Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

L. Lesieur

Treillis géométriques, I

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 7 (1953-1954), exp. nº 1, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1953-1954__7__A1_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-

Séminaire d'Algèbre 1953-1954

-:-:-

TREILLIS GÉOMÉTRIQUES, I.

-:-:-

Conférence faite par L. LESIEUR, le 16 novembre 1953

-:-:-

Les premiers travaux importants sur l'axiomatique d'une géométrie affine ou projective de dimension finie au moyen de la théorie des treillis remontent à K. MENGER (New foundations of projective and affine geometries, Annals of Math., 37 , 1936 , p. 456) et G. BIRKHOFF (Combinatorial relations in projective geometries, Annals of Math., 36 , 1935 , p. 743). Un peu plus tard, S. MAC-LANE a considéré des treillis plus généraux ("exchange lattices") qu'il a appliqués à certaines questions d'algèbre (A lattice formulation for transcendance degrees and p-bases, Duke Math. Journ., 4 , 1938 , p. 455). Ce sont ces treillis que j'ai rencontrés, sous une forme un peu différente, et étudiés systématiquement en les appliquant aux géométries affines et projectives de dimension finie ou infinie, dans la troisième partie de notre livre (M.-L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, Leçons sur la théorie des Treillis, Cahiers Scientifiques publiés sous la Direction de G. JULIA, fasc. 21 , Paris , 1953).

1 - TREILLIS GÉOMÉTRIQUES DE DIMENSION FINIE.

Les éléments d'une géométrie affine ou projective de dimension 3 : points, droites, plans, auxquels on ajoute l'espace vide O et l'espace U , peuvent être ordonnés par la <u>relation d'ordre</u> suivante :

$A \leq B$ si et seulement si A est situé dans B (par exemple, droite A située dans un plan B) . Dans cette relation d'ordre, deux éléments quelconques A et B ont toujours un majorant minimum (par exemple, si A est une droite et B un point non situé sur A , ce majorant minimum est le plan défini par la droite A et le point B). On le note $A \cup B$. De même, deux éléments A et B ont toujours un minorant maximum (par exemple, si A et B sont deux plans distincts d'une géométrie projective de dimension 3 , ce minorant maximum est la droite commune à ces deux plans). On le note $A \cap B$.

L'espace vide 0 est contenu dans tout élément ($0 \leq X$) et l'espace U contient tout élément ($X \leq U$). On les appelle respectivement <u>élément nul</u> et <u>élément universel</u> . D'où :

<u>I - Les éléments d'une géométrie peuvent être ordonnés en treillis avec élément nul 0 et élément universel U .</u>

Ces éléments ou <u>variétés</u> se prêtent donc à un calcul effectué au moyen des opérations $\cup$ et $\cap$ (<u>union</u> et <u>intersection</u>) qui jouissent des propriétés suivantes :

$$(1)\begin{cases} A \cup A = A \\ A \cup B = B \cup A \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases} \qquad (1)'\begin{cases} A \cap A = A \\ A \cap B = B \cap A \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$

Ces règles de calcul définissent, inversement, la relation d'ordre, par

$$A \leq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A .$$

Les éléments 0 et U vérifient : $A \cup 0 = A$, $0 \cap A = 0$, $A \cap U = A$, $A \cup U = U$, d'où le nom d'élément nul donné à 0 .

Les <u>points</u> possèdent une définition abstraite très simple. P est un point lorsque $P > 0$, la relation $P > X > 0$ étant impossible. On dit alors que <u>P couvre 0</u> , ce qu'on note $P \succ 0$. Plus généralement on dit que <u>C couvre B</u> ($C \succ B$) lorsque $C > B$, la relation $C > X > B$ étant impossible. Une géométrie usuelle vérifie la propriété suivante :

<u>Loi de couverture</u> : P étant un point $P \nleq B$ entraîne $B \cup P \succ B$.

Par exemple, si P est un point non situé sur la droite B , une variété X telle que $B \leq X \leq B \cup P$ ne peut être que la droite B ou le plan $B \cup P$.

On démontre que la forme algébrique de la loi de couverture est la suivante :

II - P <u>étant un point, la relation</u> $B \leq A$ <u>entraîne</u> $A \cap (B \cup P) = B \cup (A \cap P)$

On sait qu'un <u>treillis modulaire</u> est caractérisé par la propriété :

$B \leq A$ entraîne $A \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$

On voit donc qu'un treillis modulaire satisfait à la propriété II . Il en est de même d'un treillis <u>semi-modulaire</u>, qui satisfait à la propriété :

$$X \succ X \cap Y \quad \text{entraîne} \quad X \cup Y \succ Y .$$

En faisant $X = P$ et $Y = B$, on retrouve en effet la loi de couverture. Ainsi, les treillis modulaires et semi-modulaires sont des cas (particuliers) de treillis satisfaisant aux propriétés I et II .

Enfin, relevons encore le caractère suivant d'une géométrie usuelle de dimension 3, ou même de dimension finie :

III - Tout élément est l'union d'un nombre fini de points.

Par exemple, un plan A peut contenir une infinité de points, mais il en existe trois dont l'union est A.

Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante :

Définition 1 : On appelle treillis géométrique, ou géométrie de dimension finie, un ensemble vérifiant les propriétés I, II et III.

Aux exemples constitués par les géométries affines et projectives usuelles de dimension finie, on peut ajouter le suivant :

Les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E quelconque de dimension finie constituent un treillis géométrique de dimension finie.

Il suffit en effet d'ordonner les sous-espaces vectoriels de E par la relation d'inclusion des ensembles. On obtient un treillis pour lequel $A \cap B$ est l'intersection au sens de la théorie des ensembles ; $A \cup B$ est le sous-espace vectoriel engendré par la réunion de A et B ; il est constitué par les vecteurs $\alpha + \beta$ où α décrit A, β décrit B ; il ne coïncide pas avec la réunion de A et B. L'élément nul 0 est le sous-espace vectoriel formé du seul vecteur nul ; un point (ξ) est l'ensemble des vecteurs $a\xi$, où ξ est un vecteur non nul et où a décrit le corps K des opérateurs. L'élément universel est E. On démontre aisément que ce treillis est modulaire ; il vérifie par suite la propriété II. Enfin, tout élément est l'union d'un nombre fini de points lorsque l'espace vectoriel est supposé de dimension finie.

2 - TREILLIS GÉOMÉTRIQUES QUELCONQUES.

Considérons plus généralement l'ensemble des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel quelconque, de dimension finie ou non. Il constitue encore un treillis vérifiant les propriétés I et II. Un élément $A \neq 0$ n'est plus nécessairement l'union d'un nombre fini de points, mais il est toujours l'union des points qu'il contient, et qui forment un ensemble non vide. La propriété III est remplacé par la suivante:

III_1 - L'union des points d'un ensemble fini ou infini existe, et tout élément $A \neq 0$ est l'union de points (en nombre fini ou infini).

De plus si un point $P = (\xi)$ est situé dans l'union d'une infinité de points $P_\alpha = (\xi_\alpha)$, le vecteur ξ est une combinaison linéaire

$$\xi = a_1 \ \xi_{\alpha_1} + a_2 \xi_{\alpha_2} + \dots + a_k \xi_{\alpha_k}$$

d'un nombre fini P_{α_i} $(i = 1, 2, \dots, k)$ des vecteurs ξ_α , et par suite P est situé dans l'union d'un nombre fini des points P_α . On peut donc ajouter :

IV - Si un point P est situé dans l'union de points P_α en nombre infini , P est situé dans l'union d'une partie finie d'entre eux.

Cet exemple suggère la définition d'un treillis géométrique quelconque.

Définition 2 : On appelle treillis géométrique (ou géométrie) quelconque un ensemble G vérifiant les propriétés I, II, III_1 et IV .

Si G ne vérifie pas la propriété III, il est dit de *dimension infinie*.

L'exemple des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel quelconque E n'est pas le seul exemple de treillis géométrique de dimension infinie.

- Considérons l'ensemble des relations d'équivalence $\mathcal{R}$ définies dans un ensemble quelconque E . Ordonnons le par :

$$\mathcal{R} \leq \mathcal{R}' \text{ si et seulement si } x \equiv y \ (\mathcal{R}) \text{ entraîne } x \equiv y \ (\mathcal{R}')$$

On obtient un treillis dont l'élément nul est l'égalité : $x \equiv y \ (0)$, si et seulement si $x = y$, et dont l'élément universel est l'équivalence absolue : $x \equiv y \ (U)$ quels que soient x et y . L'intersection de deux équivalences $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ est l'équivalence $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ définie par :

$$x \equiv y \ (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \text{ si et seulement si } x \equiv y \ (\mathcal{R}_1) \text{ et } x \equiv y \ (\mathcal{R}_2)$$

L'union de deux équivalences $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ est leur *produit transitif* (P. DUBREIL, Algèbre, 2e édition, Chap. I, § 12) défini par :

$x \equiv y \ (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)$ si et seulement s'il existe une suite finie d'éléments $a_1 , a_2 , \dots , a_p$ tels que :

$$x \equiv a_1 \ (\mathcal{R}_i) \ , \ a_1 \equiv a_2 \ (\mathcal{R}_i) \ , \ \dots \ , \ a_p \equiv y \ (\mathcal{R}_i) \ ; \ (i = 1 \text{ ou } 2).$$

Un point est l'équivalence pour laquelle chaque classe est constituée par un seul élément de E , sauf l'une d'elles formée par deux éléments distincts. On en déduit facilement, en vérifiant les propriétés I, II, III_1 et IV :

L'ensemble des relations d'équivalence définies dans un ensemble E constitue un treillis géométrique de dimension finie ou infinie suivant que E est fini ou infini.

Ces exemples montrent la généralité des treillis géométriques. Je caractériserai dans la prochaine conférence ceux qui définissent une géométrie projective ou une géométrie affine de dimension finie ou infinie, mais je vais montrer dès maintenant que cette généralité n'est pas sans objet, et que certains résultats importants peuvent être obtenus dans les treillis géométriques quelconques.

3 - THÉORIE DE LA DÉPENDANCE.

α) Cas d'un treillis géométrique de dimension finie. Tout élément $X \neq 0$ étant union d'un nombre fini de points, on peut se contenter d'étudier les familles de points en nombre fini.

Définition 3 : On dit qu'un point P dépend de l'ensemble $\{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ lorsque $P \leqslant P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_m$. Il en est indépendant dans le cas contraire.

Dans la théorie de la dépendance, une propriété joue un rôle important :

Propriété d'échange. Si P dépend de $\{P_1, P_2, \ldots, P_m, Q\}$, sans dépendre de $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, Q dépend de $\{P_1, P_2 \ldots, P_n, P\}$.

En effet, posons $P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n = B$. On a donc :

$$P \leqslant B \cup Q \quad \text{avec} \quad P \nleqslant B$$

On en déduit :

$$B < B \cup P \leqslant B \cup Q$$

D'après la loi de couverture, on a $B \cup Q \succ B$ ou $B \cup Q = B$. Le deuxième cas est impossible, d'où : $B \cup Q \succ B$ et, par suite, $B \cup P = B \cup Q$. Il en résulte bien $Q \leqslant B \cup P$, c'est-à-dire Q dépend de $\{P_1, P_2, \ldots, P_n, P\}$

Dans notre livre (1ère partie, Chap. 9), la théorie de la dépendance est traitée directement au moyen de la définition 3 et de la propriété d'échange. J'indique les principaux résultats un peu plus loin et je vais seulement montrer ici comment on peut rattacher cette théorie à celle de HAUPT, NÖBELING et PAUC (Über Abhängigkeitsräume, Journ. für die reine und ang. Math., 181, 1939).

Définition 4 : On dit que les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont dépendants lorsque l'un d'eux dépend des autres. On écrit alors $\mathcal{D}\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$

Les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont indépendants dans le cas contraire, ce qu'on note $\mathcal{J}\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$.

Cette relation de dépendance $\mathcal{D}$, symétrique par rapport à $P_1, P_2, \ldots, P_n$, et sa négation $\mathcal{J}$, ont les propriétés suivantes qui sont précisément les axiomes de HAUPT, NÖBELING et PAUC :

1°) $\mathcal{D}\{P, P\}$, ou <u>axiome de coïncidence</u> (immédiat).

2°) $\mathcal{D}\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \Longrightarrow \mathcal{D}\{P_1, P_2, \dots, P_n, P\}$ ou <u>axiome d'induction</u> (immédiat).

3°) $\mathcal{D}\{P_1, P_2, \dots, P_n, P\}$, $\mathcal{D}\{P_1, P_2, \dots, P_n, Q\}$, $\mathcal{J}\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ entraînent $\mathcal{D}\{P_2, P_3, \dots, P_n, P, Q\}$ ou <u>axiome d'échange</u>.

Pour le montrer, supposons $P \not\leq P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n$. (Lorsque $P \leq P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n$, P dépend de $\{P_2, P_3, \dots, P_n\}$ donc de $\{P_2, P_3, \dots, P_n, Q\}$ et on a bien $\mathcal{D}\{P_2, P_3, \dots, P_n, P, Q\}$).
Montrons qu'on a : $P \leq P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$. En effet, si P_i dépend de $\{P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n, P\}$, on remarque que P_i ne dépend pas de $\{P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n\}$ d'après $\mathcal{J}\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. On en déduit, d'après la propriété d'échange, que P dépend de $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. De même, Q dépend de $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$
Or $P \not\leq P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n$ entraîne, d'après la propriété d'échange, $P_1 \leq P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n \cup P$. La relation $Q \leq P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ montre alors : $Q \leq P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n \cup P$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{D}\{P_2, P_3, \dots, P_n, P, Q\} .$$

β) <u>Cas d'un treillis géométrique de dimension infinie</u>.

Tout élément $X \neq 0$ est alors union de points en nombre fini ou infini (propriété III_1) . D'ailleurs, si P est situé dans l'union d'une infinité de points il est situé dans l'union d'une partie finie d'entre eux (propriété IV). Nous donnons donc la définition suivante :

<u>Définition 5</u> : On dit qu'un point P <u>dépend de l'ensemble</u> $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ lorsque P dépend d'une partie finie de cet ensemble. Il en est indépendant dans le cas contraire. Une famille $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est <u>libre</u> lorsqu'aucun de ses points ne dépend des autres. Elle est <u>non libre</u> dans le cas contraire. Dans le 1^er^ cas on dit que ses points sont <u>indépendants</u>, dans le deuxième, ils sont <u>dépendants</u>.

Donc, si $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} P_\alpha$, on a $P \leq X$ si et seulement si P dépend de l'ensemble $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Cette remarque, basée sur la propriété IV , permet d'interpréter pour un treillis géométrique quelconque les résultats de la théorie de la dépendance, qui vont conduire à la notion de dimension.

4 - DIMENSION D'UNE VARIÉTÉ

α) Cas d'un treillis géométrique de dimension finie.

Soit $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{Q}}$ l'ensemble de tous les points d'une variété $A \neq 0$ d'un treillis géométrique de dimension finie. A est donc l'union de points P_i en nombre fini (propriété III) que l'on peut, en supprimant les points superflus, supposer indépendants. On a donc

$$A = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}\{P_1, P_2, \ldots, P_k\} .$$

L'ensemble $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ s'appelle une base de A.

Théorème du rang. Ce nombre k est un invariant de A. On l'appelle rang de A. Le nombre $k - 1 = d[A]$ s'appelle la dimension de A.

En particulier $n = d[U]$ est appelée la dimension du treillis. On a $d[P] = 0$. Une droite, un plan, sont par définition des variétés de dimension 1, 2. La variété 0 est par convention de dimension -1.

Théorème de la base incomplète. Soit $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ une base de A ; soit $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_m\}$ un ensemble de points indépendants situés dans A. On a $m \leqslant k$ et il est possible de trouver une base de A constituée par les m points Q_i et par $k - m$ points pris parmi les points P_j $(j = 1,2,\ldots,k)$.

On en déduit que la dimension $d[A]$ est le nombre maximum, diminué de 1, de points indépendants situés dans A.

Signalons encore la propriété suivante :

Théorème 1 : $d[A \cup B] + d[A \cap B] \leqslant d[A] + d[B]$.

On appelle hyperplan une variété H couverte par U. On démontre alors comme conséquence des résultats qui précédent :

Théorème 2 : Dans un treillis géométrique G_n de dimension n, toute variété A de dimension $d < n$ peut être considérée comme l'intersection de $n - d$ hyperplans.

Cette proposition est particulièrement intéressante car elle exprime que la propriété "duale" de la propriété III est toujours vérifiée dans un treillis géométrique.

β) Cas d'un treillis géométrique de dimension infinie.

Soit $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{Q}}$ l'ensemble de tous les points d'une variété $A \neq 0$ d'un treillis géométrique quelconque. Si A est l'union de points P_i en nombre fini, on retombe sur le cas précédent et on définit la dimension de A, qui est finie. Sinon, la théorie de la dépendance fournit cependant les résultats suivants :

Théorème de la base. Si $A = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} P_\alpha$ on peut trouver parmi les points P_α une famille libre dont l'union est A . Une telle famille libre s'appelle une base de A .

Théorème de la base incomplète. Soit $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une base de A .
Soit $\{Q_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ un ensemble de points indépendants situés dans A . Il est possible de trouver une base de A constituée par l'ensemble $\{Q_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ et une partie de l'ensemble $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$.

Le théorème suivant généralise le théorème 2 et fournit la propriété duale de la propriété III_1 .

Théorème 3. $A \neq U$ étant une variété d'un treillis géométrique quelconque, peut-être considérée comme l'intersection d'hyperplans (en nombre fini ou infini).

5 - PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES D'UN TREILLIS GÉOMÉTRIQUE.

On démontre les résultats suivants :

Théorème 4. Pour qu'un treillis soit un treillis géométrique de dimension n , il faut et il suffit qu'il soit semi-modulaire, de longueur finie $n + 1$, et relativement complémenté.

Rappelons qu'un treillis est de longueur finie $n + 1$, si toutes les chaînes $0 < X_1 < X_2 < \dots < X_\ell = U$ ont au maximum $n + 1$ termes.
La semi-modularité dans un treillis de longueur finie peut être caractérisée par la propriété donnée au paragraphe 1 . D'autre part, le treillis est relativement complémenté lorsque la relation $A \leqslant X \leqslant B$ implique l'existence de X' tel que $X \cap X' = A$, $X \cup X' = B$.

Théorème 5 . Pour qu'un treillis soit un treillis géométrique quelconque, il faut et il suffit qu'il soit semi-modulaire, relativement complémenté, atomique, complet et $\cap$-continu.

Pour les treillis de longueur infinie, il existe de nombreuses définitions possibles de la semi-modularité (Voir R. CROISOT, Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infinie, Thèse, Paris 1951). Mais, dans un treillis géométrique, la propriété indiquée au paragraphe 1 est suffisante.
Rappelons qu'un treillis avec élément nul est atomique si, pour tout élément $X > 0$, il existe au moins un point $P < X$. Le treillis est complet si l'union et l'intersection d'une infinité d'éléments existent. Enfin il est $\cap$-continu lorsqu'il vérifie :

$$X \cap \Big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha \Big) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \cap Y_\alpha)$$

pour un ensemble $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{Q}}$ filtrant supérieurement, c'est-à-dire tel que deux éléments de cet ensemble admettent toujours un majorant commun dans l'ensemble.

Comme conséquence de la semi-modularité, on peut indiquer le cas où il existe une chaîne maximale finie de longueur $c + 1$ allant de A à U. Dans ce cas, le nombre $c + 1$ est un invariant, et d s'appelle la <u>codimension de</u> A, désignée par cod $[A]$. Pour que A soit un hyperplan il faut et il suffit que cod $[A] = 0$. Si A est de codimension c, on démontre que A est l'intersection de $c + 1$ hyperplans. Les variétés de codimension 1 vont, au même titre que les droites, intervenir dans l'étude de l'irréductibilité d'un treillis géométrique.

6 - <u>TREILLIS GÉOMÉTRIQUES IRRÉDUCTIBLES.</u>

Soient deux treillis G_1 et G_2. Considérons les couples (X_1, X_2), où X_1 décrit G_1, X_2 décrit G_2. La relation

$$(X_1, X_2) \leq (Y_1, Y_2) \text{ définie par } X_1 \leq Y_1 \text{ et } X_2 \leq Y_2$$

est une relation d'ordre dans l'ensemble G de ces couples. On vérifie immédiatement que G est un treillis qu'on appelle <u>produit cardinal</u> des treillis G_1 et G_2. De plus, si G_1 et G_2 sont deux treillis géométriques, G est aussi un treillis géométrique. Ce treillis est réductible, conformément à la définition suivante :

<u>Définition 6</u>. On dit qu'un treillis est <u>réductible</u> s'il est isomorphe au produit cardinal de deux treillis ayant plus d'un élément. Il est <u>irréductible</u> dans le cas contraire.

Il existe des treillis géométriques réductibles, par exemple le produit cardinal de deux treillis géométriques. Les deux théorèmes suivants donnent des conditions suffisantes pour qu'un treillis géométrique soit irréductible.

<u>Théorème 6</u> . <u>Pour qu'un treillis géométrique soit irréductible, il suffit que toute droite contienne au moins trois points distincts</u>.

C'est la condition introduite par G. FANO dans la définition d'une géométrie projective irréductible. On vérifiera qu'elle s'applique à l'exemple du treillis des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel quelconque, treillis qui est donc irréductible.

<u>Théorème 7</u> . <u>Pour qu'un treillis géométrique soit irréductible, il suffit que toute variété</u> V <u>de codimension 1 soit contenue dans trois hyperplans distincts au moins</u>.

Cette condition, duale de la précédente, s'applique en particulier au treillis des relations d'équivalence dans un ensemble quelconque. Celui-ci est donc un treillis géométrique irréductible. Le fait qu'il soit géométrique entraîne qu'il possède toutes les propriétés énumérées au théorème 5 .

Tels sont quelques uns des caractères essentiels des treillis géométriques. Nombre d'entre eux ont été passés sous silence, en particulier la théorie du parallélisme qui peut être amorcée pour un treillis géométrique quelconque, et sur laquelle j'aurai à revenir dans le cas des géométries affines.