Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

M. Teissier

Application de la théorie des anneaux à l'étude de demi-groupes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 4 (1950-1951), exp. n° 5, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1950-1951__4__A5_0>

-:-:-:-

Séminaire A. CHÂTELET et P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1950/51

-:-:-:-

APPLICATION DE LA THÉORIE DES ANNEAUX À L'ÉTUDE DE DEMI-GROUPES

par Mlle M. TEISSIER

Le but de cet exposé est d'appliquer les méthodes de la théorie des anneaux à l'étude des demi-groupes, c'est-à-dire des ensembles sur lesquels est définie une seule opération associative, notée multiplicativement, et en général ne vérifiant pas la règle de simplification.

Nous utiliserons ici les notions d'idéal à gauche, c'est-à-dire de sous-ensembles G permis pour la multiplication à gauche par un élément quelconque de demi-groupe D, autrement dit vérifiant $DG \subseteq G$. Les idéaux à droite et les idéaux bilatères ont une définition analogue.

1. L'homomorphisme de Rees.

Soit D un demi-groupe, I un idéal bilatère de D. Nous allons définir un nouveau demi-groupe qui aura des propriétés analogues à celles d'un anneau de classes résiduelles modulo un idéal. Nous définissons donc un demi-groupe D^* de la manière suivante :

1° A chaque élément de D correspond un élément de D^* et réciproquement à chaque élément de D^* correspond au moins un élément de D.

2° A tous les éléments de I correspond le même élément de D^*.

3° Réciproquement, si deux élément de D déterminent le même élément de D^*, ils appartiennent tous deux à I.

4° La correspondance conserve la multiplication.

Il est immédiat que, D et I étant donnés, D^* existe, et est déterminé de façon unique, à un isomorphisme près. Aux éléments de I correspond le zéro de D^*. On peut, pour obtenir D^*, ajouter un zéro à D (si D est sans zéro) et considérer l'endomorphisme de $D \cup \{0\}$ qui consiste à appliquer tout élément de I sur zéro et tout autre élément de D sur lui-même. On écrit en général $D^* = D - I$.

Cet homomorphisme, introduit par REES [4] peut être utilisé pour obtenir certains résultats dont la forme est tout à fait analogue à celle de théorèmes contenant les anneaux, mais dont la démonstration est beaucoup plus triviale. Nous allons les énoncer rapidement.

THÉORÈME d'homomorphisme (dans cette section, on désigne, pour abréger, par "idéaux" les idéaux bilatères).

1° Si I_1 , I_2 sont deux idéaux de D tels que $I_1 \supset I_2$

a) $I_1 - I_2$ est un idéal de $D - I_2$.

b) $(D - I_2) - (I_1 - I_2) \simeq D - I_1$.

Réciproquement, tout idéal X de $D - I_2$ est déterminé par un idéal I_1 de D tel que :

$$D - I_1 \simeq (D - I_2) - X .$$

2° Soient I un idéal d'un demi-groupe D , H un sous-demi-groupe du même demi-groupe. Appelons R la réunion (au sens de la théorie des ensembles) $R = I \cup H$. K l'intersection $I \cap H$; $I \cup H$ est un sous-demi-groupe dont I est un idéal ; K est un idéal de H , et on a $R - I \simeq H - K$.

THÉORÈME de Jordan-Hölder. - Soit D un demi-groupe. On définit une suite desdendante de sous-demi-groupes $D = D_0 \supset D_1 \dots \supset D_r$ dans laquelle D_r est vide et D_{i+1} est un idéal de D_i . Les facteurs de la série sont les demi-groupes différences. $D_i - D_{i+1}$.

Deux séries sont isomorphes si on peut établir une correspondance dans laquelle les facteurs qui se correspondent sont isomorphes.

Deux séries d'un demi-groupe D

$$D = D_0 \supset D_1 \dots \supset D_r = \emptyset$$

$$D = H_0 \supset H_1 \dots \supset H_u = \emptyset$$

ont des raffinements isomorphes qui sont respectivement :

$$D = D_{00} \supset D_{01} \dots \supset D_{0u} = D_{10} \supset \dots \supset D_{ru}$$

$$D = H_{00} \supset H_{10} \dots \quad H_{r0} = H_{01} \supset \dots \supset H_{ru}$$

où

$$D_{ik} = D_{i+1} \cup (D_i \cap H_k)$$

$$H_{ik} = H_{k+1} \cup (H_k \cap D_i)$$

d'après ce qui précède :

$$D_{ik} - D_{i,k+1} \simeq D_{ik} - D_{i+1,k}$$

Deux <u>séries de composition</u> (séries n'admettant plus de raffinement) sont isomorphes.

2. Demi-groupes ayant des idéaux minimaux.

L'étude de ces demi-groupes a été faite par SUSCHKEWITSCH [5] pour les demi-groupes finis, puis par REES [4] et CLIFFORD [1], [2] dans le cas général, avec une méthode qui diffère un peu de celle qui est exposée ici.

Un idéal à gauche est <u>minimal</u> s'il ne contient pas d'autre idéal à gauche que lui-même, et, éventuellement, l'idéal zéro.

A. D <u>est un demi-groupe sans zéro contenant au moins un idéal à gauche minimal.</u> -

Soit $\mathfrak{g}$ cet idéal. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, l'idéal à gauche $Dx \subseteq \mathfrak{g}$, donc $Dx = \mathfrak{g}$; de même $\mathfrak{g}x = \mathfrak{g}$; on peut donc faire division à gauche dans $\mathfrak{g}$. On a les propriétés suivantes :

1°. Si $\mathfrak{g}$ est un idéal à gauche minimal, pour tout $a \in D$, $\mathfrak{g}a$ <u>est un idéal à gauche minimal</u>. En effet, soit $y \in \mathfrak{g}a$; $y = xa$, $x \in \mathfrak{g}$; donc $Dy = Dxa = \mathfrak{g}a$. $\mathfrak{g}a$ est donc minimal.

2°. <u>Réciproquement</u>, tout idéal à gauche minimal $\mathfrak{g}'$ de D peut s'écrire $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}b$, $\mathfrak{g}$ étant un idéal à gauche minimal quelconque. En effet, soit $b \in \mathfrak{g}'$ $\mathfrak{g}b$ est un idéal à gauche contenu dans $\mathfrak{g}'$, donc $\mathfrak{g}b = \mathfrak{g}'$.

3°. Deux idéaux à gauche minimaux distincts sont disjoints.

4°. Il résulte de 1° et 2° que $\mathfrak{J} = \bigcup_{x \in D} \mathfrak{g}x = \mathfrak{g}D$ est la réunion de tous les idéaux à gauche minimaux de D. C'est un idéal bilatère. Remarquons que, dans l'expression de $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{g}$ peut est remplacé par un idéal à gauche minimal quelconque.

Montrons que $\mathfrak{J}$ <u>est un idéal bilatère minimal</u>. Soit $\mathfrak{j}$ un idéal bilatère contenu dans $\mathfrak{J}$, donc $\mathfrak{j} = \mathfrak{j} \cap \mathfrak{J}$, et $\mathfrak{j}$ a une intersection non vide avec au moins un des idéaux minimaux à gauche de D, soit $\mathfrak{g}' - \mathfrak{J} \cap \mathfrak{g}' \neq \emptyset$, donc $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'$; donc $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{j}$ et $\mathfrak{J} = \mathfrak{g}'D \subseteq \mathfrak{j}D = \mathfrak{j}$. Donc $\mathfrak{j} = \mathfrak{J}$, et $\mathfrak{J}$ est minimal. De plus, il est contenu dans tout idéal bilatère de D ; c'est donc le seul idéal bilatère minimal (c'est <u>l'idéal minimum</u>).

En effet, si K est un autre idéal bilatère $\mathfrak{J}K \subseteq \mathfrak{J} \cap K \neq \emptyset$. $\mathfrak{J} \cap K$ est donc un idéal bilatère contenu dans $\mathfrak{J}$ donc $\mathfrak{J} \cap K = \mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J} \subseteq K$.

On voit facilement que $\mathfrak{J}$ est un demi-groupe ne possédant pas d'autre idéal bilatère que lui-même (puisque pour $x \in \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J} x \mathfrak{J} = \mathfrak{g}\mathfrak{J} = \mathfrak{J}$) on dit que $\mathfrak{J}$ est un <u>demi-groupe simple</u>.

Ces propriétés rappellent celles des anneaux vérifiant la condition minimale pour les idéaux à gauche (anneaux d'Artin). Mais, contrairement aux anneaux, le demi-groupe simple $\mathfrak{J}$, même s'il vérifie la condition minimale pour les idéaux à gauche (s'il contient un nombre fini d'idéaux minimaux à gauche) ne contient pas nécessairement un idempotent, ni un idéal minimal à droite. Nous sommes amenés à faire l'une ou l'autre des hypothèses supplémentaires suivantes, dont on montre facilement l'équivalence : $\mathfrak{J}$ <u>contient un élément idempotent</u>, ou D <u>contient un idéal à droite minimal</u>.

<u>Supposons qu'il existe dans</u> D <u>un idéal à droite minimal</u> $\mathfrak{d}_1$. En reprenant à droite les raisonnements faits à gauche dans ce qui précède, on montrerait que la réunion de tous les idéaux à droite minimaux de D est un idéal bilatère minimum, donc nécessairement confondu avec $\mathfrak{J}$, on a : $\mathfrak{J} = \mathfrak{g} D = D\mathfrak{d}_1 = \bigcup \mathfrak{g}_i = \bigcup \mathfrak{d}_k$. Soient $\mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{d}_k$ un idéal à gauche et un idéal à droite minimaux quelconques. On a $\mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{d}_k \cap \mathfrak{g}_i$, donc $\mathfrak{d}_k \cap \mathfrak{g}_i$ n'est jamais vide. De plus, $\mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i$ est un <u>demi-groupe</u> car $\mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i \times \mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i = \mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i$. Soit $x \in \mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i$; on a $x \in \mathfrak{g}_i$ d'où $\mathfrak{g}_i$; $x = \mathfrak{g}_i$ et $\mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i x = \mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i$. On peut donc faire la division à gauche dans $\mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i$; on montrerait de même qu'on peut faire la division à droite ; $\mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i$ <u>est donc un groupe</u>. Ce groupe possède un élément unité e_{ik}. L'idempotent e_{ik}, contenu dans $\mathfrak{d}_i$ et $\mathfrak{g}_k$, est un élément unité à gauche dans $\mathfrak{d}_k$ et à droite dans $\mathfrak{g}_i$. Il en résulte que tout élément x de $\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{d}_k$ peut s'écrire $x = e_{ik} x = x e_{ik}$ donc $\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i$ et par conséquent $\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{d}_k = \mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i = \mathfrak{C}_{ik}$.

Les résultats obtenus sont représentés dans la tableau suivant, à la fois "table d'intersection" et de multiplication (ligne par colonne).

	$\mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_2$	...	$\mathfrak{g}_i$
$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{C}_{11}$	$\mathfrak{C}_{21}$	...	$\mathfrak{C}_{i1}$
$\mathfrak{d}_2$	$\mathfrak{C}_{12}$	$\mathfrak{C}_{22}$	...	$\mathfrak{C}_{i2}$
...	...	...	...	...
$\mathfrak{d}_k$	$\mathfrak{C}_{1k}$	$\mathfrak{C}_{2k}$	...	$\mathfrak{C}_{ik}$

$$\mathfrak{J} = \sum_i \mathfrak{g}_i = \sum_k \mathfrak{d}_k = \sum_{ik} \mathfrak{C}_{ik}$$

$$\mathfrak{g}_i \mathfrak{d}_k = \mathfrak{J},$$

$$\mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i = \mathfrak{C}_{ik}.$$

Nous allons montrer que tous les groupes $\mathfrak{G}_{ik}$ sont isomorphes. Prenons un idéal à droite minimal quelconque, que nous appellerons $\mathfrak{d}_1$. On a $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{21} \dots \mathfrak{G}_{i1} \dots$ éléments unités respectifs $e_{11} . e_{21} \dots e_{i1}$.

Soient a_{11}, b_{11} etc. les éléments de $\mathfrak{G}_{11}$. On a :

$$\mathfrak{G}_{11}\, e_{21} = \mathfrak{d}_1 \, \mathfrak{g}_1 \, e_{21} = \mathfrak{d}_1 \, \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{G}_{21} .$$

On a une application de $\mathfrak{G}_{11}$ sur $\mathfrak{G}_{21}$.

Posons $a_{11}\, e_{21} = a_{21}$, $b_{11}\, e_{21} = b_{21}$, etc. (on a toujours $e_{11}\, e_{21} = e_{21}$). Cette application est un homomorphisme, en effet :

$$a_{11}\, e_{21} \times b_{11}\, e_{21} = a_{11}\, b_{11}\, e_{21} .$$

D'autre part

$$a_{21}\, e_{11} = a_{11}\, e_{21}\, e_{11} = a_{11}\, e_{11} = a_{11} ;$$

l'application est donc biunivoque, et $\mathfrak{G}_{11}$ et $\mathfrak{G}_{21}$ sont des groupes isomorphes. Pour les autres groupes $\mathfrak{G}_{i1}$, on définit de même :

$$\boxed{a_{11}\, e_{i1} = a_{i1}}$$

Il en résulte $a_{i1}\, e_{ji} = a_{j1}$, et plus généralement : $a_{i1}\, b_{ji} = a_{j1}\, b_{j1}$. Ceci montre qu'en connaissant la table de multiplication de $\mathfrak{G}_{11}$, on connaît celle de $\mathfrak{d}_1$.

Prenons successivement tous les idéaux à gauche minimaux, on obtient :

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{G}_{i1} + \mathfrak{G}_{i2} \dots + \mathfrak{G}_{ik} \dots \quad (i = 1 , 2 \dots)$$

On connaît la structure de $\mathfrak{G}_{i1}$, contenu dans $\mathfrak{d}_1$. Or $\mathfrak{G}_{i2} = e_{i2}\, \mathfrak{G}_{i1}$. On définit $e_{i2}\, a_{i1} = a_{i2}$, $e_{i2}\, b_{i1} = b_{i2}$; etc. de même

$$\boxed{e_{ik}\, a_{i1} = a_{ik}}$$

les a_{i1}, $b_{i1} \dots$ étant définis dans $\mathfrak{d}_1$. On montre comme dans $\mathfrak{d}_1$ que tous les $\mathfrak{G}_{ik}$ sont isomorphes à $\mathfrak{G}_{i1}$, donc à $\mathfrak{G}_{11}$; tous les groupes $\mathfrak{G}_{ik}$ sont isomorphes entre eux. Quel que soit i, on a :

$$b_{ik}\, a_{i1} = b_{ik}\, a_{ik} .$$

Dans chacun des idéaux à gauche $\mathfrak{g}_i$, comme dans $\mathfrak{d}_1$, on connaît la table de multiplication quand on connaît celle de $\mathfrak{C}_{11}$. Mais ceci n'est en général plus vrai dans les idéaux à droite $\mathfrak{d}_k$ $(k \neq 1)$. En général :

$$a_{ik}\, e_{jk} \neq a_{jk} \,.$$

SUSCHKEWITSCH a montré que $a_{ik}\, e_{jk} = \bar{a}_{jk}$, la correspondance $a_{jk} \longleftrightarrow \bar{a}_{jk}$ étant un automorphisme interieur de $\mathfrak{C}_{ik}$, et a construit des tables de multiplication de demi-groupes finis [5] (en prenant des demi-groupes d'applications d'un ensemble fini dans lui-même).

B. D est un demi-groupe avec zéro contenant au moins un idéal à gauche minimal. - Toujours par analogie avec les anneaux, nous supposons D sans idéaux nilpotents. Soit $\mathfrak{g}$ un idéal à gauche minimal il ne contient pas d'autre sous-idéaux que lui-même ou zéro. $\mathfrak{g}$ n'étant pas nilpotent, on a nécessairement $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}$.

Pour $x \in \mathfrak{g}$, Dx est un idéal à gauche contenu dans $\mathfrak{g}$. On ne peut avoir $Dx = 0$, sinon $\{x , 0\}$ serait un idéal nilpotent ; donc $Dx = \mathfrak{g}$.

Partition des idéaux minimaux. - Soient $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ deux idéaux minimaux ; on a toujours $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = 0$ et $\mathfrak{g}_1 \; \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2$ ou 0 .

1° Tout idéal minimal à gauche est idempotent, $\mathfrak{g}_1^2 \neq 0$.

2° $\mathfrak{g}_1 \; \mathfrak{g}_2 \neq 0 \longrightarrow \mathfrak{g}_2 \; \mathfrak{g}_1 \neq 0$, en effet

$$\mathfrak{g}_1 \; \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2 \longrightarrow \mathfrak{g}_2 \; \mathfrak{g}_1 \; \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2^2 = \mathfrak{g}_2$$

donc, on ne peut avoir $\mathfrak{g}_2 \; \mathfrak{g}_1 = 0$.

3° $\mathfrak{g}_1 \; \mathfrak{g}_2 \neq 0$ et $\mathfrak{g}_2 \; \mathfrak{g}_3 \neq 0 \longrightarrow \mathfrak{g}_1 \; \mathfrak{g}_3 \neq 0$ en effet :

$$\mathfrak{g}_1 \; \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}_1 \; \mathfrak{g}_2 \; \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}_2 \; \mathfrak{g}_3 \neq 0 \,.$$

La relation $\mathfrak{g}_1 \; \mathfrak{g}_2 \neq 0$ entre $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ est une équivalence qui répartit les idéaux minimaux en classes disjointes, deux idéaux $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ appartenant à la même classe si, et seulement si $\mathfrak{g}_1 \; \mathfrak{g}_2 \neq 0$.

Si $\mathfrak{g}$ est un idéal à gauche minimal, $\mathfrak{g}\, a$ est soit nul, soit un idéal à gauche minimal, en effet, tout élément de $\mathfrak{g}\, a$ s'écrit xa, $x \in \mathfrak{g}$, donc $Dxa = \mathfrak{g}\, a$, et $\mathfrak{g}\, a$ est minimal, et appartient à la même classe que $\mathfrak{g}$, puisque

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}\, a = \mathfrak{g}\, a \neq 0 \,.$$

Réciproquement, tout idéal à gauche minimal appartenant à la même classe que $\mathfrak{g}$

s'écrit $\mathcal{G}' = \mathcal{G}a$; en effet, puisque $\mathcal{G}\mathcal{G}' \neq 0$, il existe $a \in \mathcal{G}'$ tel que $\mathcal{G}a \neq 0$ ($\mathcal{G}a$ idéal à gauche contenu dans $\mathcal{G}'$) donc $\mathcal{G}a = \mathcal{G}'$.

<u>L'idéal bilatère</u> $\mathcal{J} = \bigcup_{a \in D} \mathcal{G}a$ <u>est donc la réunion de tous les idéaux à gauche minimaux qui appartiennent à la même classe que</u> $\mathcal{G}$ <u>dans la partition précédente</u>.

On montrerait comme dans le cas d'un demi-groupe sans zéro que $\mathcal{J}$ est minimal. Mais, D ayant un zéro, $\mathcal{J}$ n'est plus unique. Deux idéaux minimaux bilatères distincts $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ (correspondant à deux classes distinctes de la partition) vérifient $\mathcal{J} \cap \mathcal{J}' = 0$, $\mathcal{J}\mathcal{J}' = 0$.

Cela montre que deux idéaux bilatères minimaux d'un même demi-groupe ont des structures tout à fait indépendantes. Comme dans le cas où D est sans zéro, nous allons faire l'hypothèse supplémentaire d'existence d'un idéal minimal à droite, mais cette fois-ci, <u>contenu dans l'idéal bilatère minimal</u> $\mathcal{J}$ (ou l'hypothèse d'existence d'un idempotent dans $\mathcal{J}$, qui est équivalente). Il résulte de cette hypothèse que $\mathcal{J}$ est la réunion de tous les idéaux à droite minimaux de D appartenant à une classe d'une partition des idéaux à droite de D analogue à celle que nous avons faite sur les idéaux à gauche.

Soient $\mathfrak{d}_k$, $\mathcal{G}_i$ un idéal à droite et un idéal à gauche minimaux de D contenus dans $\mathcal{J}$. On a les propriétés suivantes :

1° On a toujours $\mathfrak{d}_k \mathcal{G}_i \neq 0$; en effet,

$$\mathfrak{d}_k \mathcal{G}_i = 0 \longrightarrow \mathfrak{d}_k \mathcal{G}_i D = 0$$

ce qui est impossible puisque $\mathfrak{d}_k \mathcal{J} \supset \mathfrak{d}_k^2 \neq 0$. Comme $\mathfrak{d}_k \mathcal{G}_i \subseteq \mathfrak{d}_k \cap \mathcal{G}_i$, on a toujours $\mathfrak{d}_k \cap \mathcal{G}_i \neq 0$.

2° <u>Dans tout idéal</u> $\mathcal{G}_i$ <u>il existe au moins un</u> $x \in \mathcal{G}_i$ <u>tel que</u> $x^2 \neq 0$. En effet, pour tout $x \in \mathcal{G}_i$ $Dx = \mathcal{G}_i$; si pour tout $x \in \mathcal{G}_i$ on avait $x^2 = 0$, on aurait $Dx.x = \mathcal{G}_i x = 0$, tout $x \in \mathcal{G}_i$, donc $\mathcal{G}_i^2 = 0$, ce qui est impossible.

Tout élément x appartient à un ensemble $\mathcal{G}_i \cap \mathfrak{d}_k$ et à un seul.

<u>Montrons que si</u> $x^2 \neq 0$ <u>pour au moins un</u> $x \in \mathcal{G}_i \cap \mathfrak{d}_k$, $\mathcal{G}_i \cap \mathfrak{d}_k$ <u>est un groupe avec zéro</u>. <u>Si</u> $x^2 = 0$ <u>pour au moins un</u> $x \in \mathcal{G}_i \cap \mathfrak{d}_k$, $\mathcal{G}_i \cap \mathfrak{d}_k$ <u>est un demi-groupe de carré nul</u>.

(Il résulte de ceci et du paragraphe précédent que tout idéal minimal de $\mathcal{J}$ contient au moins un groupe, donc un élément idempotent).

Supposons d'abord $x^2 = 0$, $x \in \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{d}_k$. On a $Dx = \mathfrak{g}_i$, $xD = \mathfrak{d}_k$; donc $Dx.xD = \mathfrak{g}_i.\mathfrak{d}_k = 0$; en particulier $[\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{d}_k]^2 = 0$. Si $x^2 \neq 0$, $\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{d}_k$ ne contient pas de diviseurs de zéro ; car si on avait $yz = 0$ pour y, $z \neq 0$ et $\in \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{d}_k$, on aurait $Dy = \mathfrak{g}_i$, $zD = \mathfrak{d}_k$ et $Dy.zD = \mathfrak{g}_i \mathfrak{d}_k = 0$; on ne pourrait donc avoir $x^2 \neq 0$ pour $x \in \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{d}_k$. Il en résulte que $\mathfrak{g}_i y \neq 0$ (car $\mathfrak{g}_i y^2 \neq 0$), et on montre alors, comme dans le cas où D est sans zéro, que $\mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i - \{0\}$ est un groupe, puisque $\mathfrak{d}_k \mathfrak{g}_i = \mathfrak{d}_k \cap \mathfrak{g}_i$.

$\mathfrak{D}$ est donc une réunion d'ensembles $\mathfrak{d}_k \cap \mathfrak{g}_i$ qui sont, soit des groupes avec zéro, soit des demi-groupes de carré nul. Montrons que tous les groupes sont isomorphes entre eux. La méthode utilisée dans le cas où D est sans zéro n'est plus applicable, $\mathfrak{C}_{11}$ et $\mathfrak{C}_{ik}$ peuvent être des groupes sans que $\mathfrak{C}_{i1}$ soit un groupe.

Prenons pour simplifier $\mathfrak{C}_{11} = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{C}_{22} = \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{C}_{11}$ et $\mathfrak{C}_{22}$ sont des groupes. Comme $\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \neq 0$, il existe $p' \in \mathfrak{g}_2$ tel que $\mathfrak{g}_1 p' \neq 0$; en particulier $e_{11} p' \neq 0$; posons $e_{11} p' = p$, $p \in \mathfrak{d}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{C}_{21}$. D'où

$$\mathfrak{g}_1 p' = \mathfrak{g}_1 p = \mathfrak{g}_2 ,$$

donc, il existe $q \in \mathfrak{g}_1$, tel que $qp = e_{22}$. $q \in \mathfrak{d}_2 \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{C}_{12}$. Considérons la correspondance $x \longrightarrow qxp$; $x \in \mathfrak{d}_1 \cap \mathfrak{g}_1$, donc $qxp \in \mathfrak{d}_2 \cap \mathfrak{g}_2$. Cette correspondance est une application de $\mathfrak{C}_{11}$ sur $\mathfrak{C}_{12}$, en effet :

$$q\, \mathfrak{C}_{11}\, p = q\, \mathfrak{d}_1 \mathfrak{g}_1\, p = \mathfrak{d}_2\, \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{C}_{22}.$$

C'est un homomorphisme : en effet, remarquons que $(pq)^2 = pqpq = pe_2q = pq$. D'autre part, $qpq \neq 0$, car $qpqp = e_{22} \neq 0$, pq, idempotent non nul contenu dans $\mathfrak{C}_{11}$, est égal à e_{11}. Donc $qxp \times qyp = qxe_{11}yp = qxyp$. La correspondance est biunivoque : comme $q \in \mathfrak{g}_1$ et $p \in \mathfrak{d}_1$, il existe r et s tels que $rq = e_{11}$ et $ps = e_{11}$. A tout élément qxp correspond donc $rqxps = x$. Les groupes $\mathfrak{C}_{11}$ et $\mathfrak{C}_{22}$ sont bien isomorphes.

C. D contient des idéaux nilpotents.

Si $\mathfrak{g}$ est un idéal à gauche minimal, pour tout $x \in D$, x est : soit nul, soit un idéal à gauche minimal (même démonstration que pour D sans idéaux nilpotents, le cas $Dx = 0$ n'étant alors pas exclu).

Un idéal à gauche minimal est : soit nilpotent, soit idempotent. Les idéaux à gauche idempotents peuvent être répartis en classes disjointes de la même façon que dans les demi-groupes sans idéaux nilpotents ; deux idéaux $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$

appartiennent à la même classe si et seulement si $\mathfrak{g}_1 \ \mathfrak{g}_2 \neq 0$.

Il en résulte que si $\mathfrak{g}$ est un idéal minimal à gauche idempotent, l'idéal bilatère $\mathfrak{g}D$ est une réunion d'idéaux à gauche minimaux ; ceux de ces idéaux qui sont idempotents sont ceux qui appartiennent à la même classe que $\mathfrak{g}$ dans la partition définie plus haut. Si $\mathfrak{g}a$ est idempotent, il existe donc b tel que $\mathfrak{g}ab = \mathfrak{g}$ (ce résultat sera utilisé plus loin).

3. <u>Radical d'un demi-groupe</u>.

La réunion $\mathfrak{R}$ de tous les idéaux à <u>gauche</u> nilpotents d'un demi-groupe D est un idéal bilatère, qui est également la réunion de tous les idéaux à <u>droite</u> nilpotents de D , et que nous appellerons <u>radical</u> de D . Soit, en effet, $\mathfrak{g}$ un idéal à gauche nilpotent, $\mathfrak{g}^p = 0$; pour tout $x \in D$, $\mathfrak{g}x$ est : ou nul, ou un idéal à gauche nilpotent, puisque $(\mathfrak{g}x)^p \subseteq \mathfrak{g}^p x = 0$. $\mathfrak{R}$ est donc un idéal bilatère. D'autre part, si $\mathfrak{d}$ est un idéal à droite nilpotent $(\mathfrak{d} \cup \mathfrak{d}D)$ est un idéal bilatère (donc un idéal à gauche) nilpotent, qui contient $\mathfrak{d}$ et appartient à $\mathfrak{R}$, donc $\mathfrak{R}$ contient $\mathfrak{d}$.

$D^* = D - \mathfrak{R}$ étant le demi-groupe associé à D et $\mathfrak{R}$ par l'homomorphisme de Rees, on constate aisément les propriétés suivantes :

<u>Tout idéal de D a pour image dans D^* un idéal de D^* et réciproquement tout idéal de D^* est l'image d'au moins un idéal de D . Un idéal minimal et non nilpotent de D a pour image dans D^* un idéal minimal dans D^* , sur les demi-groupes vérifiant la condition minimale pour les idéaux à gauche</u>.

1° Si D vérifie la condition minimale pour les idéaux à gauche <u>tout idéal contenu dans son radical $\mathfrak{R}$ est nilpotent</u>. C'est le théorème de d'Hopkins, qui se démontre pour les demi-groupes de la même façon que pour les anneaux (voir, par exemple, JACOBSON [3] , p. 63-64). Il en résulte que le demi-groupe $D^* = D - \mathfrak{R}$ n'a pas d'idéaux nilpotents.

Un idéal de D^* , $\gamma^* \neq 0$ est l'image de l'idéal de D , $\gamma \subseteq \mathfrak{R}$. Supposons $(\gamma^*)^p = 0$. On a alors $\gamma^p \subseteq \mathfrak{R}$, γ^p est nilpotent et il existe un entier q tel que $\gamma^{pq} = 0$. γ est donc nilpotent et $\gamma \subseteq \mathfrak{R}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° Tout idéal à gauche de D contient au moins un idéal minimal $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{j}$ l'idéal bilatère réunion de tous les idéaux à gauche minimaux de D (si D est sans zéro, $\mathfrak{j}$ est l'idéal minimum $\mathfrak{I}$) . Considérons le demi-groupe $\bar{D} = D - \mathfrak{j}$, associé à D et $\mathfrak{j}$ par l'homomorphisme de Rees, nous obtenons : <u>Tout idéal de</u>

D a pour image dans $\tilde{D}$ un idéal de $\tilde{D}$, et réciproquement tout idéal de $\tilde{D}$ est l'image d'au moins un idéal de D. La condition minimale pour les idéaux à gauche est vérifiée dans $\tilde{D}$.

Considérons un idéal à gauche de D qui n'est pas une réunion d'idéaux minimaux et dont tout sous-idéal à gauche propre est une réunion d'idéaux minimaux. Cet idéal à pour image dans $\tilde{D}$ un idéal à gauche minimal dans $\tilde{D}$, et réciproquement, tout idéal qui est l'image inverse d'un idéal à gauche minimal de $\tilde{D}$ a ces propriétés. Nous appellerons idéal mineur de D associé à $\tilde{\mathfrak{g}}$ le plus petit idéal de D qui a pour image un idéal à gauche $\tilde{\mathfrak{g}}$ minimal dans $\tilde{D}$, c'est-à-dire l'idéal à gauche engendré par les éléments de D qui s'appliquent biunivoquement sur les éléments de $\tilde{\mathfrak{g}}$. On montre facilement que : Si $\mathfrak{g}'$ est un idéal mineur, on a $\mathfrak{g}'^2 = \mathfrak{g}'$ ou $\mathfrak{g}'^2 \subsetneq \mathfrak{I}$. Si $\mathfrak{g}'$ est un idéal à gauche mineur, pour tout $a \in D$, $\mathfrak{g}'a$ est : soit un idéal mineur, soit une réunion d'idéaux minimaux à gauche, soit l'idéal zéro. L'idéal bilatère $\mathfrak{g}'D$ est une réunion d'idéaux mineurs et d'idéaux minimaux à gauche.

Dans ce qui suit, D est supposé sans zéro. D'après la condition minimale un idéal à gauche mineur contient un nombre fini d'idéaux minimaux distincts $\mathfrak{g}_i$. Posons $\mathfrak{g}' = \hat{\mathfrak{g}} + \sum \mathfrak{g}_i$. Soit $a \in D$; si $\mathfrak{g}'a$ est un idéal mineur,

$$\mathfrak{g}'a = \hat{\mathfrak{g}}a + \sum \mathfrak{g}_i a ;$$

les $\mathfrak{g}_i a$ sont les idéaux minimaux de $\mathfrak{g}'a$. De plus si $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}'a$ sont idempotents, il existe $b \in D$ tel que $\mathfrak{g}'ab = \mathfrak{g}'$. Il en résulte que $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}'a$ contiennent nécessairement le même nombre d'idéaux minimaux. D'où :

Si $\mathfrak{g}'$ est un idéal à gauche mineur idempotent d'un demi-groupe D sans zéro, vérifiant la condition minimale pour les idéaux à gauche, tous les idéaux mineurs à gauche idempotents contenus dans l'idéal bilatère $\mathfrak{J}' = \mathfrak{g}'D$ contiennent le même nombre d'idéaux minimaux à gauche.

En appliquant plusieurs fois de suite l'homomorphisme de Rees, on peut poursuivre l'étude du demi-groupe D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A.H.). - Semigroups containing minimal ideals, Amer. J. of Math., t. 70, 1948, p. 521-526.

[2] CLIFFORD (A.H.). - Semigroups without nilpotent ideals, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 834-844.

[3] JACOBSON (Nathan). - Theory of rings. - New York, American mathematical Society, 1948 (Mathematical Surveys, n° 2).

[4] REES (D.). - On semi-groups, Proc. Cambridge philos. Soc., t. 36, 1940, p. 387-400.

[5] SUSCHKEWITSCH (Anton). - Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Unkehrbarkeit, Math. Annalen, t. 99, 1928, p. 30-50.