T}$ par la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 2.- La correspondance $a \rightarrow)a($ est un isomorphisme dual entre le treillis T et un sous-treillis T' de $\mathcal{F}$, $\cap$-complet.

La correspondance $a \rightarrow)a($ est en effet biunivoque car $)a(=)a'($ entraîne $a = a'$. On a de plus :

$$)a(\cap)b(=)a \cup b(\quad ; \quad)a(\cup)b(=)a \cap b(\quad ; \quad \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}})a_\alpha(=)\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha(.$$

Il y a beaucoup d'autres propriétés importantes des filtres d'un treillis distributif. Signalons seulement la suivante :

PROPRIÉTÉ 3.- Tout filtre propre F est contenu dans un filtre propre maximal ou ultrafiltre.

En effet, la famille des filtres propres contenant un filtre propre F forme un ensemble inductif car une chaîne de filtres propres F_α admet comme filtre union la réunion des éléments des F_α, qui est un filtre propre. La propriété 3 en résulte par application du théorème de ZORN.

5.- VOISINAGES.

DÉFINITION 4.- Dans une topologie dans T, on dit que v est un voisinage de a s'il existe un élément ouvert ω tel que :

$$a \leqslant \omega \leqslant v$$

On vérifie immédiatement la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 4.- Les voisinages de a forment un filtre $V(a)$.

L'application $a \rightarrow V(a)$ est donc une application de T dans un treillis $\mathcal{F}$ des filtres de T.

Cette application vérifie les propriétés suivantes :

AXIOMES DES VOISINAGES.

1°/ $V(a) \subseteq)a($

2°/ $V(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V(a_\alpha)$

3°/ Si $v \in V(a)$, il existe $b \in V(a)$ tel que $v \in V(b)$.

4°/ $V(0)$ est le filtre impropre $)0($.

Toutes ces propriétés se démontrent immédiatement. Démontrons par exemple la 2e. Soit $v \in V(\bigcup a_\alpha)$; on a donc $\bigcup a_\alpha \leqslant \omega \leqslant v$, d'où $a_\alpha \leqslant \omega \leqslant v$ et $v \in V(a_\alpha)$. Par suite : $v \in \bigcap V(a_\alpha)$. Inversement, si $v \in \bigcap V(a_\alpha)$, il existe ω_α tel que $a_\alpha \leqslant \omega_\alpha \leqslant v$, d'où $\bigcup a_\alpha \leqslant \bigcup \omega_\alpha \leqslant v$; mais $\bigcup \omega_\alpha$ est un ouvert ω ; il en résulte $v \in V(\cup a_\alpha)$.

Dans le cas où $T = P(E)$, il suffit de définir le filtre des voisinages d'un point pour obtenir au moyen de la propriété 2° le filtre des voisinages d'un élément a quelconque. De même, dans ce cas, la propriété 3° peut être énoncée en supposant que a est un point.

Les éléments ouverts sont définis à partir des voisinages par la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 5.- ω est ouvert si et seulement si $\omega \in V(\omega)$. Une forme équivalente de la propriété 5 s'énonce :

ω est ouvert si et seulement si $V(\omega) =)\omega($.

La notion de voisinages permet une nouvelle définition d'une topologie dans T par le théorème suivant :

THÉORÈME 3.- Etant donnée une application $a \to V(a)$ de T dans le treillis des filtres de T , vérifiant les axiomes des voisinages, il existe une topologie dans T et une seule pour laquelle les voisinages de a sont précisément les éléments du filtre $V(a)$.

Cette topologie, si elle existe, est unique puisque les ouverts sont nécessairement définis par

$$\omega \text{ est ouvert} \iff V(\omega) =)\omega($$

en vertu de la propriété 5 .

Montrons donc que ces éléments forment un sous-treillis Ω $\vee$-complet de T, comprenant 0 et u . Or on a $V(0) =)0($ par hypothèse et $V(u) =)u($ puisque $V(u) \subseteq)u($. Soient ω_1 et ω_2 tels que $V(\omega_1) =)\omega_1($; $V(\omega_2) =)\omega_2($
La propriété 2° montre que l'application $a \to V(a)$ est anti-isotone :
$a \leq b \implies V(a) \supseteq V(b)$. Il en résulte :

$$V(\omega_1 \cap \omega_2) \supseteq V(\omega_1) =)\omega_1(\quad ; \quad V(\omega_1 \cap \omega_2) \supseteq V(\omega_2) =)\omega_2(\quad ,$$

et par conséquent :

$$V(\omega_1 \cap \omega_2) \supseteq)\omega_1(\cup)\omega_2(=)\omega_1 \cap \omega_2($$

c'est-à-dire, d'après la propriété 1° : $V(\omega_1 \cap \omega_2) =)\omega_1 \cap \omega_2($.
Enfin on a d'après la propriété 2° :

$$V(\cup \omega_\alpha) = \cap V(\omega_\alpha) = \cap)\omega_\alpha(=)\cup \omega_\alpha(\ ,$$

ce qui prouve que l'union d'éléments $\omega_\alpha \in \Omega$ est un élément $\omega \in \Omega$.

L'ensemble Ω vérifie bien l'axiome 1 des éléments ouverts.

Il reste à démontrer que, dans la topologie ainsi définie, a admet précisément $V(a)$ comme filtre des voisinages de a. Soit v un voisinage de a ; on a donc : $a \leq \omega \leq v$, ω étant un ouvert. D'où :

$$v \in)\omega(= V(\omega) \subseteq V(a)$$

et par suite : $$v \in V(a) .$$

Inversement, soit $v \in V(a)$. Si ω est l'union des éléments x_α tels que $v \in V(x_\alpha)$, on a d'après la propriété 2°, $V(\omega) = \bigcap V(x_\alpha)$, d'où $v \in V(\omega)$ et par suite $a \leq \omega \leq v$. D'après la propriété 3° des voisinages, il existe $b \in V(\omega)$ tel que $v \in V(b)$; on en déduit $b \leq \omega$, d'où $b = \omega$ et $\omega \in V(\omega)$. ω est ouvert et v est un voisinage de a.

6.- SUR UN THÉORÈME DE GLIVENKO.

Le treillis Ω des éléments ouverts d'une topologie dans T est un treillis distributif complet vérifiant la loi de $\cap$-distributivité générale (propriété 1, § 1). Un treillis quelconque possédant ces propriétés s'appelle un treillis distributif pseudo-complémenté (G. BIRKHOFF, Lattice theory, p.147). Si l'on se donne en effet un élément quelconque a, il existe un élément maximum a^* parmi les éléments x qui vérifient la relation :

$$a \cap x = 0 .$$

Cet élément a^* s'appelle le pseudo-complémenté de a.

Le théorème de GLIVENKO[1] s'énonce ainsi :

THÉORÈME 4.- L'ensemble ordonné Ω^* des pseudo-dompléments forme un treillis de BOOLE. La correspondance $a \rightarrow (a^*)^*$ est un homomorphisme de Ω sur Ω^*.

Remarquons que les hypothèses faites sur Ω permettent de considérer Ω comme un demi-groupe réticulé résidué[2] entier commutatif, en prenant pour multiplication l'opération d'intersection. L'élément a^* est alors le résiduel $0 : a$ Considérons l'équivalence[3] R définie dans Ω par :

$$a \equiv b \quad (R) \Longleftrightarrow 0 : a = 0 : b$$

(1) - V. GLIVENKO, Bull.Acad.Roy.Belg., 15 (1929), 83-88

(2) - M.L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT, Leçons sur les treillis, p.152

(3) - Cette équivalence est du type équivalence d'Artin, en remplaçant e par 0 (réf. précéd., p. 252)

Cette équivalence R est régulière par rapport à l'union :

$$a \equiv b \Longrightarrow a \cup x \equiv b \cup x \qquad \text{car} \qquad 0 : (a \cup x) = 0 : a \cap 0 : x$$

Elle est régulière par rapport à la multiplication, donc par rapport à l'intersection :

$$a \equiv b \Longrightarrow ax \equiv bx \qquad \text{car} \qquad 0 : (ax) = (0 : a) : x = (0 : b) : x = 0 : (bx).$$

De plus on a :

$$a \equiv 0 : (0 : a)$$

Considérons l'application $a \to 0 : (0 : a) = f(a)$. Elle est liée à l'équivalence R par :

$$a \equiv b \quad (R) \Longleftrightarrow f(a) = f(b) .$$

En effet, $a \equiv b$ (R) entraîne $0 : a = 0 : b$ d'où $f(a) = f(b)$. Inversement, si $f(a) = f(b)$ on a $0 : (0 : a) = 0 : (0 : b)$, d'où en prenant les résiduels de 0 par ces éléments $0 : a = 0 : b$.

D'ailleurs, lorsque x décrit Ω, $f(x)$ décrit l'ensemble Ω^* de tous les résiduels de 0 car on sait que x est un résiduel de 0 si et seulement si $f(x) = x$. L'application $x \to f(x)$ est donc une application de Ω sur Ω^*. Cette application est isotone :

$$a \leq b \Longrightarrow 0 : a \geq 0 : b \qquad \text{et} \qquad f(a) \leq f(b) .$$

Montrons que c'est un homomorphisme de Ω sur Ω^*. Cherchons les majorants de $f(a)$ et $f(b)$ dans Ω^*. Les relations $f(c) \geq f(a)$ et $f(c) \geq f(b)$ entraînent $f(c) \geq f(a) \cup f(b)$, d'où en prenant les images par f :

$$f(c) \geq f[f(a) \cup f(b)] = f(a \cup b)$$

car $a \cup b \equiv f(a) \cup f(b)$ entraîne $f[f(a) \cup f(b)] = f(a \cup b)$. On a donc dans Ω^* :

$$f(a) \vee f(b) = f(a \cup b) .$$

On établit de même :

$$f(a) \wedge f(b) = f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$$

car $f(a) \cap f(b) \in \Omega^*$.

Il en résulte que l'ensemble ordonné Ω^* est un treillis (1) distributif

---

(1) - Ce treillis est d'ailleurs isomorphe au treillis quotient Ω/R.

avec élément nul $0 = f(0)$ et élément universel $u = f(u)$.

De plus, un élément quelconque $a \in \Omega^*$ admet dans Ω^* le complément $0 : a$ car :

$$a \cap 0 : a = 0 \quad , \quad a \vee 0 : a = f(a \cup 0 : a) = u$$

Ω^* est bien un treillis de BOOLE et le théorème est démontré.

On a en outre la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 6.- Si Ω est complet, Ω^* est un treillis de BOOLE complet.

En effet, si Ω est complet, l'union infinie dans Ω^* est donnée par :

$$\bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}} f(x_\alpha) = f(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} x_\alpha)$$

Le théorème de GLIVENKO s'applique immédiatement au treillis Ω des éléments ouverts d'une topologie dans T. Le résiduel $0 : a$ ou pseudo-complément a^* d'un élément ouvert a est le plus grand ouvert ω qui vérifie $a \cap \omega = 0$. On a donc :

$$a^* = i(a')$$

en désignant par $i(x)$ l'intérieur de x. Comme a' est un élément fermé quelconque, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 5.- Dans une topologie quelconque, les éléments $i(\varphi)$ forment un treillis de BOOLE complet lorsque φ décrit l'ensemble Φ des fermés de T.
(Cf. "Regular Elements", MAC-KINSEY et TARSKI, réf. citée, p.156)

Remarquons que $f(a) = a^{**} = i\left[(i(a'))'\right] = i(\overline{a})$. L'ensemble Ω^* est donc aussi l'ensemble des éléments $i(\overline{a})$, où $\overline{a}$ désigne une fermeture d'ouvert. De plus, l'application $a \to i(\overline{a})$ est un homomorphisme de Ω sur Ω^*.

Dualement, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 5'.- Dans une topologie quelconque, les éléments $\overline{\omega}$ forment un treillis de BOOLE complet lorsque ω décrit l'ensemble Ω des ouverts de T.

Ce treillis est image homomorphe de Φ par l'application $a \to \overline{i(a)}$.

Ces résultats s'appliquent en particulier à la topologie ordinaire d'un espace réel R^n, et les treillis de BOOLE alors obtenus nous donnent deux exemples remarquables de treillis de BOOLE complets et non atomiques.

THÉORÈME 6.- Dans la topologie d'un espace réel R^n, les ensembles $i(\varphi)$ forment un treillis de BOOLE complet non atomique, φ étant un ensemble fermé quelconque de R^n.

THÉORÈME 6'.- Même énoncé avec les ensembles $\overline{\omega}$.

La relation entre le treillis de BOOLE complet T et un sous-treillis $\cup$-complet Ω pose un problème inverse non résolu en général : immerger un treillis distributif complet Ω vérifiant la loi de $\cap$-distributivité générale dans un treillis de BOOLE complet, avec conservation des unions infinies.