SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

PAUL JAFFARD

**La théorie des idéaux d'Artin-Prüfer-Lorenzen**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 5-6 (1951-1953), exp. nº 3, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1951-1953__5-6__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire A. CHÂTELET et P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
THÉORIE DES IDÉAUX
Années 1951-1953

-:-:-:-

Exposé n° 3

# III. LA THÉORIE DES IDÉAUX D'ARTIN-PRÜFER-LORENZEN

par Paul JAFFARD

Cette théorie généralise à un groupe abélien préordonné filtrant la théorie des idéaux fractionnaires de Dedekind. Elle retrouve des résultats importants de la théorie classique des idéaux, (en particulier la théorie de la décomposition de Noether), et elle est un des principaux outils dans l'étude de la structure des groupes ordonnés (théorie de Lorenzen).

## 1. Groupes ordonnés et groupes préordonnés.

Tous les groupes intervenant dans cet exposé sont abéliens. Ils sont écrits multiplicativement.

Un groupe $\mathfrak{g}$ sera dit préordonné si on a défini sur $\mathfrak{g}$ une relation de préordre qui soit invariante par les translations, c'est-à-dire une relation $a \leqslant b$ vérifiant :

$a \leqslant a$

$a \leqslant b$ et $b \leqslant c \rightarrow a \leqslant c$

$a \leqslant b \rightarrow ax \leqslant bx$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ .

Si on désigne par 1 l'élément unité du groupe $\mathfrak{g}$ on dit que l'élément $x$ de est entier si $1 \leqslant x$ . On voit que l'ensemble $\mathfrak{o}$ des entiers forme un sous-semi-groupe contenant 1 . Réciproquement la donnée d'un sous-semi-groupe contenant 1 permet de définir sans ambiguité (grâce à la relation $a \leqslant b \rightleftarrows 1 \leqslant ba^{-1}$) sur $\mathfrak{g}$ une structure de groupe préordonné.

Le groupe préordonné $\mathfrak{g}$ est dit filtrant si pour tout couple $a$ , $b \in \mathfrak{g}$ il existe $x \in \mathfrak{g}$ avec $a \leqslant x$ , $b \leqslant x$ . La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, est que le groupe $\mathfrak{g}$ soit engendré par l'ensemble $\mathfrak{o}$ des entiers, ou encore que $\mathfrak{g}$ soit le groupe des quotients du semi-groupe $\mathfrak{o}$ .

En effet, si $\mathcal{G}$ est filtrant, et si $x \in \mathcal{G}$ , $\exists$ $a \in \mathcal{G}$ avec $x , 1 \leq a$ et $x = a(ax^{-1})^{-1}$ avec $a , ax^{-1} \in \mathcal{O}$ ; $\mathcal{G}$ est bien groupe des quotients de $\mathcal{O}$ . Réciproquement, si $\mathcal{G}$ est groupe des quotients de $\mathcal{O}$ , et si $a , b \in \mathcal{G}$ , on peut trouver des entiers $x$ et $y$ tels que $ab^{-1} = xy^{-1}$ . Soit alors $z = ay = bx$ . On a $z \geq a , b$ et le groupe est bien filtrant.

Le groupe préordonné $\mathcal{G}$ est dit <u>ordonné</u> si la relation de préordre qui y est définie est une relation d'ordre, c'est-à-dire si $a \leq b$ et $b \geq a$ entraînent $a = b$ .

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}^{-1} = \{1\}$ . $\mathcal{G}$ étant un groupe préordonné quelconque, l'ensemble $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}^{-1} = \mathcal{S}$ formé des éléments $x$ tels que $1 \leq x$ et $x \leq 1$ est un sous-groupe. On l'appelle sous-groupe des éléments inversibles de $\mathcal{G}$ ou encore, sous-groupe des <u>unités</u> de $\mathcal{G}$ .

On voit alors que la relation $a\mathcal{S} \leq b\mathcal{S} \rightleftarrows a \leq b$ permet de considérer le groupe quotient $\mathcal{G}/\mathcal{S} = G$ comme un groupe ordonné. $G$ est dit <u>groupe ordonné associé</u> au groupe préordonné $\mathcal{G}$ . L'ensemble $G_+$ des entiers de $G$ est l'image de l'ensemble des entiers de $\mathcal{G}$ par l'application canonique $\mathcal{G} \to G$ . Si $\mathcal{G}$ est filtrant, $G$ l'est aussi et réciproquement.

EXEMPLE. - $K$ est un corps commutatif, $A$ un ordre de $K$ (c'est-à-dire un sous-anneau de $K$ contenant $1$ , et tel que $K$ soit corps des quotients de $A$), $K^*$ (resp. $A^*$) l'ensemble des éléments non nuls de $K$ (resp. de $A$). $A^*$ permet de définir une structure de préordre sur le groupe multiplicatif $K^*$ . Le groupe ordonné associé $\Gamma = K^*/A^* \cap (A^*)^{-1}$ est dit le <u>groupe de divisibilité de</u> $K$ <u>par rapport à l'ordre</u> $A$ . Dans le cas où $\Gamma$ est totalement ordonné on voit que l'application $K^* \to \Gamma$ définit une <u>valuation</u> de $K$ (au sens de Krull). $A$ est dit dans ce cas <u>anneau de valuation</u>.

$G$ étant un groupe ordonné quelconque, deux éléments entiers $a$ et $b$ de $G$ seront dits <u>premiers entre eux</u> si $x \leq a , b$ entraîne $x \leq 1$ (ou encore si $\inf(a , b)$ existe et est égal à 1).

THÉORÈME 1. - $G$ <u>étant un groupe ordonné quelconque, si</u> $c$ <u>est premier à</u> $a$ <u>et à</u> $b$ , <u>il est premier au produit</u> $ab$ .

Soit $x \leq ab , c$ . Puisque $1 \leq a$ , on a $x \leq a$ . Or $x \leq ab , ac$ s'écrit $xa^{-1} \leq b , c$ , comme $b$ est premier à $c$ , $xa^{-1} \leq 1$ ou $x \leq a$ . Mais $x \leq a , c$ implique $x \leq 1$ . Donc $c$ est premier à $ab$ .

Un groupe ordonné G est dit réticulé si sa structure d'ordre est une structure de treillis.

THÉORÈME 2. - La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe ordonné filtrant G soit réticulé est que pour tout couple $(a , b)$ d'éléments entiers de G $\inf(a , b)$ existe.

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Si $x , y \in G$, on peut trouver des entiers $a , b , c$ tels que $x = ad^{-1}$ , $y = bd^{-1}$. On voit alors que

$$\inf(x , y) = (\inf(a , b))d^{-1}$$

et

$$\sup(x , y) = (\inf(x^{-1} , y^{-1}))^{-1} .$$

Si les groupes $G_\iota$ $(\iota \in I)$ sont des groupes totalement ordonnés et si G est la somme directe de ces groupes, la relation d'ordre sur G : $x \leq y \rightleftarrows$ pour tout $\iota \in I$, $x_\iota \leq y_\iota$ fait de G un groupe ordonné dit somme directe ordonnée des groupes $G_\iota$. On dit que le groupe ordonné G est décomposable ou factoriel s'il peut se représenter comme une somme directe ordonnée de groupes isomorphes à Z (groupe additif des entiers usuels).

THÉORÈME 3. - Pour que le groupe réticulé G soit décomposable, il faut et il suffit que toute suite décroissante d'éléments entiers de G n'ait qu'un nombre fini de termes distincts.

On voit facilement que cette condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante : soit $P = (p_\iota)_{\iota \in I}$ l'ensembles des éléments minimaux de $G_+$ (éléments non égaux à 1 qui ne sont strictement supérieur à aucun élément entier autre que 1). Soit $a \in G_+$. Définissons par récurrence une suite d'éléments entiers qui soit strictement décroissante :

On pose $a_1 = a$. $a_i$ étant défini, on arrête la suite si $a_i = 1$. Si $a_i \neq 1$ il existe d'après les hypothèses un certain élément minimal $b_i$ tel que $b_i \leq a_i$. On posera $a_{i+1} = a_i b_i^{-1}$. On a $a_i > a_{i+1} \geqslant 1$. Par hypothèse, il existe un certain nombre m tel que $a_n = 1$. $a = b_1 b_2 \dots b_{n-1}$ et tout entier a, non égal à 1, peut se mettre sous la forme d'un produit d'éléments entiers minimaux. Ecrivons $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ avec $i \neq j \rightarrow p_i \neq p_j$ (et peut-être certains exposants nuls). Montrons que cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière : soit $a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ et montrons que $\alpha_1 = \beta_1$.

Supposons par exemple $\beta_1 > \alpha_1$. On a :

$$b = p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} = p_1^{(\beta_1 - \alpha_1)} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n} .$$

On a $p_1 \leq b$ d'après la deuxième forme de $b$, mais $p_1$ étant premier à $p_2, \dots, p_n$ est premier à $b = p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ en vertu du théorème 1. Ceci contredit $p_1 \leq b$ donc on a $\alpha_1 = \beta_1$.

Une fois que l'on a montré l'unicité de cette décomposition on voit que tout élément $x \in G$ peut se mettre sous la forme $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ les exposants $\alpha_i$ étant des nombres entiers quelconques. On en déduit que le groupe $G$ est isomorphe à la somme directe ordonnée $\sum_{\iota \in I} Z_\iota$ où $Z_\iota$ est, quel que soit $\iota$, un groupe isomorphe au groupe additif ordonné des entiers usuels.

2. Systèmes de r-idéaux. Opérations dans ce système.

Soit $\mathfrak{g}$ un groupe préordonné filtrant, $\mathfrak{o}$ l'ensemble des entiers de $\mathfrak{g}$. On pose $x \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b} \rightleftarrows x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{a}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{g}$, on désigne par $\mathfrak{a}^{-1}$ l'ensemble $\mathfrak{o} : \mathfrak{a}$.

Le sous-ensemble $\mathfrak{a}$ est dit borné (inférieurement) si $\mathfrak{a}^{-1}$ n'est pas vide.

On dit que l'on a défini sur $\mathfrak{g}$ un système total de r-idéaux (resp. un système de r-idéaux finis) si on a défini une application $\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}_r$ des parties bornées inférieurement (resp. finies) de $\mathfrak{g}$ dans l'ensemble des parties de $\mathfrak{g}$ telle que :

1° $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_r$

2° $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}_r \longrightarrow \mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{b}_r$

3° Si $a \in \mathfrak{g}$, $(a)_r = a\,\mathfrak{o}$

4° $a\,\mathfrak{a}_r = (a\,\mathfrak{a})_r$

$\mathfrak{a}_r$ est dit le r-idéal engendré par $\mathfrak{a}$. Un r-idéal est dit fini s'il peut être engendré par un nombre fini d'éléments. Il est dit principal s'il peut être engendré par un seul élément. Si $\mathfrak{a}_r = (a)_r$ est principal on pose encore $\mathfrak{a}_r = (a)$ $(= a\,\mathfrak{o})$.

Un idéal est dit entier s'il est contenu dans $\mathfrak{o}$.

Les propriétés 1° et 2° montrent que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{b}_r$.

On voit de plus que si $\mathfrak{a}$ est borné, il en est de même de $\mathfrak{a}_r$ et que $(\mathfrak{a}_r)_r = \mathfrak{a}_r$.

Tout système de r-idéaux finis peut être prolongé en un système total de r-idéaux.

Si $\mathfrak{a}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{g}$ borné quelconque, on peut poser :
$\mathfrak{a}_{r_s} = \bigcup_{\mathfrak{n} \subset \mathfrak{a}} \mathfrak{n}_r$ où $\mathfrak{n}$ parcourt les sous-ensembles finis de $\mathfrak{a}$.

On définit un système total d'idéaux (dit le $r_s$-système), tel que si $\mathfrak{a}$ est fini $\mathfrak{a}_{r_s} = \mathfrak{a}_r$.

Supposons que l'on ait défini sur $\mathfrak{g}$ un système total de r-idéaux. On peut définir la somme et le produit de deux r-idéaux de la manière suivante :

$$\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_r$$

$$\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_r$$

Montrons que ces définitions sont intrinsèques, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}'_r$ et $\mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}'_r$ entraînent $(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_r = (\mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}')_r$ et $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_r = (\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}')_r$ :

1° $(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_r = (\mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}')_r$ :

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}_r \cup \mathfrak{b}_r \quad \text{entraîne} \quad (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_r \subset (\mathfrak{a}_r \cup \mathfrak{b}_r)_r$$

D'autre part $\mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{b}_r \subset (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_r$ entraîne $(\mathfrak{a}_r \cup \mathfrak{b}_r)_r \subset (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_r$. Par suite $(\mathfrak{a}_r \cup \mathfrak{b}_r)_r = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_r$. De même $(\mathfrak{a}'_r \cup \mathfrak{b}'_r) = (\mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}')_r$ et on a bien l'égalité voulue.

2° $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_r = (\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}')_r$

Montrons d'abord que $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_r = (\mathfrak{a}_r\,\mathfrak{b})_r$ :

$$\mathfrak{a}_r \mathfrak{b} = \bigcup_{b \in \mathfrak{b}} \mathfrak{a}_r\, b = \bigcup_{b \in \mathfrak{b}} (\mathfrak{a}\, b)_r \quad .$$

Donc

$$(\mathfrak{a}\, b)_r \subset (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_r \quad \text{implique} \quad \mathfrak{a}_r \mathfrak{b} \subset (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_r$$

et par suite

$$(\mathfrak{a}_r\, \mathfrak{b})_r \subset (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_r \, .$$

Or

$$\mathfrak{a}_r \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \text{ implique } (\mathfrak{a}_r \mathfrak{b})_r \supset (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_r .$$

On a donc

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_r = (\mathfrak{a}_r \mathfrak{b})_r .$$

En vertu de cette égalité

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_r = (\mathfrak{a}_r \mathfrak{b})_r = (\mathfrak{a}_r \mathfrak{b}_r)_r = (\mathfrak{a}'_r \mathfrak{b}'_r)_r = (\mathfrak{a}'\mathfrak{b}')_r$$

Si on a un système de r-idéaux finis comme on peut le plonger dans un système total de r-idéaux (par exemple celui des $r_s$-idéaux), on peut faire correspondre aux r-idéaux finis $\mathfrak{a}_r$ et $\mathfrak{b}_r$ des $r_s$-idéaux $\mathfrak{a}_{r_s} + \mathfrak{b}_{r_s}$ et $\mathfrak{a}_{r_s} \times \mathfrak{b}_{r_s}$. Puisque ces opérations sont intrinsèques, on peut supposer $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ finis, alors $\mathfrak{a}_{r_s} + \mathfrak{b}_{r_s}$ et $\mathfrak{a}_{r_s} \times \mathfrak{b}_{r_s}$ sont finis, donc appartiennent au système des r-idéaux finis dont on était parti. On peut donc sans ambiguité définir la somme et le produit dans un ensemble de r-idéaux finis.

On voit que ces opérations sont associatives et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

On voit d'autre part que si $\mathfrak{H} = \mathfrak{o} \cap \mathfrak{o}^{-1}$, $x \in \mathfrak{a}_r \rightarrow x\,\mathfrak{H} \subset \mathfrak{a}_r$. Par suite, les systèmes de r-idéaux sur $\mathfrak{g}$ correspondent biunivoquement à ceux définis sur le groupe ordonné associé G . Soit R l'ensemble des r-idéaux d'un système (système total ou système de r-idéaux finis). L'application qui, à chaque élément de G fait correspondre l'idéal principal engendré par cet élément est biunivoque. On peut donc considérer G comme plongé dans R . La relation d'ordre sur R :

$$\mathfrak{a}_r \geqslant \mathfrak{b}_r \rightleftarrows \mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{b}_r$$

(relation d'ordre opposée à l'inclusion) prolonge sur R la relation d'ordre de G . De plus, R <u>est semi-réticulé inférieurement</u> par rapport à cette relation d'ordre : On a en effet : $\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r = \inf(\mathfrak{a}_r , \mathfrak{b}_r)$ . La considération d'un système de r-idéaux sur $\mathfrak{g}$ permet de plonger G dans un monoïde semi-réticulé inférieurement. Réciproquement, si G est plongé dans un monoïde M semi-réticulé inférieurement, on peut définir ainsi un système d'idéaux sur G : pour $a_1 , \dots , a_n \in G$ on pose $(a_1 , \dots , a_n)_r \ni x \rightleftarrows x \geqslant \inf(a_1 , \dots , a_n)$ (dans M). On voit que cet ensemble de r-idéaux finis peut être également considéré comme plongé dans M .

Plus particulièrement, la considération d'un système total de r-idéaux permet de plonger G dans un monoïde complètement réticulé.

EXEMPLE. - Soient un corps $K$, $A$ un ordre de $K$, $\mathfrak{g} = K^*$ et $\mathfrak{o} = A^*$. L'ensemble des idéaux fractionnaire au sens ordinaire de $A$ ($\{0\}$ n'étant pas considéré comme un idéal) forme un système d'idéaux sur $\mathfrak{g}$. On appelle ces idéaux les <u>idéaux de Dedekind</u> et ce système le d-<u>système</u>. $\mathfrak{a}_d$ désignera l'idéal de Dedekind engendré par $\mathfrak{a}$.

Etant donnés deux systèmes totaux d'idéaux $r$ et $r'$, on dit que le r-système est plus fin que le r'-système si tout r'-idéal est un r-idéal. Parmi tous les systèmes totaux d'idéaux il en existe un plus fin que tous les autres, le s-système, et un moins fin que tous les autres, le v-système. Ils sont ainsi définis :

$$\mathfrak{a}_s = \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} (a) \qquad \mathfrak{a}_v = \bigcap_{(a) \supset \mathfrak{a}} (a)$$

pour tout r-système on a donc

$$\mathfrak{a}_s \subset \mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{a}_v \ .$$

THÉORÈME 4. - <u>Si</u> $\mathfrak{a}$ <u>est borné inférieurement le</u> v-<u>idéal engendré par</u> $\mathfrak{a}$ <u>est</u> $\mathfrak{a}_v = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = (\mathfrak{o} : (\mathfrak{o} : \mathfrak{a}))$. <u>Les</u> v-<u>idéaux sont les sous-ensembles de</u> $\mathfrak{g}$ <u>de la forme</u> $\mathfrak{b}^{-1}$ ($\mathfrak{b}$ <u>étant borné quelconque</u>).

On voit que :

(1) $$(a) \supset \mathfrak{a} \rightleftarrows a^{-1} \in \mathfrak{a}^{-1} \ .$$

Soit donc $x \in (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ et $a$ tel que $(a) \supset \mathfrak{a}$. (1) montre que $a^{-1} \subset \mathfrak{a}^{-1}$ donc $xa^{-1} \in \mathfrak{o}$ ou $x \in (a)$. Par suite $x \in \mathfrak{a}_v$ et $(\mathfrak{a}^{-1})^{-1} \subset \mathfrak{a}_v$.

Réciproquement soit $x \in \mathfrak{a}_v$. Si $y \in \mathfrak{a}^{-1}$, (1) montre que $(y^{-1}) \supset \mathfrak{a}$, donc $(y^{-1}) \ni x$ ou $xy \in \mathfrak{o}$. Par suite $x \in (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ et $\mathfrak{a}_v \subset (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$. On a bien $\mathfrak{a}_v = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$.

Par suite, tout v-idéal est bien de la forme $\mathfrak{b}^{-1}$.

Réciproquement, soit un ensemble $\mathfrak{b}^{-1}$ non vide. Soit $x \notin \mathfrak{b}^{-1}$. $\exists\ b \in \mathfrak{b}$ avec $xb \notin \mathfrak{o}$ ou $x \notin (b^{-1})$. Or $b\,\mathfrak{b}^{-1} \subset \mathfrak{o}$ implique $\mathfrak{b}^{-1} \subset (b^{-1})$. Donc, d'après la définition des v-idéaux, $x \notin (\mathfrak{b}^{-1})_v$. D'après la relation $\mathfrak{b}^{-1} \subset (\mathfrak{b}^{-1})_v$, on a bien $(\mathfrak{b}^{-1})_v = \mathfrak{b}^{-1}$. Ceci montre que dans le cas où $\mathfrak{g}$ est défini à partir d'un corps et d'un ordre de ce corps, on retrouve bien les v-idéaux tels qu'ils avaient été définis par VAN DER WAERDEN et ARTIN.

3. Propriétés particulières des systèmes de r-idéaux.

Soit un système total de r-idéaux défini sur le groupe préordonné $\mathfrak{g}$ . On dira que ce système vérifie la propriété :

$\alpha$-totale si chaque r-idéal est principal ($\mathfrak{g}$ (resp. $\Diamond$) est alors dit totalement r-principal)

$\beta$-totale si les r-idéaux forment un groupe multiplicatif ($\mathfrak{g}$ (resp. $\Diamond$) est dit alors vérifier le théorème du r-groupe total).

$\gamma$-totale si les r-idéaux forment un semi-groupe, c'est-à-dire si

$$\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{b}_r = \mathfrak{a}_r \times \mathfrak{c}_r \rightarrow \mathfrak{b}_r = \mathfrak{c}_r \,. \quad (\mathfrak{g} \text{ (resp. } \Diamond)$$

est dit alors vérifier le théorème du r-groupe total).

$\delta$-totale si pour tout r-idéal on a $\mathfrak{a}_r : \mathfrak{a}_r \subset (1)$ . ($\mathfrak{g}$ (resp. $\Diamond$) est dit alors totalement r-clos).

De même on dit que le r-système vérifie la propriété :

$\alpha$ si chaque r-idéal fini est principal ($\mathfrak{g}$ (resp. $\Diamond$) est alors dit r-principal).

$\beta$ si les r-idéaux finis forment un groupe ($\mathfrak{g}$ (resp. $\Diamond$) est alors dit vérifier le théorème du r-groupe).

$\gamma$ si les r-idéaux finis forment un semi-groupe ($\mathfrak{g}$ (resp. $\Diamond$) est alors dit vérifier le théorème du r-semi-groupe).

$\delta$ si pour tout r-idéal fini $\mathfrak{a}_r$ on a $\mathfrak{a}_r : \mathfrak{a}_r \subset (1)$ . ($\mathfrak{g}$ (resp. $\Diamond$) est dit alors r-clos).

Remarquons que si un système de r-idéaux finis (resp. un système total de r-idéaux) vérifie la propriété $\beta$ , en vertu du théorème 2 ces idéaux forment un groupe réticulé.

On voit que les propriétés $\alpha$ , $\gamma$ et $\delta$ (resp. totales) ne seraient pas affaiblies si dans leurs définitions on ne considérait que des idéaux entiers.

THÉORÈME 5. - *La propriété* $\gamma$ (resp. $\gamma$ *-totale) est équivalente à : étant donnés trois r-idéaux finis* (resp. *trois r-idéaux quelconques*) $\mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{b}_r$ *et* $\mathfrak{c}_r$, $\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{c}_r \supset \mathfrak{b}_r \times \mathfrak{c}_r$ *implique* $\mathfrak{a}_r \supset \mathfrak{b}_r$.

Cette dernière propriété implique évidemment $\gamma$ (resp. $\gamma$ -totale) ; réciproquement

$$\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{c}_r \supset \mathfrak{b}_r \times \mathfrak{c}_r \longrightarrow \mathfrak{a}_r \times \mathfrak{c}_r = \mathfrak{a}_r \times \mathfrak{c}_r + \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r) \times \mathfrak{c}_r .$$

Donc si $\gamma$ est vérifié $\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{c}_r = (\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r) \times \mathfrak{c}_r \longrightarrow \mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r$ ou $\mathfrak{a}_r \supset \mathfrak{b}_r$.

THÉORÈME 6. - *La propriété* $\delta$ (resp. $\delta$ *-totale) est équivalente à :* $\mathfrak{c}_r$ *étant un r-idéal fini* (resp. *un r-idéal quelconque*), $(a) \times \mathfrak{c}_r \supset (b) \times \mathfrak{c}_r$ *implique* $(a) \supset (b)$.

Cette dernière propriété implique $\delta$ car $x \in \mathfrak{a}_r : \mathfrak{a}_r \longrightarrow (1) \times \mathfrak{a}_r \supset (x) \times \mathfrak{a}_r$ Réciproquement $(a) \times \mathfrak{c}_r \supset (b) \times \mathfrak{c}_r \longrightarrow \mathfrak{c}_r \supset (b/a) \times \mathfrak{c}_r$ ou $b/a \in \mathfrak{o}$. Donc $(a) \supset (b)$. A partir des théorèmes 5 et 6 et des définitions on voit immédiatement que pour un système de r-idéaux finis (resp. système total) :

$$\alpha \text{ (resp. total)} \longrightarrow \beta \text{ (resp. total)} \longrightarrow \gamma \text{ (resp. total)} \longrightarrow \delta \text{ (resp. total)}.$$

THÉORÈME 7 (Théorème de monotonie). - *Si sur* $\mathfrak{g}$ *sont définis deux systèmes d'idéaux* r *et* r', *le* r-*système étant plus fin que le* r'-*système*

1° *La propriété* r - $\alpha$ (resp. *totale*) *implique* r' - $\alpha$ (resp. *totale*).

2° *La propriété* r - $\beta$ (resp. *totale*) *implique* r' - $\beta$ (resp. *totale*)

3° *La propriété* r' - $\delta$ (resp. *totale*) *implique* r - $\delta$ (resp. *totale*)

1° Si $\mathfrak{a}_{r'}$ est un r'-idéal, c'est un r-idéal, donc $\exists$ $a \in \mathfrak{g}$ avec $\mathfrak{a}_{r'} = (a)$

2° Si $\mathfrak{g}$ vérifie r- $\beta$ totale et si $\mathfrak{a}_{r'}$ est un r'-idéal, c'est un r-idéal donc il existe un r-idéal $\mathfrak{b}_r$ tel que $\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{b}_r = \mathfrak{o}$. On a $\mathfrak{a}_r \; \mathfrak{b}_r \subset \mathfrak{o}$. Donc $(\mathfrak{a}_r)_{r'} \times (\mathfrak{b}_r)_{r'} \subset \mathfrak{o}$ et $(\mathfrak{a}_r)_{r'} \times (\mathfrak{b}_r)_{r'} = \mathfrak{o}$ ou $\mathfrak{a}_{r'} \times \mathfrak{b}_{r'} = \mathfrak{o}$. Si $\mathfrak{g}$ vérifie r- $\beta$ et si $\mathfrak{a}_{r'}$ est un r'-idéal fini, on a par exemple

$\mathfrak{a}_{r'} = (a_1,\dots,a_n)_{r'}$. $\exists\ b_1,\dots,b_q$ avec $(a_1,\dots,a_n)_r \times (b_1,\dots,b_q)_r = \mathfrak{o}$ ,
et on en déduit comme précédemment $(a_1 , \dots , a_n)_{r'} \times (b_1 , \dots , b_q)_{r'} = \mathfrak{o}$ .

3° Si $a\,\mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{a}_r$ , $a\,\mathfrak{a}_{r'} \subset \mathfrak{a}_{r'}$ donc $a \in \mathfrak{o}$ et $\mathfrak{a}_r : \mathfrak{a}_r = \mathfrak{o}$ .

Nous allons préciser quelques unes de ces propriétés.

Montrons d'abord que la propriété pour $\mathfrak{o}$ d'être totalement r-clos est indépendante du système de r-idéaux considéré.

Nous dirons qu'un élément $x$ de $\mathfrak{g}$ <u>dépend presque entièrement</u> de $\mathfrak{o}$ si l'ensemble $(x^n)_{n>0}$ est borné inférieurement. $\mathfrak{o}$ sera dit <u>totalement clos</u> si tout élément de $\mathfrak{g}$ dépendant presque entièrement de $\mathfrak{o}$ est contenu dans $\mathfrak{o}$ .

THÉORÈME 8. - $\mathfrak{o}$ <u>est totalement r-clos si, et seulement si il est totalement clos</u>.

Supposons que $\mathfrak{o}$ soit totalement r-clos et soit $a$ un élément de $\mathfrak{g}$ dépendant presque entièrement de $\mathfrak{o}$ . L'ensemble $\mathfrak{a} = (a , a^2 , \dots , a^n , \dots)$ est borné inférieurement. On peut donc considérer $\mathfrak{a}_r$ . La relation $a \in \mathfrak{a}_r : \mathfrak{a}_r$ implique, puisque $\mathfrak{g}$ est totalement r-clos, $a \in \mathfrak{o}$ et $\mathfrak{o}$ est totalement clos.

Réciproquement, si $\mathfrak{o}$ est totalement clos et si $x \in \mathfrak{a}_r : \mathfrak{a}_r$ , quel que soit $n > 0$ on a : $x^n\,\mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{a}_r$ donc $(x^n)_{n>0}$ est borné inférieurement, $x$ dépend presque entièrement de $\mathfrak{o}$ et est par suite entier. Donc $\mathfrak{a}_r : \mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{o}$ et $\mathfrak{o}$ est totalement r-clos.

<u>Idéaux de Dedekind</u>. - Soient $K$ un corps, $A$ un ordre de $K$ , $\mathfrak{g} = K^*$ , $\mathfrak{o} = A^*$ .

Dire que $\mathfrak{g}$ est totalement d-principal revient à dire que $A$ est un anneau principal.

Dire que $\mathfrak{g}$ est principal revient à dire que tous les idéaux finis de $A$ sont principaux, ou encore qu'étant donnés deux éléments $a$ et $b$ de $A$ , ils admettent un plus grand commun diviseur de la forme $ax + by (x , y \in A)$ .

THÉORÈME 9. - $\mathfrak{o}$ <u>est d-clos si et seulement si</u> $A$ <u>est intégralement clos dans son corps des quotients</u>.

Supposons que $\mathfrak{o}$ soit d-clos et soit $x$ un élément de $K^*$ entier sur $A$ . $x$ satisfait à une équation de la forme :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (a_1 , \dots , a_n \in A) .$$

On a par suite, quel que soit $p > 0$ : $x^p \in (1 , x , \dots , x^{n-1})_d$ donc $x(1 , x , \dots , x^{n-1})_d \subset (1 , x , \dots , x^{n-1})_d$ et $x \in \mathcal{O}$ . $A$ est bien intégralement clos.

Réciproquement, supposons que $A$ soit intégralement clos, et soit $x \neq 0$ tel que $x(a_1 , \dots , a_n)_d \subset (a_1 , \dots , a_n)_d$ .

On a des équations de la forme :

$$a_i x = \lambda_{i1} a_1 + \dots + \lambda_{in} a_n \quad (\lambda_{ij} \in A , \ 1 \leq i \leq n) .$$

C'est un système d'équations homogènes en $a_1 , \dots , a_n$ . Ceci entraîne l'annulation du déterminant :

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} - x & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} - x & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & & \lambda_{nn} - x \end{vmatrix}$$

ce qui donne $x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0$ avec $b_i \in A$ $(1 \leq i \leq n)$ .

Par suite, $x$ est entier sur $A$ et $A$ étant intégralement clos, $x \in \mathcal{O}$ . $\mathcal{O}$ est bien d-clos.

<u>s-idéaux</u>.

THÉORÈME 10. - <u>Le groupe préordonné $\mathcal{G}$ vérifie la propriété s-$\gamma$ si et seulement si le groupe ordonné associé $G$ est totalement ordonné. Il vérifie alors les propriétés s - $\alpha$ et s - $\beta$</u> .

$\mathcal{G}$ étant un groupe préordonné quelconque et $a \in \mathcal{G}$ , on a toujours

$$(1 , a)_s \subset (a^{-1} , a)_s \times (1 , a)_s = (a^{-1} , 1 , a , a^2)_s .$$

Si $\mathcal{G}$ vérifie s-$\gamma$ le théorème 5 montre que pour tout $a \in \mathcal{G}$ , $(a , a^{-1})_s \supset \mathcal{O}$ D'après la définition des s-idéaux ceci implique $1 \in (a) \cup (a^{-1})$ . Par suite l'un des deux éléments $a$ ou $a^{-1}$ est entier, donc $G$ est totalement ordonné. Le théorème est complètement démontré si on remarque qu'un groupe totalement ordonné vérifie s - $\alpha$ .

Le semi-groupe $\mathfrak{o}$ correspondant sera dit semi-groupe de valuation et l'application $\mathfrak{G} \to G$ sera dite une <u>valuation</u> de $\mathfrak{G}$. Si $A$ est un ordre du corps $K$ et si $\mathfrak{G} = K^*$, $\mathfrak{o} = A^*$, $A$ est alors un anneau de valuation.

THÉORÈME 11. - <u>Le semi-groupe</u> $\mathfrak{o}$ <u>est</u> s-<u>clos si et seulement si tout élément</u> $x$ <u>de</u> $\mathfrak{G}$ <u>tel qu'il existe un nombre</u> $n > 0$ <u>avec</u> $x^n \in \mathfrak{o}$, <u>appartient à</u> $\mathfrak{o}$. Si $\mathfrak{o}$ est s-clos et si $x^n \in \mathfrak{o}$,

$$(1 , x , \ldots , x^{n-1})_s \, x = (x^n , x , \ldots , x^{n-1})_s \subset (1 , x , \ldots , x^{n-1})_s$$

donc $x \in \mathfrak{o}$.

Réciproquement, soit $\mathfrak{a}_s = (a_1 , \ldots , a_n)_s$ un s-idéal fini et $x$ tel que $x \, \mathfrak{a}_s \subset \mathfrak{a}_s$. D'après la définition des s-idéaux pour tout $i$ $(1 \leq i \leq n)$, $\exists \, \varphi(i)$ tel que $1 \leq \varphi(i) \leq n$ et $xa_i \in (a_{\varphi(i)})$. Alors $x^m a_i \in (a_{\varphi^m(i)})$. Considérons la suite $\varphi(1)$, $\varphi^2(1)$, ... et soit $p$ un nombre tel que $\varphi^p(1) = \varphi^{p+q}(1)$. Posons $i = \varphi^p(1)$. On a $\varphi^q(i) = i$ et $x^q a_i \in (a_i)$, donc $x^q \in \mathfrak{o}$ et par hypothèse $x \in \mathfrak{o}$. Par suite $\mathfrak{o}_s : \mathfrak{a}_s \subset \mathfrak{o}$ et $\mathfrak{o}$ est s-clos. On dit encore <u>semi-clos</u> au lieu de s-clos.

## 4. <u>Idéaux finis</u>.

Nous allons dans ce qui suit nous occuper particulièrement des systèmes d'idéaux finis.

THÉORÈME 12 (PRÜFER). - <u>La propriété</u> d - $\gamma$ <u>implique la propriété</u> d - $\beta$.

LEMME 1. - <u>Pour que tout</u> d-<u>idéal fini admette un inverse</u> (1), <u>il suffit qu'il en soit ainsi pour tout idéal engendré par deux éléments</u>.

Raisonnons par récurrence sur le nombre des éléments qui engendrent un idéal.

Supposons que nous ayons démontré la propriété pour tout idéal engendré par moins de $n + 1$ éléments, et soit $\mathfrak{a} = (a_1 , \ldots , a_{n+1})_d$ un idéal engendré par $n + 1$ éléments. D'après les hypothèses du lemme on peut supposer $n \geq 2$. En vertu des hypothèses de récurrence on peut trouver des idéaux $\xi$, $\eta$ et $\zeta$ tels que :

(2) $$(a_1 , \ldots , a_n)_d \times \xi = (1)$$

(3) $$(a_2 , \ldots , a_{n+1})_d \times \eta = (1)$$

(4) $$(a_1 , a_{n+1})_d \times \zeta = (1)$$

---

(1) Cet inverse sera nécessairement fini en vertu du théorème 15.

Considérons l'idéal $\mathfrak{b} = a_1 \xi \times \zeta + a_{n+1} \eta \times \zeta$. On a :

$$\alpha \times \mathfrak{b} = a_1 (a_1, \ldots, a_n)_d \times \xi \times \zeta + a_1 a_{n+1} \xi \times \zeta + a_1 a_{n+1} \eta \times \zeta + a_{n+1} (a_2, \ldots, a_{n+1})_d \times \eta \times \zeta$$

d'où, en tenant compte des égalités (2) et (3) :

$$\alpha \times \mathfrak{b} = a_1 \zeta + a_1 a_{n+1} \xi \times \zeta + a_1 a_{n+1} \eta \times \zeta + a_{n+1} \zeta$$

$$\alpha \times \mathfrak{b} = a_1 ((1) + a_{n+1} \eta) \times \zeta + a_{n+1} ((1) + a_1 \xi) \times \zeta$$

Or (3) montre que $a_{n+1} \eta \subset (1)$ et (2) montre que $a_1 \xi \subset (1)$ ; d'où :

$$\alpha \times \mathfrak{b} = a_1 \zeta + a_{n+1} \zeta = (a_1 , a_{n+1})_d \times \zeta = (1)$$

en vertu de (4).

LEMME 2. - <u>Pour que le semi-groupe</u> $\mathfrak{o}$ <u>vérifie la propriété</u> $d - \beta$ <u>il suffit qu'il soit intégralement clos et que pour tout</u> $a \in \mathfrak{g}$ <u>il existe des entiers</u> <u>$x$ et $y$ tels que</u> $a = x + ya^2$.

D'après le lemme 1 il suffit de montrer qu'un idéal engendré par deux éléments est inversible dans l'ensemble des idéaux finis. On peut supposer, en multipliant au besoin par un idéal principal, que cet idéal soit de la forme $(1 , a)_d$. Soient donc $x$ et $y$ des entiers tels que $a = x + ya^2$. On a :

$$(1 , a)_d \times (x/a , y)_d = (x/a , x , y , ay)_d = \mathfrak{b}$$

Montrons que $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$.

Comme $1 = x/a + ay$, on voit que $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{o}$. Montrons que $x/a$ et $ay$ sont entiers :

$$x(1 , a)_d = (x , ax)_d = (a - ya^2 , ax)_d \subset (a , a^2)_d = (a)(1 , a)_d$$

Or $x/a\ (1 , a)_d \subset (1 , a)_d$ montre, puisque $\mathfrak{o}$ est intégralement clos que $x/a \in \mathfrak{o}$. On a de même $ay = 1 - x/a \in \mathfrak{o}$ et on a bien $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$.

Démontrons maintenant le théorème :

En vertu du lemme 2, il suffit de montrer que si $\mathfrak{g}$ vérifie la propriété $d - \gamma$ pour tout $a \in \mathfrak{g}$, $\exists\ x , y \in \mathfrak{o}$ avec $a = x + ya^2$. Ceci revient à montrer que $a \in (1 , a^2)$. En vertu du théorème 5, il suffit de remarquer que :

$$(a)\ (1 , a)_d \subset (1 , a^2)_d \times (1 , a)_d .$$

THÉORÈME 13 (LORENZEN). - <u>Un groupe préordonné</u> v-clos <u>vérifie le théorème du</u> v-<u>semi-groupe</u>.

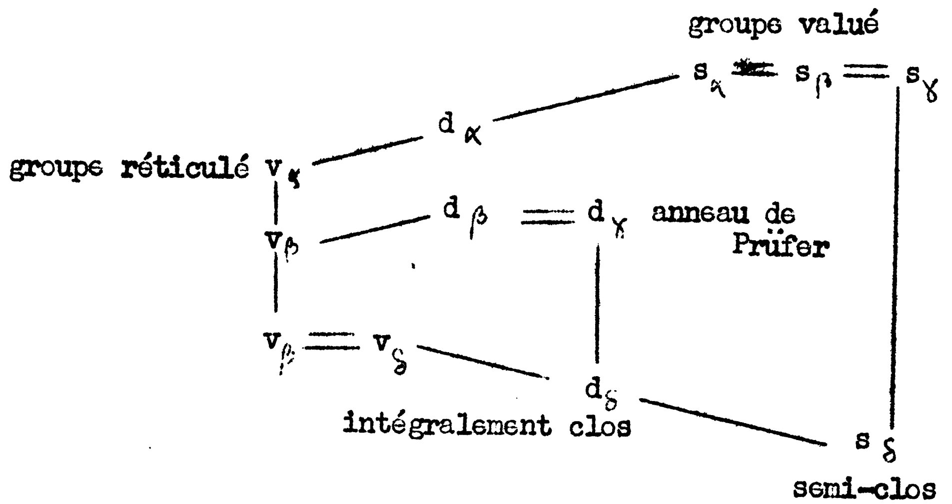
Il nous suffira pour cela de montrer qu'un v-idéal fini est inversible dans l'ensemble des v-idéaux (finis ou non).

Soit $\mathfrak{a}$ un v-idéal fini :

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = (1) : \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1} = ((1) : \mathfrak{a}^{-1}) : \mathfrak{a} .$$

Comme $\mathfrak{a}$ est un v-idéal, en vertu du théorème 4, $(1) : \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}$.
Comme $\mathfrak{G}$ est v-clos $\mathfrak{a} : \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ donc $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = \mathfrak{o}$ ou $((\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1})^{-1})^{-1} = \mathfrak{o}$, c'est-à-dire $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1})_v = \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{o}$. ($\mathfrak{a}^{-1}$ est donc un v-idéal inverse de $\mathfrak{a}$).

DIEUDONNÉ a donné un exemple montrant que v - $\gamma$ n'implique pas v - $\beta$. En résumé, on peut tracer le tableau :




Si deux propriétés sont reliées par un trait, la plus basse est la conséquence de la plus haute. L'horizontalité du trait implique l'équivalence et réciproquement. (L'horizontalité est souligné par deux traits).

## 5. Systèmes totaux d'idéaux.

THÉORÈME 14 (ARTIN). - <u>Un groupe préordonné totalement clos vérifie la condition</u> v - $\beta$.

La démonstration est la même que celle du théorème 13.

Si on définit sur $\mathfrak{G}$ un système d'idéaux finis, il est possible de prolonger de plusieurs manières ce système en un système total d'idéaux sur $\mathfrak{G}$. Parmi ces systèmes d'idéaux totaux, il y en a un qui est plus fin que tous les autres, c'est le $r_s$-système, un qui est moins fin que tous les autres, c'est le $r_v$-système. Ils sont ainsi définis : $\mathfrak{a}_{r_s} = \bigcup_{\mathfrak{n} \subset \mathfrak{a}} \mathfrak{n}_r$ $\mathfrak{a}_{r_v} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}_r} \mathfrak{n}_r$ où $\mathfrak{n}$ désigne chaque fois un ensemble fini. On a évidemment $\mathfrak{a}_{v_v} = \mathfrak{a}_v$ et $\mathfrak{a}_{s_s} = \mathfrak{a}_s$ .

Le $v_s$-système joue un rôle important, on l'appelle le t-système.

Un système total est dit de caractère fini si pour tout r-idéal $\mathfrak{a}_r$ on a $\mathfrak{a}_r = \bigcap_{\mathfrak{n} \subset \mathfrak{a}} \mathfrak{n}_r$ . Les systèmes de caractère fini sont ceux qui se déduisent des systèmes finis associés par la $r_s$-opération. Les idéaux de Dedekind, les s-idéaux, les t-idéaux sont de caractère fini. Beaucoup de propriétés des idéaux de Dedekind peuvent se généraliser aux idéaux de caractère fini.

THÉORÈME 15 (KRULL). - Dans un système de r-idéaux de caractère fini tout idéal inversible est fini.

Soit un r-système de caractère fini, et soit un r-idéal $\mathfrak{a}_r$ tel que $\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{a}'_r = \mathfrak{o}$ . On a $1 \in (\mathfrak{a}\mathfrak{a}')_r$ et comme le système est de caractère fini, on peut extraire deux sous-ensembles finis $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{a}'$ avec $1 \in (\mathfrak{n}\ \mathfrak{n}')_r$ Donc $\mathfrak{n}_r \times \mathfrak{a}'_r = \mathfrak{o}$ . On en déduit $\mathfrak{n}_r = \mathfrak{a}_r$ et $\mathfrak{a}_r$ est un r-idéal fini.

Un idéal entier $\mathfrak{a}$ est dit premier si a , b $\in \mathfrak{o}$ , ab $\in \mathfrak{a}$ et a $\notin \mathfrak{a}$ entraînent b $\in \mathfrak{a}$ .

THÉORÈME 16 (KRULL). - Soit S un système multiplicativement clos de $\mathfrak{o}$ et un système de r-idéaux de caractère fini sur $\mathfrak{o}$ tel qu'il existe un r-idéal $\mathfrak{a}$ dont l'intersection avec S soit vide. Il existe alors un r-idéal entier premier $\mathfrak{p}$ qui contient $\mathfrak{a}$ et qui a avec S une intersection vide.

On considère l'ensemble $\mathfrak{M}$ des r-idéaux entiers qui contiennent $\mathfrak{a}$ et ont une intersection vide avec S . Cet ensemble n'est pas vide puisqu'il contient $\mathfrak{a}$ . Le système des r-idéaux étant de caractère fini on voit que $\mathfrak{M}$ est inductif. Il admet un élément maximal $\mathfrak{p}$ . Montrons que $\mathfrak{p}$ est premier. Soient a , b $\in \mathfrak{o}$ , a , b $\in \complement\mathfrak{p}$ . Montrons que $\mathfrak{p} \not\ni$ ab .

1° Si a, b $\in$ S , ab $\in$ S et $\mathfrak{p} \not\ni$ ab

2° Si a $\in$ S , b $\notin$ S , on a $(\mathfrak{p}\ , b)_r \cap S \ni s$ . $\exists\ p_1 , \ldots , p_n \in \mathfrak{p}$ avec $s \in (p_1 , \ldots , p_n , b)_r$ et $sa \in (p_1 a , \ldots , p_n a , ab)_r$ . Si donc on avait ab $\in \mathfrak{p}$ , on aurait sa $\in \mathfrak{p}$ ce qui est impossible puisque sa $\in$ S et

$S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$.

3° Si $a, b \notin S$, $\exists$ $s \in S$ et $p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{p}$ avec $s \in (p_1, \dots, p_n, b)_r$ et $sa \in (p_1 a, \dots, a_n a, ba)_r$. Si $ab \in \mathfrak{p}$ on aurait $sa \in \mathfrak{p}$ ; mais comme $s \in S$, $a \notin S$ on a vu au 2° que ceci était impossible.

COROLLAIRE 1. - *Dans un $r$-système d'idéaux de caractère fini, tout $r$-idéal entier différent de $\mathfrak{o}$ est contenu dans un $r$-idéal maximal qui est premier.*

Il suffit d'appliquer le théorème 16 au cas où $S = \{1\}$.

COROLLAIRE 2. - *Etant donnés deux systèmes d'idéaux de caractère fini le $r$-système et le $r'$-système, tels que le $r$-système soit plus fin que le $r'$-système, un $r$-idéal premier minimal est encore un $r'$-idéal.*

Soit $\mathfrak{p}$ un $r$-idéal premier minimal, $S$ le complémentaire de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{o}$. Soit $a \in \mathfrak{p}$. $(a) \cap S = \emptyset$ montre qu'il existe un $r'$-idéal entier qui a une intersection vide avec $S$. En vertu du théorème 16, il existe un $r'$-idéal premier $\mathfrak{p}'$ qui a une intersection vide avec $S$.

Donc $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$. Mais le $r'$-système étant moins fin que le $r$-système, $\mathfrak{p}'$ est un $r$-idéal premier et par suite $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$.

Nous dirons que le semi-groupe $\mathfrak{o}$ (ou le groupe préordonné $\mathfrak{G}$) est *$r$-noethérien* si dans l'ensemble des $r$-idéaux entiers ordonnés par inclusion toute suite ascendante ne comporte qu'un nombre fini de termes distincts.

THÉORÈME 17. - *Si le $r$-système est de caractère fini, la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{o}$ soit $r$-noethérien est que tout $r$-idéal soit fini.*

Se démontre comme dans le cas des $d$-idéaux.

THÉORÈME 18. - *Si l'ensemble des idéaux d'un $r$-système de caractère fini forme un groupe, la relation d'ordre $\mathfrak{a}_r \geqslant \mathfrak{b}_r \rightleftarrows \mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{b}_r$ en fait un groupe décomposable.*

Il est facile de voir que cette relation d'ordre fait du groupe $R$ des $r$-idéaux un groupe ordonné car si $\mathfrak{a}_r, \mathfrak{b}_r \geqslant \mathfrak{o}$ on a $\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{b}_r \geqslant \mathfrak{o}$ et $\mathfrak{a}_r \geqslant \mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}_r \leqslant \mathfrak{o}$ implique $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{o}$. $R$ est filtrant car l'ensemble $R_+$ des idéaux entiers engendre $R$ (Si $\mathfrak{a}_r$ est quelconque, $\exists$ $a \in \mathfrak{o}$ avec $\mathfrak{b}_r = a\,\mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{o}$

donc $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{b}_r (a)^{-1}$ avec $\mathfrak{b}_r$ , $(a) \in R_+)$ . R est semi réticulé inférieurement, car

$$\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r = \inf(\mathfrak{a}_r , \mathfrak{b}_r) ,$$

donc il est réticulé en vertu du théorème 2. Puisque le groupe est de caractère fini, le théorème 15 montre que tout idéal est fini, le théorème 17 montre donc que $\mathfrak{o}$ est r-noehtérien et le théorème 3 montre alors que R est décomposable.

Dans un tél groupe, chaque idéal est représentable d'une seule manière comme produit de puissances (positives ou négatives) de r-idéaux premiers maximaux (au sens de l'inclusion). Les idéaux maximaux sont d'ailleurs ici les seuls idéaux premiers.

Si en particulier l'ordre d'un corps vérifie la propriété d $-\beta$ cet ordre est dit <u>anneau de Dedekind</u>.

Emmy NOETHER a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un anneau d'intégrité soit un anneau de Dedekind (voir les deux exposés précédents) : l'anneau doit être intégralement clos, noethérien et chaque idéal premier doit être maximal. Ces conditions sont valables pour un r-système d'idéaux de caractère fini quelconque :

THÉORÈME 19 (E. NOETHER). - <u>Pour que l'ensemble des r-idéaux d'un système de caractère fini, défini sur le groupe préordonné $\mathfrak{G}$ forme un groupe, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies</u> :

1° $\mathfrak{o}$ <u>est r-clos</u>

2° $\mathfrak{o}$ <u>est r-noethérien</u>

3° <u>Chaque r-idéal premier est minimal</u>

Le théorème 18 montre que ces conditions sont manifestement nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes :

D'après le théorème 17, puisque $\mathfrak{o}$ est r-noethérien, tout r-idéal est fini. Puisque $\mathfrak{o}$ est r-clos, il est donc totalement clos, et, d'après le théorème 14, l'ensemble des v-idéaux forme un groupe. Pour tout ensemble $\mathfrak{a}$ borné inférieurement on a donc :

$$\mathfrak{a}_v \times \mathfrak{a}_v^{-1} = \mathfrak{o} . \tag{5}$$

$\mathfrak{o}$ étant r-noethérien est évidemment t-noethérien, par suite tout t-idéal est un v-idéal. Soit $\mathfrak{a}_r$ un r-idéal quelconque $\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{a}_r^{-1} \subset \mathfrak{o}$. Supposons que $\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{a}_r^{-1} \neq \mathfrak{o}$. Alors le corollaire 1 du théorème 16 montre que $\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{a}_r^{-1}$ est contenu dans un idéal premier maximal $\mathfrak{p}_r$. En vertu des hypothèses du théorème, cet idéal est un r-idéal premier minimal le corollaire 2 du théorème 16 montre donc que c'est t-idéal premier, et par suite de ce qui a été vu, un v-idéal.

Donc $\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{a}_r^{-1} \subset \mathfrak{p}_v \neq \mathfrak{o}$. Ceci implique donc $\mathfrak{a}_v \times \mathfrak{a}_v^{-1} \subset \mathfrak{p}_v \neq \mathfrak{o}$, ce qui contredit l'égalité (5). Ceci est donc impossible et on a bien $\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{a}_r^{-1} = \mathfrak{o}$. Les r-idéaux forment bien un groupe.

REMARQUE. - A la place des conditions 1° et 2° LORENZEN donne les conditions

1°' $\mathfrak{o}$ est totalement clos.

2°' $\mathfrak{o}$ satisfait à la condition v-maximale.

La démonstration est d'ailleurs la même dans les deux cas.

Un groupe préordonné est dit <u>factoriel</u> si tout idéal principal s'y décompose biunivoquement en un produit d'idéaux principaux premiers, c'est-à-dire si son groupe ordonné associé est factoriel.

THÉORÈME 20. - <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe préordonné soit factoriel est que tout t-idéal soit principal.</u>

<u>Nécessité</u>. - Il est facile de voir que tout t-idéal est principal en remarquant qu'ici un ensemble borné inférieurement admet un p.g.c.d.

<u>Suffisance</u>. - Si tout t-idéal est principal, les t-idéaux forment un groupe qui est factoriel en vertu du théorème 18.

Plus généralement, si un r-système est de caractère fini, dire que tout idéal est principal revient à dire que tout r-idéal se décompose d'une manière, et d'une seule, en un produit de r-idéaux principaux premiers.

THÉORÈME 21. - <u>Si les s-idéaux d'un groupe préordonné $\mathfrak{G}$ forment un groupe, chaque s-idéal est principal. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le groupe totalement ordonné G associé à $\mathfrak{G}$ soit nul ou isomorphe à Z , groupe additif ordonné des entiers usuels.</u>

Raisonnons sur le groupe ordonné associé G , supposé $\neq \{0\}$.

Si les s-idéaux de G forment un groupe, tout s-idéal est fini d'après le théorème 15, donc G vérifie la propriété s − $\beta$ et se trouve être totalement ordonné d'après le théorème 10. L'ensemble des s-idéaux est totalement ordonné car $(a) \supset (b) \rightleftarrows a \leq b$. Il ne peut donc exister qu'un seul idéal maximal (p). D'après le théorème 18, tout s-idéal (x) peut se mettre d'une manière unique sous la forme $(x) = (p)^n$.

L'application $x \to n$ est l'isomorphisme cherché de G sur Z.

En résumé, nous avons le tableau suivant :

$G \cong Z$ ou $\{0\}$

s-$\alpha$ tot = s-$\beta$ tot

groupe factoriel d-$\alpha$ tot (Anneau principal)

complètement réticulé t-$\alpha$ tot d-$\beta$ tot (Anneau de Dedekind)

v-$\alpha$ tot t-$\beta$ tot

v-$\beta$ tot = v-$\delta$ tot = t-$\delta$ tot = d-$\delta$ tot = s-$\delta$ tot

totalement clos

REMARQUE. – On montre que si l'on a simultanément les conditions t − $\alpha$ totale et d − $\beta$ totale, on a la condition d − $\alpha$ totale : un anneau qui est à la fois factoriel et de Dedekind est principal.

BIBLIOGRAPHIE


[1] ARNOLD (I.). – Ideale in kommutativen Halbgruppen, Recueil math. Soc. math. Moscou (Mat. Sbornik), t. 36, 1929, p. 401-407.

[2] BOURBAKI (Nicolas). – Livre II : Algèbre, chapitres 6 et 7. – Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1179 ; Eléments de Mathématique, 14); voir chapitre 6.

[3] DIEUDONNÉ (Jean). – Sur la théorie de la divisibilité, Bull. Soc. math. France, t. 69, 1941, p. 133-144.

[4] JAFFARD (Paul). – Les systèmes d'idéaux (Ouvrage à paraître).

[5] KRULL (W.). – Idealtheorie. – Berlin, Springer, 1935 (Ergebn. der Math. ..., vierter Band, 3); voir paragraphes 1 et 6.

[6] LORENZEN (Paul). – Abstrakte Begründung der multiplicativen Idealtheorie, Math. Z., t. 45, 1939, p. 533-553.

[7] LORENZEN (Paul). - Uber halbgeordnete Gruppen, Math. Z., t. 52, 1949, p. 483-526.

[8] PRÜFER (Heinz). - Untersuchungen über Teilberkeitseigenschaften in Körpern, J. für reine und angew. Math., t. 168, 1932, p. 1-36.

[9] VAN DER WAERDEN (B. L.). - Algebra II (2. Auflage der Modernen Algebra). - Berlin, Springer, 1955 (Die Grundlehren der math. Wiss., Band 34); paragraphe 111.