Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

P. Jaffard

Extensions des groupes ordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 7 (1953-1954), exp. nº 11, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1953-1954__7__A11_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire d'ALGEBRE
Année 1953/1954
-:-:-:-

EXTENSIONS DES GROUPES ORDONNÉS

Conférence faite par P.Jaffard le 31 mai 1954

Préliminaires

Tous les groupes considérés seront supposés abéliens et notés additivement. G étant un groupe ordonné (c'est-à-dire muni d'une relation d'ordre partielle ou totale telle que $a \leq b \longrightarrow a+x \leq b+x$ quels que soient $a,b,x \in G$), on notera G_+ le sous-ensemble de G formé par tous ses éléments positifs ou nuls. On sait que G_+ détermine complétement la structure d'ordre sur G grâce à la relation :

$$a \leq b \rightleftarrows b-a \in G_+$$

G_+ vérifie les relations suivantes :

(1) $\qquad G_+ + G_+ \subset G_+$

(2) $\qquad G_+ \cap (-G_+) = \{0\}$.

Réciproquement si on se donne un sous-ensemble A d'un groupe G tel que $A+A \subset A$ et $A \cap (-A) = \{0\}$, il existe sur G une structure d'ordre compatible avec sa structure de groupe telle que $G_+ = A$.

G et Q étant deux groupes ordonnés, un homomorphisme φ de G dans Q sera dit <u>croissant</u> si $x \leq y \longrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$, c.a.d. si $\varphi(G_+) \subset Q_+$.

φ ne peut être croissant que si son noyau H est un sous-groupe <u>isolé</u> de G, c.a.d. tel que :

$$h \in H, x \in G \text{ et } 0 \leq x \leq h \qquad \text{entrainent } x \in H.$$

(En effet $0 \leq x \leq h$ entraine $\varphi(0) \leq \varphi(x) \leq \varphi(h)$ d'où $\varphi(x)=0$).

G étant un groupe ordonné, H un sous-groupe isolé de G et Q le groupe quotient G/H, on peut trouver sur Q des structures d'ordre compatibles avec sa structure de groupe qui rendent croissant l'homomorphisme canonique φ de G sur Q. En particulier il y en a une qui est moins fine que toutes les autres, c'est celle qui est définie par $Q_+ = \varphi(G_+)$. La structure d'ordre correspondante sur Q est la structure d'ordre quotient de G par H. Elle vérifie bien les conditions imposées. En effet :

$$Q_+ + Q_+ \subset Q_+$$

$$\varphi(G_+) \subset Q_+$$

et de plus $Q_+ \cap (Q_+) \ni \varphi(x)$ implique que l'on peut trouver deux éléments h et h' de H tels que $x+h \in G_+$ et $x+h' \in -G_+$ donc que $-h \leq x \leq -h'$ ou $0 \leq h+x \leq h-h'$ d'où $x+h \in H$ (puisque H est isolé) donc $x \in H$ et $\varphi(x)=0$. Donc $Q_+ \cap (-Q_+) = \{0\}$.

G et Q étant deux groupes réticulés, un homomorphisme φ de G dans Q est dit propre si pour tous $x,y \in G$ on a :

$$(3) \qquad \varphi(\inf(x,y)) = \inf(\varphi(x), \varphi(y))$$

Tout homomorphisme propre est évidemment croissant.

φ ne peut être propre que si son noyau H est un sous-groupe propre de G, c'~~est-à-dire~~ tel que $x,y \in H$ entraine $\inf(x,y) \in H$.

G étant réticulé et H un sous-groupe isolé propre de G, le groupe $Q = G/H$ muni de la structure d'ordre quotient est réticulé et l'application canonique de G sur Q est propre.

Problèmes d'extension

Supposons que l'on se donne deux groupes (abéliens) Q et H et une extension (abélienne) G de Q par H. On considérera que H est un sous-groupe de G et on identifiera les éléments de Q aux classes de G selon H. On notera φ l'homomorphisme canonique de G sur Q.

G peut être défini par la donnée sur l'ensemble produit $H \times Q$ de la loi de composition :

$$(4) \qquad (a,x) + (b,y) = (a+b+f(x,y)\ ,\ x+y)$$

où f est un 2-cocycle[1] tel que $f(x,0) = 0$ et $f(x,y) = f(y,x)$.

On a alors :

$$\varphi((a,x)) = x \qquad \text{et} \qquad (a,0) = a$$

H et Q étant des groupes ordonnés, on dira que G est une extension ordonnée de Q par H si G est muni d'une structure d'ordre compatible avec sa structure de groupe induisant sur H l'ordre donné initialement, telle que H soit

(1) - c'est-à-dire une application f de $Q \times Q$ dans H vérifiant l'identité

$$f(x,y) + f(x+y,z) = f(y,z) + f(x,y+z)$$

un sous-groupe isolé de G et telle que l'ordre quotient défini sur G/H coïncide avec l'ordre donné initialement sur Q.

H et Q étant des groupes ordonnés et G une extension de Q par H, nous nous proposons dans ce qui suit de trouver les structures d'ordre sur G qui en fassent une extension ordonnée de Q par H. Le problème revient à définir G_+ ou encore à trouver un sous-ensemble P de G vérifiant les quatre conditions suivantes :

(5) $$P \cap H = H_+$$
(6) $$\varphi(P) = Q_+$$
(7) $$P + P \subset P$$
(8) $$P \cap (-P) = \{0\}.$$

On voit en effet facilement que si P vérifie les quatre conditions précédentes et si l'on pose $G_+ = P$, H devient un sous-groupe isolé de G : Soit en effet $0 \leqslant \xi \leqslant h$ ($\xi \in G$ et $h \in H$) ; $h-\xi \in P$ entraine $\varphi(h-\xi) \geqslant 0$ en vertu de (6) ou $\varphi(h) \geqslant \varphi(\xi)$ donc $\varphi(\xi) \leqslant 0$. Mais $\xi \in P$ entraine $\varphi(\xi) \geqslant 0$. Donc $\varphi(\xi) = 0$ et $\xi \in H$.

On voit de plus que les conditions (5) et (6) entrainent la condition (8). Supposons en effet remplies les deux premières conditions et soit $\xi \in P \cap (-P)$. En vertu de (6) on a $\varphi(\xi) \in Q_+ \cap (-Q_+)$ ou $\varphi(\xi) = 0$, donc $\xi \in H$ et (5) entraine $\xi \in H_+ \cap (-H_+)$ ou $\xi = 0$. D'où (8).

En reprenant la définition de G donnée plus haut (comme ensemble produit $H \times Q$ muni de la loi de composition (4), les conditions (5), (6) et (7) se traduisent par :

(5') $$(a,0) \geqslant 0 \rightleftarrows a \geqslant 0$$
(6') $$(a,x) \geqslant 0 \longrightarrow x \geqslant 0 \quad ; \quad x \geqslant 0 \longrightarrow \exists\, a \in H \text{ avec } (a,x) \geqslant 0$$
(7') $$(a,x)\ ,\ (b,y) \geqslant 0 \longrightarrow (a+b+f(x,y), x+y) \geqslant 0\ .$$

Les relations (5'), (6') et (7') entrainent la relation :

(9) $$a \leqslant b \longrightarrow (a,x) \leqslant (b,x)$$

En effet $a \leqslant b$ entraine $b-a \geqslant 0$, donc $(b-a,0) \geqslant 0$ (en vertu de (5')), donc $(b-a,0) + (a,x) \geqslant (a,x)$. Or $(b-a,0) + (a,x) = (b+f(0,x),x) = (b,x)$. D'où la relation (9).

Appelons <u>ensemble-solution</u> tout sous-ensemble P de G vérifiant les relations (5), (6) et (7). On voit qu'il existe un ensemble solution plus grand que tous les autres (et qui définit par suite une structure d'ordre sur G plus fine que toutes les autres structures d'ordre qui font de G une extension ordonnée de Q par H) , c'est le sous-ensemble L de G ainsi défini :

(10) $$\xi \in L \rightleftarrows \{ \varphi(\xi) > 0 \quad \text{ou} \quad \xi \in H_+ \}$$

L'extension ordonnée correspondante de Q par H est dite <u>extension lexicographique</u> . Elle est définie par :

(10') $$(a,x) \geqslant 0 \rightleftarrows \{ x > 0 \quad \text{ou} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad a \geqslant 0 \} \quad .$$

<u>Solution générale du problème</u>

H étant un groupe ordonné, appelons <u>surclasse large</u> (on dit aussi section finissante) tout sous-ensemble S non vide de H vérifiant la relation suivante :

(11) $$a \in S \quad \text{et} \quad b \geqslant a \longrightarrow b \in S \ .$$

A et B étant deux surclasses larges de H , il en est de même de A + B . Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{S}$ des surclasses larges de H forme un demi-groupe . Si on ordonne $\mathcal{S}$ par la relation :

$$A \leq B \rightleftarrows A \supset B$$

on voit que $\mathcal{S}$ devient un demi-groupe ordonné car on a :

$$A \leq B \longrightarrow A+X \leq B+X \qquad \text{quel que soit} \quad X \in \mathcal{S}$$

a étant un élément de H , on note (a) le sous-ensemble de H ainsi défini :

$$h \in (a) \rightleftarrows h \geqslant a \ .$$

(a) est donc une surclasse large de H qui est dite <u>surclasse principale</u> déterminée par a .

On voit immédiatement que si on identifie chaque élément a de H à la surclasse principale (a) qu'il détermine , on peut considérer que H est un sous-groupe ordonné du demi-groupe ordonné $\mathcal{S}$.

Revenons maintenant au problème d'extension et identifions, comme nous l'avons convenu, les éléments de Q aux classes de G suivant H . Si P est un ensemble solution et si $x \in Q_+$, la relation (6') montre que le sous-ensemble $\psi(x)$ ainsi défini :

$$a \in \psi(x) \rightleftarrows (a,x) \in P$$

n'est pas vide. La relation (9) montre de plus que $\psi(x)$ est une surclasse large de H .

Déterminer P revient donc à trouver une application ψ de Q_+ dans $\mathcal{S}$ telle que :

(11) $$\psi(0) = H_+$$

(12) $$\psi(x) + \psi(y) + (f(x,y)) \geqslant \psi(x+y) \ .$$

On voit que l'extension lexicographique correspond à l'application ainsi définie :

$$\psi(0) = H_+ \quad \text{et} \quad \psi(x) = H \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad (x \in Q_+) \ .$$

On peut trouver de très nombreuses applications ψ vérifiant les conditions (11) et (12) . Nous allons en indiquer quelques unes dans le cas où le cocycle f est nul , c.a.d. où G est somme directe des groupes H et Q :

La condition (12) se simplifie alors en :

$$(12') \qquad \psi(x) + \psi(y) \geqslant \psi(x+y)$$

On voit que l'on obtient par exemple tout un ensemble de solutions de la forme suivante : On choisit un élément A de $\mathcal{S}$ tel que $A \geqslant (0)$ et on pose $\psi(x) = A$ si $x \neq 0$ $(x \in Q_+)$. La structure d'ordre sur G est alors définie par :

$$(a,x) \geqslant 0 \rightleftarrows \{x = 0 \ \text{ et } \ a \geqslant 0 \ ; \text{ ou } \ x > 0 \ \text{ et } \ a \in A\}$$

Dans le cas où on prend $A = H_+ = (0)$ G devient la <u>somme directe ordonnée</u> de H et Q , c.a.d. que :

$$(a,x) \geq 0 \rightleftarrows \{a \geqslant 0 \ \text{ et } \ x \geqslant 0\}$$

On obtient un autre type de solutions en considérant un homomorphisme quelconque ψ' (non nécessairement croissant) de Q dans H . On pose alors pour tout $x \in Q_+$: $\psi(x) = (\psi'(x))$. On voit que $\psi(x) + \psi(y) = \psi(x+y)$. La relation (12') se trouve bien vérifiée. L'ordination sur le groupe G se trouve définie de la façon suivante :

$$(13) \qquad (a,x) \geqslant 0 \rightleftarrows \{x \geqslant 0 \ \text{ et } \ a \geqslant \psi'(x)\}$$

Si on prend pour ψ' l'homomorphisme nul , on retombe sur la somme directe ordonnée.

D'ailleurs la structure d'ordre associée à l'homomorphisme ψ' est liée à celle de la somme directe ordonnée :

Considérons en effet l'automorphisme σ de G défini par :

$$\sigma(a,x) = (a - \psi'(x),x)$$

σ laisse invariant les éléments de H et les classes de G selon H . Par suite si on se donne sur G une ordination compatible avec sa structure d'extension de Q par H , la transformée par σ^{-1} de cette ordination est encore compatible avec sa structure d'extension . Or on voit que l'ordination définie par l'homomorphisme ψ sur G est la transformée par σ^{-1} de l'ordination de la somme directe.

Cette méthode permet de construire de nombreux groupes réticulés ; car :

<u>Théorème 1.- Quel que soit l'homomorphisme ψ' de Q dans H, si H et Q sont réticulés, il en est de même de G.</u>

En effet l'ordination de G est image par σ^{-1} de la somme directe ordonnée de H et Q, donc elle fait de G un groupe réticulé. On voit à partir de là (comme on peut d'ailleurs le vérifier directement) que :

$$\inf\left[(a,x),(b,y)\right] = \left[\psi'(\inf(x,y))+\inf(a-\psi'(x),b-\psi'(y)),\inf(x,y)\right] .$$

Extensions lexicographiques.

Soient G un groupe ordonné, H un sous-groupe isolé de G et Q le groupe ordonné quotient G/H. G est une extension de Q par H. C'est une extension lexicographique si et seulement si H vérifie la propriété suivante :

$$\xi \in G, h \in H \quad \text{et} \quad h \leq \xi \longrightarrow \{\xi \in H \quad \text{ou} \quad \xi > 0\}$$

Si G est un groupe ordonné, tout sous-groupe H de G vérifiant la propriété précédente sera dit <u>fortement isolé</u>.

<u>Théorème 2.- Tout sous-groupe fortement isolé d'un groupe ordonné G est sous-groupe isolé de G et, dans le cas où G est réticulé, sous-groupe propre de G.</u>

<u>Théorème 3.- Un groupe G, extension lexicographique de Q par H, est réticulé si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :</u>

1) <u>H est réticulé et Q totalement ordonné.</u>
2) <u>$H = \{0\}$ et Q est réticulé.</u>

On voit que le cas 2) entraine trivialement que G soit réticulé. Supposons que l'on soit dans le cas 1) : Soient $\xi = (a,x)$ et $\eta = (b,y)$.
Si $x \neq y$ on a par exemple $x > y$ et alors $\xi > \eta$. Si $x = y$, on voit que $\inf(\xi,\eta) = (\inf(a,b),x)$. Dans tous les cas $\inf(\xi,\eta)$ existe et G est bien réticulé.

Supposons réciproquement que G soit réticulé. H, étant un sous-groupe fortement isolé de G est sous-groupe propre de G, donc également réticulé.

Montrons que Q est totalement ordonné. Supposons que x et y soient deux éléments de Q incomparables. Soient $\xi = (0,x)$, $\eta = (0,y)$ et $\zeta = \inf(\xi,\eta) = (c,z)$. On en déduit $z \leq x,y$ et comme x et y sont incomparables, $z < x,y$.
Puisque le groupe réticulé H n'est pas réduit à $\{0\}$, $\exists c' \in H$ avec $c' > c$. Si on pose $\zeta' = (c',z)$, on a $\zeta < \zeta' \leq \xi, \eta$ ce qui contredit $\zeta = \inf(\xi,\eta)$.
Donc Q est totalement ordonné.

<u>Corollaire 1.-</u> <u>Pour que l'extension ordonnée de Q par H soit totalement ordonnée, il faut et il suffit qu'elle soit lexicographique et que Q et H soient totalement ordonnés.</u>

<u>Corollaire 2.-</u> <u>Si H est un sous-groupe fortement isolé du groupe réticulé G, le groupe quotient G/H est totalement ordonné.</u>

On montre que le résultat de deux extensions lexicographiques successives est encore une extension lexicographique :

Soient H, Q_1 et Q_2 trois groupes ordonnés (partiellement), G une extension lexicographique de Q_1 par H et Γ une extension lexicographique de Q_2 par G. Alors $Q = \Gamma/H$ (ordonné canoniquement) apparaît comme une extension lexicographique de Q_2 par Q_1 et Γ est extension lexicographique de Q par H.

En particulier si H est réticulé et si Q_1 et Q_2 sont totalement ordonnés, Γ est le groupe réticulé extension lexicographique du groupe totalement ordonné Q par le groupe réticulé H.

<u>Application à la structure des groupes réticulés.</u>

Nous allons dans ce qui suit déterminer la structure des groupes réticulés qui sont réalisables comme sous-groupes propres d'une somme directe ordonnée d'un nombre fini de groupes totalement ordonnés.

G étant un groupe réticulé, on rappelle que les <u>filets</u> de G sont les classes d'équivalence définies dans l'ensemble G_+ par la relation :

$$a \equiv b \rightleftarrows \left\{ \inf(a,x) = 0 \rightleftarrows \inf(b,x) = 0 \quad \forall\ x \in G_+ \right\}$$

On désigne par $\bar{a}$ le filet défini par l'élément a de G_+. L'ensemble des filets de G forme un treillis si on l'ordonne par la relation :

$$\bar{a} \geqslant \bar{b} \rightleftarrows \left\{ \inf(a,x) = 0 \longrightarrow \inf(b,x) = 0 \quad \forall\ x \quad G_+ \right\}$$

On montre ([2]) qu'un groupe réticulé est réalisable comme sous-groupe propre d'une somme directe ordonnée d'un nombre fini de groupes totalement ordonnés si et seulement si il n'a qu'un nombre fini de filets.

Le problème posé se ramène donc à déterminer les groupes ayant cette dernière propriété.

G étant un groupe réticulé nous désignerons dans la suite par $\hat{G}$ le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des éléments de G_+ n'appartenant pas à un filet maximal de G. On voit en particulier que si G n'a pas de filet maximal on a $\hat{G} = G$. Comme les groupes totalement ordonnés sont ceux qui n'ont

qu'un seul filet différent de $\{0\}$, on voit que le groupe réticulé G est totalement ordonné si et seulement si $\hat{G} = \{0\}$.
On peut alors montrer que $\hat{G}$ est un sous-groupe fortement isolé de G tel que $\hat{\hat{G}} = \hat{G}$.

Si G n'a qu'un nombre fini de filets et n'est pas totalement ordonné, les filets de G et de $\hat{G}$ se correspondent biunivoquement de la manière suivante : Tout filet non maximal de G est également filet (non maximal) de $\hat{G}$. Si $\mathfrak{m}$ est le filet maximal de G , l'ensemble $\hat{G} \cap \mathfrak{m}$ n'est pas vide et est le filet maximal de $\hat{G}$.

On montre aussi que si G est extension lexicographique du groupe totalement ordonné Q par le groupe réticulé H , on a $\hat{G} = \hat{H}$.

Le théorème suivant donne la clé du problème posé plus haut :

<u>Théorème 4.</u>- <u>Si le groupe réticulé G a un nombre fini n de filets et est tel que $G = \hat{G}$, alors G est somme directe ordonnée de groupes réticulés ayant moins de n filets.</u>

La marche générale de la démonstration est la suivante : On part d'une réalisation de G comme sous-groupe propre d'une somme directe ordonnée de m groupes totalement ordonnés $\sum_{1 \leq i \leq m} \Gamma_i$. On définit ensuite une partition de l'ensemble $M = \{1,2,\ldots,m\}$ en sous-ensembles $M_1,\ldots,M_r$ tels que $r \geqslant 2$, que $M_j \neq \emptyset$ $(1 \leq j \leq r)$ et que G soit une somme directe ordonnée de sous-groupes propres H_j $(1 \leq i \leq r)$ de $\sum_{i \in M_j} \Gamma_i$. Les groupes H_j ont alors moins de filets que G .
On a immédiatement le :

<u>Corollaire.</u>- <u>Tout groupe réticulé</u> $G \neq \{0\}$ <u>et n'ayant qu'un nombre fini de filets peut se représenter comme une somme directe ordonnée d'un nombre fini de groupes réticulés</u> $G_i (1 \leq i \leq r)$ <u>tels que</u> $\hat{G}_i \neq G_i$

A partir de ce corollaire on peut décrire tous les groupes n'ayant qu'un nombre fini de filets.

A tout nombre entier positif ou nul nous allons associer de la manière suivante une classe de groupes réticulés :

La <u>classe 0</u> sera composée du seul groupe $\{0\}$.

La classe $n-1$ étant définie, un groupe réticulé G sera dit de <u>classe n</u> s'il est extension lexicographique d'un groupe totalement ordonné (qui peut être $\{0\}$) par un groupe réticulté de classe $n-1$ ou s'il est somme directe ordonnée d'un nombre fini de telles extensions.

Il en résulte que tout groupe de classe n est de classe $n+1$ et que la somme directe ordonnée d'un nombre fini de groupes de classe n est encore de classe n .

On voit en particulier que les groupes de classe 1 sont les groupes totalement ordonnés et les sommes directes ordonnées d'un nombre fini de groupes totalement ordonnés.

Par récurrence sur la classe, on voit facilement que tout groupe réticulé appartenant à l'une des classes précédentes n'a qu'un nombre fini de filets. Réciproquement :

<u>Théorème 5.</u>- <u>Tout groupe réticulé G n'ayant qu'un nombre fini de filets appartient à l'une des classes précédentes.</u>

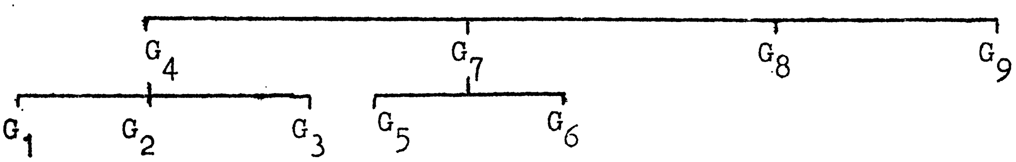
On raisonne par récurrence sur le nombre m des filets du groupe G . Le théorème est vrai si $m = 1$ (cas où $G = \{0\}$) et si $m = 2$ (cas d'un groupe totalement ordonné) . Supposons qu'il ait été démontré pour tout groupe ayant moins de m filets.

<u>1er cas</u> . $G = \hat{G}$. Le théorème 4 montre que G est somme directe ordonnée $\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} G_i$ où les G_i sont des groupes réticulés ayant $m-1$ filets au plus.

Chaque G_i appartient à une classe $n(i)$ d'après les hypothèses de récurrence. Donc G appartient à la classe $n = \sup_{1 \leqslant i \leqslant r} (n(i))$.

<u>2ème cas</u> . $G \neq \hat{G}$. G est alors extension lexicographique du groupe totalement ordonné $G/\hat{G}$ par $\hat{G}$. Le groupe $\hat{G}$ a m filets au plus et, étant tel que $\hat{\hat{G}} = \hat{G}$, il entre dans le premier cas. Il appartient donc à une classe n . Par suite G appartient à la classe $n+1$.

Le théorème précédent résout complètement le problème que nous nous étions posé. Il montre en particulier qu'à tout groupe réticulé G ayant un nombre fini de filets , on peut faire correspondre un tableau tel que le suivante :



dans lequel chaque groupe G_i est un groupe totalement ordonné différent de $\{0\}$. Chaque barre horizontale représente la somme directe ordonnée des groupes réticulés situés au-dessous et qui lui sont attachés par de petits traits verticaux. La figure formée par une barre horizontale rattachée à un G_i situé au-dessus d'elle représente une extension lexicographique de G_i par le groupe représenté par la barre. On suppose en outre que chaque barre horizontale porte au-dessous d'elle au moins deux petits traits verticaux et que deux groupes tels que G_i et G_j ne peuvent être directement attachés au moyen d'un trait vertical.

Le tableau dessiné plus haut représente donc la somme directe ordonnée de quatre groupes Γ_1, Γ_2, G_8 et G_9, le groupe Γ_1 étant une extension lexicographique de G_4 par la somme directe ordonnée des trois groupes G_1, G_2 et G_3 et Γ_2 étant une extension lexicographique de G_7 par la somme directe ordonnée de G_5 et G_6. Le théorème suivant montre de plus qu'un tel tableau est unique : .

Théorème 6 (d'unicité).- Un groupe réticulé G ne peut se présenter que d'une manière comme une somme directe ordonnée d'un ensemble quelconque (fini ou non) de groupes réticulés $G_\iota (\iota \in I)$ tels que $\hat{G}_\iota \neq G_\iota$.

Remarque. Ce théorème généralise le théorème 3 du Ch.II, § 2 de [2] d'après lequel un groupe réticulé ne peut se représenter que d'une manière comme somme directe ordonnée de groupes totalement ordonnés différents de $\{0\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] . Eilenberg et Mac Lane – Cohomology theory in abstract groups I. Annals of Math. Vol.48 (1947) p.51-78.

[2] . P. Jaffard – Contribution à l'étude des groupes ordonnés. Journal Math. Pures et appl. t.32 (1953) p.203-280.

[3] . " – Extensions des groupes réticulés et applications. A paraître aux Publications Mathématiques de la faculté d'Alger.

[2] contient les généralités utilisées ici sur les groupes ordonnés.

[3] contient les démonstrations des théorèmes énoncés ici ainsi qu'une étude plus précise des classes auxquelles appartient un groupe réticulé.
