Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

J. Guérindon

Sur les chaînes maximales d'idéaux dans les anneaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 7 (1953-1954), exp. n° 10, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1953-1954__7__A10_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire d'ALGEBRE
et de THEORIE DES NOMBRES
-:-:-:-

SUR LES CHAINES MAXIMALES D'IDÉAUX DANS LES ANNEAUX

Conférence faite par J. GUÉRINDON, le 10 mai 1954 .

L'étude des chaînes maximales d'idéaux dans les anneaux, déjà bien connue de Sono [11] , repose sur la théorie de Jordan-Hölder, et se généralise aux modules sur un anneau. La géométrie algébrique utilise des chaînes d'idéaux d'un type fixé, le plus souvent dans les anneaux noethériens. Ainsi les chaînes d'idéaux premiers ([7] , [9] , [10]) conduisent aux notions de dimension et les chaînes d'idéaux primaires d'idéal premier fixé à celles de multiplicité ([10] , [12]).

Après avoir briévement rappelé l'existence d'une chaîne maximale d'idéaux p-primaires de q à p (q étant primaire de radical p) selon l'exposé de Northcott [9] , on reprendra en détail la notion de couverture d'un idéal I par un idéal J et on donnera tous les J associés à un I donné. Ceci conduit à la notion d'idéaux quasi-uniformes et se précise dans le cas noethérien. On étudiera ensuite les idéaux quasi-maximaux, c'est-à-dire les idéaux dont tout suridéal premier est maximal : cela conduit alors à une topologie des anneaux noethériens voisine de celles qu'a définies O. Zariski [13] et exposées en [10]

I.- Soit R un anneau commutatif, muni d'un élément-unité et noethérien (condition de chaîne maximale pour les idéaux). Soit q un idéal primaire d'idéal premier associé p (on dira en abrégé que q est p-primaire). Il revient au même de dire que l'on a les 3 conditions imposées aux deux idéaux donnés q et p : α) $q \subset p$, β) $ab \in q$ et $a \notin q$ entraîne $b \in p$, γ) $x^n \in q$ un entier n positif entraîne $x \in p$. R étant noethérien on a en plus $q \supset p^u$ pour un u .

Comme tout idéal I primaire compris entre p et q est p-primaire (on a $p \supset I \supset p^n$) les chaînes d'idéaux primaires entre p et q seront des chaînes d'idéaux p-primaires. L'existence de telles chaînes maximales se fera en deux temps : 1°) Passage de R à l'anneau R^* généralisé des quotients de R relativement à p ; 2°) Passage de l'anneau local R^* à un anneau d'Artin primaire A.

1°) R ayant en général des diviseurs de 0 il faut considérer une première réduction modulo un noyau N ([3] et [9]). Soit N l'ensemble des $y \in R$

tels que $cy = 0$ pour un $c \notin p$. C'est bien un idéal (p est premier) et on a $N \subset p$. De plus tout idéal p-primaire Q contient N : $x \in N$ entraîne pour un $c \notin p$ $cx = 0 \in Q$ donc $x \in Q$. Alors $p' = p/N$ contient tous les diviseurs de 0 de $R' = R/N$. Désignons par u' la classe modulo N de tout $u \in R$. Si on avait $y, z \in R$ avec $y', z' \neq 0'$ et $y'z' = 0'$ alors par exemple $y' \notin p'$, $y \notin p$, $yz \in N$ donc pour un $x \notin p$ $xyz = 0$ et comme $xy \notin p$, $z \in N$ d'où $z' = 0$ ce qui est contradictoire. Il est à noter que, sauf si R n'a pas de diviseur de 0 $(R = R')$, R' n'est pas un suranneau de R.

Soit alors R^* l'anneau ordinaire des quotients de R' relativement à l'idéal premier p' (anneau généralisé des quotients de R relativement à p). C'est un anneau local d'idéal maximum $p^* = R^*p'$. Posons $q^* = R^*q'$ avec $q' = q/N$. On vérifie au moyen des conditions α) β) γ) qu'il y a correspondance biunivoque entre les chaînes d'idéaux primaires de q à p en R et les chaînes d'idéaux primaires de q' à p' en R', puis entre ces chaînes et les chaînes de suridéaux primaires de q^* en R^*.

2°) L'anneau $A = R^*/q^*$ est alors un anneau d'Artin primaire (il est noethérien et l'idéal nul est primaire et a pour radical l'idéal maximum). Il y a correspondance biunivoque entre les chaînes d'idéaux primaires contenant q^* en R^* et les chaînes d'idéaux quelconques A.

On sait (voir par exemple la IV° partie) qu'il y a en A des chaînes maximales d'idéaux et de longueur toujours la même ℓ. Il en est de même pour les chaînes considérées en R^*, R' et R. Ce nombre ℓ s'appelle longueur de l'idéal primaire q ([10] , II , 4).

II.- Reprenons une chaîne maximale C de la première partie, en supposant que p soit maximal en R. Soit $p = q_1 \supset q_2 \supset \dots \supset q_n = q$ une telle chaîne et soit I un idéal de nature arbitraire satisfaisant à : $q_k \supset I \supset q_{k+1}$ $(k \leqslant n-1)$. Il existe un entier u (dépendant de k) tel que $q_{k+1} \supset p^u$ donc on a $I \supset p^u$ et I est p-primaire. Or C est maximale, donc on a soit $I = q_k$ soit $I = q_{k+1}$. On dira que q_k couvre q_{k+1}.

DÉFINITION : R étant un anneau commutatif muni d'un élément-unité, on dit que l'idéal J couvre l'idéal I si on a $J \supset I$ et s'il n'existe aucun idéal strictement compris entre I et J.

En particulier les idéaux minimaux sont ceux qui couvrent l'idéal nul. Etant donné un idéal $I \neq R$ fixé, on va voir à quelle condition il existe des idéaux J

qui le couvrent et trouver tous ces idéaux.

Si $x \in J - I$, J étant l'un d'eux, on a $I \subsetneq I + Rx \subset J$ donc $J = I + Rx$
Tout idéal de la forme $I + Rax$, avec $ax \notin I$ et égale $I + Rx$ et cela suffit car tout idéal compris entre I et $I + Rx$ $x \notin I$, contient des éléments de la forme $i + ax$ avec $i \in I$, ($ax \notin I$) donc contient $I + Rax$. Ceci équivaut à dire que $x \in I + Rax$ quel que soit a satisfaisant à $ax \notin I$, ou encore que pour tout a tel que $ax \notin I$ il existe un $y \in R$ tel que $x(1 - ay) \in I$. Finalement la condition est que $R/(I : Rx)$ soit un corps, c'est-à-dire que $I : Rx$ soit un idéal maximal M de R .

On en déduit de $I : Rx = M$ que $x \in I : M - I$. Si réciproquement pour un certain idéal maximal M' on a $I : M' \neq I$, soit $u \in I : M' - I$ on a $Ru \subset I : M$, $uM \subset I$, $M \subset I : Ru$ et comme $u \notin I$, $I : Ru \neq R$ donc $I : Ru = M$, M étant maximal. On a le :

<u>THÉORÈME 1</u>.- I étant un idéal $\neq R$ de l'anneau commutatif à élément-unité R , la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un idéal J qui couvre I est qu'il existe un idéal maximal M satisfaisant à la condition $I : M \neq I$. Les idéaux J sont alors les idéaux $I + Rx$ où $x \in I : M - I$.

<u>DÉFINITION</u> : On dira qu'un idéal I d'un anneau R est quasi uniforme s'il existe en R un idéal maximal M tel que l'on ait $I : M \neq I$.

Cette définition sera justifiée dans le cas où R est noethérien (c'est-à-dire satisfait à la condition maximale pour les idéaux). Par exemple pour qu'il existe pour R des idéaux minimaux il faut et il suffit que l'idéal nul soit quasi uniforme.

On voit immédiatement qu'<u>un idéal premier p n'est couvert par aucun idéal, s'il n'est pas maximal</u>. En effet quel que soit l'idéal maximal M contenant p si on avait $u \in p : M - p$ et $v \in M - p$ on aurait $uv \in p$. Si p est maximal il est couvert par R . <u>Lorsque R n'a pas d'unité</u> , on est seulement assuré que $I : Rx$ est premier dans ce qui précède (cf. Mori) . Bornons-nous au cas où $I = (0)$. Si $x\,y \in 0 : I$ et $x \notin 0 : I$, on a $xyI \subsetneq xI \subset I$ donc $xI = I$, $yI = (0)$ et $y \in 0 : I$. <u>Donc si I est minimal pour R , $0 : I$ est premier</u>. L'exemple suivant qui sert classiquement à montrer qu'un anneau sans élément-unité n'a pas toujours d'idéal maximal, va nous montrer que $0 : I$ peut être premier sans être maximal.

Prenons pour R l'anneau de carré nul dont le groupe additif est constitué par les restes modulo un des fractions a/p^n où p est un nombre premier fixé,

a et n des entiers naturels éventuellement nuls. Les idéaux de R sont les sous-groupes du groupe précédent. Soit u/p^n un élément fixé de R et v/p^n un autre, u seul étant supposé non divisible par p, v étant quelconque. Il existe des entiers r et s tels que $ru + sp^n = v$, donc que: $r\alpha/p^n + \beta = v/p^n$. Donc le groupe engendré additivement par u/p^n est l'ensemble G_n des W/p^n modulo un, avec n fixé et W quelconque. Finalement les sous-groupes sont les G_n et on a $G_0 = (0) \subset G_1 \subset \dots \subset G_n \subset \dots$ il y a un seul idéal minimal $G_1 = \{\text{ensemble des } a/p \text{ modulo un}\}$ et $(0) : G_1 = (0) = G_0$ qui est bien premier mais non maximal.

THÉORÈME 2.- Si J couvre I, J/I est un corps ou un anneau de carré nul (cf. Sono, p. 224) selon que $J^2 \not\subset I$ ou $J^2 \subset I$, ou encore que $J \not\subset M$ ou $J \subset M$, M étant l'idéal maximal attaché à I et J. On se ramène au cas où $I = (0)$ par passage à R/I. Un minimal J est $J = Rx$ avec $x \in (0) : M - (0)$. Si on a $x \in M = (0) : Rx$ on a $x^2 = 0$ donc $J^2 = 0$. Si on a $x \notin M$, on a $x^2 \neq 0$, $J^2 \neq 0$. Alors pour tout $j = rx$ et tout $j' = r'x \neq 0$ $(r, r' \in R)$ on peut trouver un $j'' = r''x$ $(r'' \in R)$ tel que $j''j' = j$ ou $r'x.r''x - rx = 0$ ou $r'x.r'' - r \in (0) : Rx = M$ et ceci est possible car R/M est un corps et $r'x \notin M$ (sinon $r'x \in M$, $x \notin M$ donnerait $r' \in M$, $r' \in 0 : Rx$, $r'x = 0$).

On va donner les idéaux minimaux qui sont des corps d'une autre manière. On utilisera le lemme :

LEMME.- Si M est un idéal maximal tel que $(0)M \neq (0)$ et si L est le radical de Jacobson de R (intersection des idéaux maximaux) il y a équivalence entre les quatre conditions :

a) $(0 : M)^2 = (0)$, b) $0 : M \subset L$, c) $0 : M \subset M$, d) $0 : M \cap M \neq (0)$

On sait que L contient l'ensemble des idéaux nilpotents (Jacobson III) donc a) entraîne b). Comme $L \subset M$, b) entraîne c). Si c) est réalisé, on a $[(0) : M]^2 \subset [(0) : M)]. M = (0)$ donc a). Enfin c) et d) sont équivalents car c) entraîne $(0) : M \cap M = (0) : M \neq (0)$. Enfin si d) est réalisé, il existe un $u \neq 0$ de $[(0) : M] \cap M$. Alors pour tout $v \in (0) : M$ on a $vM = (0)$ $vu = 0$, $v \in 0 : Ru = M$ donc $0 : M \subset M$ et c) est réalisé.

On déduit alors du théorème 2 et du lemme, le :

THÉORÈME 3.- Les idéaux minimaux à carrés nuls d'un anneau R sont tous les idéaux Rx où x parcourt toutes les intersections $[(0) : M] \cap M$ qui ne sont pas nulles pour un idéal maximal M convenable. Les idéaux minimaux qui sont des corps sont les Rx où $x \neq 0$ parcourt les quotients $(0) : M$ qui satisfont pour un idéal maximal convenable M à l'une des 4 conditions équivalentes :

$\left[(0) : M\right]^2 \neq (0)$; $(0) : M \not\subset L$; $(0) : M \not\subset M$; $\left[(0) : M\right] \cap M = (0)$ avec $(0) : M \neq (0)$; L désignant le radical de Jacobson de R .

Remarque : Si M maximal satisfait à $(0) : M \neq (0)$ tous les minimaux contenus en $(0) : M$ sont donc tous des corps où tous de carrés nuls.

<u>COROLLAIRE.- Si un idéal maximal M satisfait à la condition $\left[(0) : M\right]^2 \neq (0)$, l'idéal $(0) : M$ est minimal et c'est un corps.</u>

Soit en effet e l'unité d'un idéal minimal corps contenu en $(0) : M$. On a $e = e^2$ ou : $e(1 - e) = 0$ donc $1 - e \in (0) : Re = M$. Si on a un autre corps d'unité e' , on aurait $1 - e' \in M$ donc $e - e' \in M$, donc $e(e - e') \in \left[(0) : M\right] . M = (0)$ donc $e^2 = ee' = e$ et de même $ee' = e'$. Finalement $e = e'$, $Re = Re'$ et on a $Re = Re' = (0) : M$.

III.- On suppose maintenant en plus que R est noethérien. Quel que soit l'idéal $I_0 \neq R$ et l'idéal I contenant I_0 et différent, il existe au moins un J , couvert par I , tel que $I \supset J \supset I_0$. Dans le cas contraire il y aurait une chaîne infinie strictement croissante entre I_0 et I . Soit $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_p$ une décomposition primaire minimale (Q_i étant P_i-primaire) de I . On sait ([9] §1.7) que les P_i sont différents et déterminés et que les Q_j associés aux P_j minimaux parmi les P_i sont déterminés : Q_j est l'ensemble des $x \in R$ tels que $I : Rx \not\subset P_j$ (composants isolés). On utilisera deux lemmes :

<u>LEMME 1</u>.- Si l'idéal P-primaire Q est composant isolé de I , le quotient $Q : P$ est l'ensemble des $x \in R$ tels que $I : xP \not\subset P$ et aussi celui des $y \in R$ tels que $Q : yP \not\subset P$.

En effet $v \in Q : P$ équivaut à $vP \subset Q$ donc à $vm_i \in Q$ pour $i = 1 , \ldots , h$ si $P = (m_1, \ldots , m_h)$. $Q : P$ est donc l'ensemble des v tels que $I : Rvm_i \not\subset P$ pour tout i . Mais comme $I : vP = \bigcap_i I : Rvm_i$ pour tout v , les idéaux premiers contenant $I : vP$ sont ceux qui contiennent l'un des $I : Rvm_i$, d'où la proposition.

<u>LEMME 2</u>.- Pour qu'un composant P-primaire isolé de I soit confondu avec P il faut et il suffit que $I : P \not\subset P$.

En effet $Q = P$ revient à écrire $Q : P = R$ donc que 1 appartient à la famille des v tels que $I : vP \not\subset P$.

<u>THÉORÈME 4</u>.- Pour qu'un idéal I d'un anneau noethérien R avec élément-unité puisse être couvert par des idéaux J , il faut et il suffit qu'un de ses

idéaux premiers essentiels soit maximal.

En effet $I : M \neq I$ pour un idéal maximal M équivaut à dire que M est contenu en un idéal premier essentiel de I (Van der Waerden, Mod. Alg. sect. 88 ou [9] § 1.9)

On obtient explicitement les idéaux J qui couvrent I au moyen de sa décomposition $Q_1 \cap \ldots \cap Q_r \cap \ldots \cap Q_s$, les idéaux $P_1, \ldots, P_r$ $(r \geq 1)$ étant maximaux, les éventuels $P_{r+1}, \ldots, P_s$ ne l'étant pas $(r \leq s)$. On a en effet $I : P_j = Q_1 \cap \ldots \cap Q_{j-1} \cap Q_j : P_j \cap Q_{j+1} \cap \ldots \cap Q_r \cap \ldots \cap Q_s$ pour tout P_j $(j \leq r)$. Alors J est du type $I + Rx$ où x parcourt les r différences $I : P_j - I$ ainsi explicitées.

Ceux des idéaux J pour lesquels J/I est un corps sont donnés par le :

THÉORÈME 5.- Les idéaux J qui couvrent I et donnent pour le facteur J/I un corps sont tous les idéaux :

$$J = Q_1 \cap \ldots \cap Q_{j-1} \cap Q_j : P_j \cap Q_{j+1} \cap \ldots \cap Q_s$$

pour lequel P_j est un idéal essentiel isolé de I confondu avec le composant Q_j associé.

C'est une conséquence immédiate du théorème 3 et du lemme 2 .

IV.- Supposons en outre que R est un anneau d'Artin (toute chaîne d'idéaux différents est finie). Alors pour tout triplet d'idéaux différents emboités $I \subset J \subset K$ il existe des idéaux I' et J' tels que $I \subset I' \subset J \subset J' \subset K$ et que J couvre I' et J' couvre J .

Si un anneau d'Artin a des idéaux propres il possède des idéaux minimaux : s'il n'en a pas c'est un corps (voir thèse Samuel). En un tel anneau le radical Jacobson L (intersection des idéaux maximaux qui sont en nombre fini et sont tous les idéaux premiers) coincide avec le radical nilpotent (ensemble des nilpotents): voir aussi [6] . On dira que R est semi-simple lorsque $L = (0)$. Le théorème 3 redonne facilement le fait que si tout idéal premier est maximal un anneau noethérien R est anneau d'Artin : tout idéal devenant quasi-uniforme peut être couvert. D'où des chaînes croissantes $(0) \subset I_0 \subset I_1 \subset \ldots$ qui sont finies R étant noethérien. Alors R est anneau d'Artin d'après le théorème de Jordan-Hölder. En R tous les composants de l'idéal nul sont isolés et déterminés. Le théorème 5 se simplifie et on a, en se bornant à prendre $I = (0)$:

THÉORÈME 6 : Les idéaux minimaux corps d'un anneau d'Artin sont les quotients $(0) : M$ où M est tout idéal maximal confondu avec le composant correspondant de (0) . Il est aussi l'intersection des composants de (0) non attachés à M .

Soit en effet $M_1, \dots, M_n$ les n idéaux premiers-maximaux de R, M_n étant un composant de (0) par exemple, et $C = (0) : M_n$ le corps correspondant D'après le théorème 3, $C \not\subset M_n$ dont C a $p \leqslant n-1$ composant $Q_1, \dots, Q_p$. Il existe des idéaux primaires ne contenant pas C (sinon (0) ne serait pas l'intersection de tous les idéaux primaires de R), soit Q l'un d'eux. On a $Q \cap C = (0)$, C étant minimal et donc $(0) = Q_1 \cap \dots \cap Q_p \cap Q$. On a donc $p + 1 = n$ et les $Q_1, \dots, Q_{n-1}$ sont les composants de (0) attachés à $M_1, \dots, M_{n-1}$ et déterminés uniquement car on a les égalités : $Q = M_n$ et $0 : M_n = Q_1 : M_n \cap \dots \cap Q_{n-1} : M_n \cap M_n : M_n = Q_1 \cap \dots \cap Q_{n-1}$.

COROLLAIRE .- Pour qu'un anneau d'Artin soit semi-simple il faut et il suffit que tous ses idéaux minimaux soient des corps. Cela revient à écrire (0) comme intersection d'idéaux maximaux et alors le radical est (0) lui-même.

V.- On appellera idéal quasi-maximal (en abrégé q.m.) tout idéal Q tel que tout idéal premier P contenant Q soit maximal en R. Cette notion est valable pour un anneau R quelconque (commutatif, avec unité). Si R est noethérien les idéaux q.m. sont les idéaux I dont tous les idéaux premiers essentiels sont maximaux : ce sont les I tels que R/I soit un anneau d'Artin ou ce qui revient au même, les I tels que toute chaîne de surидéaux différents de I soit finie. En particulier les idéaux uniformes sont de tels idéaux q.m. et notamment les idéaux maximaux. On déduit de IV que les anneaux d'Artin sont les anneaux noethériens pour lesquels tout idéal est q.m.

On appelera radical nilpotent de I (rad. I) l'ensemble des x dont une puissance appartient à I : c'est l'intersection des idéaux premiers contenant I (démonstration pour $I = (0)$ en [1], passer ensuite au quotient par I). Lorsque R est noethérien on a pour un s minimum $(\text{rad. } I)^s \subset I$ (cf. [9], § 1.9) : s est l'exposant de I.

On appellera radical de Jacobson de I l'intersection $r_j(I)$ des suridéaux maximaux de I.

On a les propositions immédiates pour R quelconque :

a) Tout suridéal d'un idéal q.m. est lui-même q.m. Une somme d'idéaux q.m., le quotient d'un idéal q.m. par un idéal est q.m.

b) Pour que I soit q.m., il faut et il suffit que rad I le soit : car il y a identité entre les idéaux premiers contenant I et ceux qui contiennent rad I.

c) Un produit fini d'idéaux U_i q.m. $U = U_1 \dots U_n$ est q.m. (tout premier P contenant U contient un des U_i). Une interjection finie d'idéaux q.m. est q.m. , car elle contient le produit. Ceci sera utilisé pour une certaine topologie en VI .

Lorsque R est supposé noethérien on a les propositions :

d) Pour que I soit q.m., il faut et il suffit qu'il contienne un produit fini de puissances d'idéaux maximaux :
Si I est q.m. et si rad $I = M_1 \dots M_n$ on a $I \supset (M_1 \dots M_n)^s$. Si on a $I \supset M_1^{\alpha_1} \dots M_n^{\alpha_n}$ I est q.m. d'après a) .

e) Pour que I soit q.m., il faut et il suffit qu'il soit contenu en un nombre fini d'idéaux maximaux et que rad $I = r_j(I)$, et pour que $r_j(I)$ soit q.m., il faut et il suffit qu'il y ait un nombre fini de surideaux maximaux pour I .

Cette dernière proposition est évidente. Enfin si I est q.m., on a bien rad $I = r_j(I)$ et comme rad I est q.m. $r_j(I)$ aussi et I est contenu en un nombre fini d'idéaux maximaux. Si inversement on a rad $I = r_j(I)$ et si I est compris en un nombre fini d'idéaux maximaux $r_j(I)$ donc rad I , donc I sont q.m.

f) L'intersection L d'une famille (L_i) d'idéaux q.m. telle qu'il y ait un nombre fini d'idéaux maximaux contenant chacun au moins l'un d'eux est elle-même q.m. si et seulement si les exposants des L_i sont bornés.

Si la condition est réalisée on a rad $L \subset \bigcap_i$ rad L_i et inversement si $x \in$ rad L_i pour tout i , on a pour un s fini $x^s \in L_i$ pour tout i , donc $x^s \in L$ donc $x \in$ rad L . Donc rad $L = \bigcap_i$ rad L_i et rad L est q.m. donc L . La réciproque sera une conséquence de :

g) Si une famille L_i d'idéaux q.m. a une interjection I q.m. les exposants des L_i sont bornés :
En effet on a d'après d) : $L \supset M_1^{\alpha} \dots M_n^{\alpha}$. Les surideaux maximaux des L_i sont parmi $M_1, \dots, M_n$ donc les exposants des L_i sont inférieurs ou égaux à α , exposant de L .

h) La condition nécessaire et suffisante pour que toute intersection d'idéaux q.m. soit q.m. est que R soit anneau d'Artin. C'est suffisant. C'est nécessaire, car si l'intersection de tous les idéaux maximaux doit être q.m. Cette intersection est (0) d'après ce qui va suivre donc (0) est q.m. et R est anneau d'Artin.

i) THÉORÈME 7.- L'intersection des suridéaux quasi-maximaux d'un idéal $I \neq R$ d'un anneau noethérien R est I lui-même.

LEMME 1.- (Cf. [9] ch.III p.49 , th.1) : L'intersection $B = \bigcap_1^\infty A^k$ des puissances d'un idéal A est l'ensemble des x tels que $x = ax$ pour un $a \in A$.

En effet si $x = ax$ on a $x = a^2x = a^3x$ donc $x \in B$. Si réciproquement $x \in B$, soit $AB = q_1 \cap \dots \cap q_r$ une décomposition primaire normale de AB en idéaux q_i p_i-primaires. Pour tout i on a $AB \subset q_i$ donc soit $B \subset Q_i$, soit $A \subset P_i$ ou $Q_i \supset P_i^n \supset A^n \supset B$ donc on a $B \subset Q_i$ et finalement $B \subset AB$. Si $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de B on a $b_i = a_{i_1}b_1 + \dots + a_{i_n}b_n$ $(a_{ij} \in A)$ et pour tout r : $\sum_r (\delta_i r - a_i r)br = 0$ $(\delta_i r = 0$ si $i \neq r$ et $\delta_{ii} = 1)$. Si $\Delta = \det(\delta_i r - a_i r)$ on a pour tout r, $\Delta br = 0$ donc $\Delta B = 0$ mais $\Delta = 1 - a$ $(a \in A)$. Ainsi $x \in B$ entraîne $x(1 - a) = 0$ pour un $a \in A$, C.Q.F.D

LEMME 2.- Si M est un idéal maximal de R, $\bigcap_1^\infty M^k$ est l'ensemble des $x \in R$ tels que $(0) : Rx \not\subset M$.

En effet $x(1 - m) = 0$ avec $m \in M$ entraîne $1 - m \in (0) : Rx$ avec $1 - m \notin M$. Réciproquement si $(0) : Rx \not\subset M$, il existe un u avec $u \notin M$ et $u \in (0) : Rx$. Il existe alors un $v \in R$ et un $m \in M$ tel que $uv + m = 1$ d'où $(1 - m)x = uvx = 0$ donc $x \in \bigcap_1^\infty M^k$.

Pour démontrer le théorème 7 on peut se ramener au cas où $I = (0)$ par passage à R/I : les idéaux maximaux M' de R/I et leurs puissances correspondent biunivoquement aux idéaux maximaux M et à leurs puissances qui contiennet I, au moyen de l'égalité $M' = M/I$.

Si z appartient donc à l'intersection de tous les idéaux q.m. de I, R ayant une unité $(0) : Rz$ ne peut appartenir à aucun idéal maximal (Krull) donc vaut R et $z=0$.

Il est à noter que I n'est l'intersection d'un nombre fini de ses suridéaux q.m. si et seulement si il est lui-même q.m.

VI.- Soit A un anneau noethérien avec élément-unité et $\{Q_\alpha\}$ la famille des idéaux quasi-maximaux. Soit T la topologie sur A où les $\{Q_\alpha\}$ constituent un système fondamental de voisinages de 0. On vérifie les 4 axiomes usuels ([2] ch. I) notamment grâce à la propriété c) d'interjection finie. On vérifie que l'addition est continue $(x - x_0 + y - y_0 \in Q_\alpha$ dès que $x - x_0$ et $y - y_0 \in Q_\alpha)$ et également la multiplication $(xy - x_0y_0 = x(y - y_0) + y_0(x - x_0) \in Q_\alpha$ dès que $x - x_0$ et $y - y_0 \in Q_\alpha)$ d'où un anneau topologique séparé au sens de Hausdorff (axiome T_2 d'Alexandrof-Hopf) noté encore A .

La propriété d) montre que l'on obtient la même topologie en prenant les produits de puissances d'idéaux maximaux comme voisinages fondamentaux de 0 .

En particulier si A possède un nombre fini d'idéaux maximaux on retrouve la topologie usuelle Z des anneaux semi-locaux topologisés par les puissances du radical ([10] et [13]).

Lorsque A a une infinité d'idéaux maximaux T et Z sont différentes car le radical de Jacobson n'étant pas q.m. ne saurait contenir aucun voisinage q.m. selon T , d'après a) . Si A' et A'' sont les complétés de A pour T et Z , on a alors $A'' \subset A'$, avec $A'' \neq A'$ lorsque A a une infinité d'idéaux maximaux.

PROPRIÉTÉS DE LA TOPOLOGIE T :

a/ Tout idéal de A est fermé en A : l'adhérence de l'idéal I est l'intersection des $I + Q_\alpha$. Or la famille des $I + Q_\alpha$ est identique à la famille Q_p des surideaux q.m. de I . D'après le théorème 7 on a $\bigcap Q_s = I$.

b/ Il y a correspondance biunivoque entre les idéaux I de A et les idéaux I' de A' selon la loi : $I' = A'I$, $I = I' \cap A$. On dira que I et I' sont associés.

Pour tout I on a $I \subset A'I \cap A$ (A' a une unité comme A). Soit $x \in A'I \cap A$, on a $x = \sum_{p=1}^{k} \alpha'_p \, i_p$ avec les $i_p \in I$, $\alpha'_p \in A'$. Mais $\alpha'_p = \lim_{n\infty} \alpha_{p,n}$ avec des $\alpha_{p,n} \in A$. Or $\alpha_{p,n} \, i_p \in I$ donc la limite $\alpha'_p i_p \in I$ I étant fermé donc $x \in I$. On a donc $I = A'I \cap A$. Les idéaux $A'I$ représentent bien tous les idéaux de A' car soit I' un idéal de A' , et soit $I = I' \cap A$, c'est un idéal et on a : $A'I = A'I' \cap A'A = I'$.

c/ THÉORÈME 8.- Le complété A' de A est un anneau noethérien.

Il y a en effet correspondance biunivoque entre les chaînes d'idéaux en A et en A' .

d/ Deux idéaux associés ont une base commune en A : si on a : $I = A_{i_1} + \dots + A_{i_n}$ $(i_k \in A)$ on a $I' = A'I = A'A_{i_1} + \dots = A'_{i_1} + \dots$ car $A'A = A$.

e/ De deux idéaux I et I' associés, si l'un est quasi uniforme ou quasi-maximal, l'autre l'est également.

En effet b/ introduit une correspondance biunivoque entre les idéaux uniformes de A et de A' : les puissances d'idéaux maximaux se correspondant et A et A' étant noethériens.

RÉFÉRENCES.

[1] - ARTIN, E. - Algebraic Numbers and Algebraic Functions, 1951, Cours multigraphié, Ch. 11, § 1 .

[2] - BOURBAKI - Topologie générale, Ch. I , II et III .

[3] - Mme M.-L. DUBREIL-JACOTIN et P. DUBREIL - Divers types d'anneaux intervenant en géométrie algébrique. Colloque de Liège (1949), Masson-Thone (1950)

[4] - JACOBSON - Theory of Rings. Math. Surveys, 1943

[5] - JACOBSON - Lectures in abstract Algebra, 1951

[6] - JACOBSON - Radical and semi-simplicity for arbitrary Rings. Amer. J. of Math., 1945

[7] - KRULL - Ideal Theorie (Berlin, 1935), Ch. I

[8] - MORI, S. - Zusammenhang zwischen Primidealen und Minimalidealen, Journ. Sc. Hiroshima, 1930, p.77

[9] - NORTHCOTT - Ideal Theory. Cambridge Tracts, 1953

[10] - SAMUEL Paul - Algèbre locale. Mém. Sc. math., 1953

[11] - SONO, M. - On Congruences. Mem. Coll. Sc. Tokyo, 4 articles (1916 à 1919)

[12] - VAN DER WAERDEN - On Hilbert's Function, series of composition of ideals and generalisation of the theorem of Bezout. Proc. Kon. Akad. Amsterdam, Band 31, 1928.

[13] - ZARISKI, O. Generalised semi-local Rings. Summa Brasil. Math., 1, n° 8, p. 169-195 (1946).
