Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

RAYMOND RAFFIN

# Anneaux non-associatifs

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 4 (1950-1951), exp. n° 4, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1950-1951__4__A4_0>

-:-:-:-

Séminaire A. CHÂTELET et P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1950/51

Exposé n° 4

-:-:-:-

ANNEAUX NON-ASSOCIATIFS

par Raymond RAFFIN

Si, dans la définition classique des anneaux, on conserve tous les axiomes, sauf l'associativité de la multiplication qu'on supprime, on obtient ce qu'on appelle généralement (et improprement) <u>les anneaux non-associatifs</u>. Les anneaux (associatifs) en sont des cas particuliers. Il m'est impossible de donner, même un aperçu, de tout ce qu'on a pu déjà découvrir dans ce vaste domaine. Je me bornerai donc aux propriétés formelles les plus simples en ajoutant quelques idées personnelles.

Il y a plus de cent ans GRAVES et CAYLEY [10] construisaient les octaves, premier exemple d'algèbre non-associative. Mais alors que la non-commutativité à peine antérieure apparaissait féconde en mathématiques et en physique avec les quaternions, puis avec les algèbres associatives générales (MAXWELL utilise les quaternions, DIRAC [11] les algèbres non-commutatives infinies) la non-associativité semble se révéler rédhibitoire et stérile : les octaves sont reléguées, à peu de chose près, au rang de curiosité, surtout depuis qu'HURWITZ [14], en 1898, montre qu'on ne peut généraliser pour $n > 8$ la formule :

$$\left(\sum_1^n x_i^2\right)\left(\sum_1^n y_i^2\right) = \sum_1^n z_i^2 \quad ,$$

qui peut être déduite pour $n = 2$ , $4$ , $8$ , des propriétés des nombres complexes, des quaternions et des nombres de Cayley. L'étude des algèbres non-associatives progresse à peine. Cependant il apparaît que certaines formules de la théorie des quanta prennent un aspect plus simple si on les exprime en se servant d'une multiplication non-associative, en fait de l'opération : $xJy = xy + yx$ (où les produits du second membre sont des produits associatifs ordinaires). Aussi JORDAN, von NEUMANN et WIGNER tentent-ils, en 1933 et 1934 [17], de construire, en partant des propriétés formelles de l'opération $J$ , une généralisation de la théorie des quanta, avec l'espoir que la théorie généralisée satisferait enfin aux exigences relativistes et mettrait fin aux paradoxes de la théorie quantique des champs. Ils échouent. DIRAC affirme [12] "echec prévisible, les algèbres non-associatives ne satisfaisant pas suffisamment au principe de la "beauté mathématique" d'une théorie physique". En réalité, nous verrons dans un instant que, pour une part, vraisemblablement, l'échec provient de ce qu'on s'était limité à des algèbres admettant une base finie.

En tous cas c'est à peu près à partir de ce moment que les théories non-associatives commencent à progrsser notablement.

Avant de donner une idée de quelques aspects de cette progression, je vais préciser les définitions essentielles.

## 1. Définitions.

Un anneau (associatif) est un ensemble $A$ où sont définies deux opérations désignées par $+$ et $\times$ :

1° $A$ est un groupe abélien par rapport à l'addition $+$ .

2° $A$ est un demi-groupe par rapport à la multiplication $\times$ .

3° La multiplication est distributive bilatéralement par rapport à l'addition.

Si de plus $A$ est un module sur un anneau $\mathcal{B}$ associatif, commutatif, et avec un élément unité, on dit que $A$ est une algèbre sur $\mathcal{B}$ . (Tout anneau pouvant être considéré comme une algèbre, au moins sur l'anneau des entiers rationnels, je réserverai le nom d'algèbre aux anneaux pour lesquels interviennent des propriétés non triviales de $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire indépendantes de la structure d'anneau de $A$).

## 2. Anneaux particuliers.

On peut, tout d'abord, au lieu de supprimer purement et simplement l'associativité $[(xy)\ z = x(xy)]$ incluse dans la définition du demi-groupe, altérer cette propriété pour définir des ensembles particuliers d'anneaux non-associatifs et d'algèbres non-associatives.

On y arrive, soit en construisant effectivement une opération non-associative (par exemple l'opération $J$ , ou bien l'une des 3 multiplications non-associatives des matrices [3], soit d'une façon abstraite en posant a priori une relation qui modifie ou généralise l'associativité (par exemple en posant $(xy)\ z = -\ x(yz)$ ou $(xy)\ z = \lambda x(yz)$ , $\lambda \in \mathcal{B}$). On peut encore combiner les deux méthodes, ce qui a plus de chances de conduire à des systèmes utilisables.

## 3. Anneau de Lie et anneaux de Jordan.

C'est ainsi qu'ont été définis les anneaux de Lie et les anneaux de Jordan :

Si on pose :

(L) $\qquad xLy = xy - yx$

(J) $\qquad xJy = xy + yx \quad ,$

où $xy$ désigne un produit associatif ordinaire, on a :

(1) $\qquad xLy = - yLx \ , \quad xL(yLz) + yL(zLx) + zL(xLy) = 0 \quad ;$

(2) $\qquad xJy = yJx \ , \quad x^2 J(yJx) = (x^2 Jy) Jx \quad .$

Par exemple, l'ensemble des matrices antisymétriques est clos par rapport à l'opération $L$ et l'ensemble des matrices symétriques est clos par rapport à l'opération $J$ .

Inversement les anneaux où la multiplication satisfait respectivement aux relations (1) et (2) sont les anneaux de Lie et les anneaux de Jordan. Il convient d'ajouter immédiatement que, dans les cas usuels, ces définitions n'apportent pas de systèmes absolument nouveaux, puisqu'on a les deux propositions connues suivantes :

1° Toute algèbre de Lie, sur un corps, est isomorphe à une algèbre de matrices infinies par rapport à l'opération $xLy = xy - yx$ [9].

2° Toute algèbre simple de Jordan, ayant une base finie sur un corps $F$ , non modulaire, est isomorphe à une algèbre de Jordan de matrices finies (ou algèbre spéciale de Jordan) sauf si elle est isomorphe à une certaine algèbre $\Omega$ . Dans ce cas, il existe une extension scalaire $K$ de degré fini sur $F$ telle que $\Omega_K$ soit isomorphe à l'algèbre des matrices carrées hermitiennes à 3 lignes dont les éléments sont les nombres de Cayley [4].

C'est de cette deuxième propriété que provient l'incapacité des algèbres finies de Jordan à fournir une généralisation fondamentale de la théorie des quanta : les algèbres spéciales de Jordan n'apportent (par elles-mêmes) qu'un moyen (commode) d'écrire les mêmes formules, les algèbres $\Omega$ sont trop restreintes.

## 4. Généralisations progressives.

Je vais maintenant considérer les généralisations progressives simples et aussi naturelles que possible de la loi associative. Ces généralisations fournissent effectivement des algèbres entièrement nouvelles et prennent leur point de départ dans les propriétés formelles des octaves.

En effet si $x$ , $y$ , $z$ sont des nombres de Cayley quelconques, en appelant associateur de $x$ , $y$ , $z$ l'expression

$$(x, y, z) = x(yz) - (xy)z ,$$

on sait que cet associateur est une fonction alternée de ses arguments. Inversement ZORN [33] appelle anneau alternatif tout anneau ayant cette propriété d'alternance de l'associateur, propriété qui devient triviale dans le cas d'un anneau associatif quelconque. On peut remplacer cette propriété par une condition plus faible : pour qu'un anneau $A$ soit alternatif il faut (si la caractéristique est première à 2) et il suffit que pour tout $x$ et $y$ de $A$ on ait deux quelconques des trois relations :

(3) $$(xx)\,y = x(xy) , \quad (xy)\,x = x(yx) , \quad (yx)\,x = y(xx) .$$

L'intérêt des anneaux alternatifs réside en particulier dans les deux propositions suivantes :

1° les seules algèbres alternatives réelles à division sont les nombres réels, les nombres complexes, les quaternions et les octaves.

2° si dans un anneau alternatif on a : $(a , b , c) = 0$ , le sous-anneau engendré par $a , b , c$ est associatif [31].

Il résulte de cette propriété le théorème d'Artin : le sous-anneau engendré par deux éléments quelconques est associatif.

Ce théorème montre en particulier que les propriétés d'inversibilité des anneaux associatifs s'étendent sans changement aux anneaux alternatifs avec élément unité, c'est-à-dire qu'on a les quatre cas possibles :

(T)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 inverse bilatère unique | une infinité d'inverses à gauche<br>0 inverse à droite | 0 inverse à gauche<br>une infinité à droite | 0 inverse à gauche<br>0 inverse à droite |

Nous verrons que ce tableau n'est pas valable pour un anneau non associatif quelconque.

Deux quelconques des relations (3) entraînant la troisième, pour généraliser les anneaux alternatifs on doit ne conserver qu'une seule de ces relations. A. A. ALBERT [7] a été alors conduit à trois généralisations distinctes.

1° $(xx)\,y = x(xy)$ définit les anneaux alternatifs à gauche.

2° $(xy)\,x = x(yx)$ définit les anneaux flexibles.

3° $(yx)\,x = y(xx)$ définit les anneaux alternatifs à droite.

Nous allons porter notre attention sur les anneaux flexibles, car ces anneaux se distinguent profondément des anneaux alternatifs à gauche ou à droite par les propriétés des puissances d'un élément.

5. Anneaux monogènes.

Appelons anneau monogène $[a]$ un anneau engendré par un seul élément $a$ ; $[a]$ contient les puissances principales à droite de $a$ définies par $a^1 = a$, $a^n = a^{n-1} a$ ; les puissances principales à gauche de $a$ définies d'une façon analogue et les puissances mixtes qui sont des produits de puissances principales associées d'une façon quelconque ; en outre, si $a$ appartient à un anneau $A$ avec élément unité $e$ on conviendra que $[a]$ contient $e$, et on pourra poser $a^0 = e$.

6. Anneaux à puissances associatives.

Si $a$ appartient à un anneau associatif (ou, par conséquent, alternatif) $A$, $[a]$ est trivialement associatif et commutatif. ALBERT montre [7] qu'il en est de même dans le cas où $A$ (de caractéristique première à 2) est alternatif seulement d'un côté. Si $A$ est tel que pour tout $x$ de $A$, $[x]$ est associatif $A$ est dit à puissances associatives [6]. Il faut et il suffit pour cela que $x^p x^q = x^{p+q}$, pour tout couple $(p , q)$ d'entiers naturels. ALBERT a montré que si $A$ est de caractéristique zéro (c'est-à-dire si $na = 0$ entraîne $a = 0$ pour tout entier naturel $n$) il suffit que l'on ait $xx^2 = x^3$ et $x^2 x^2 = x^4$.

Les anneaux de Lie $(x^2 = 0)$ et les anneaux de Jordan sont à puissances associatives. L'ensemble des anneaux à puissances associatives est donc très vaste et en fait, ALBERT, qui a cherché à en donner une théorie structurale [6], a dû distinguer un grand nombre de sous-catégories (anneaux statiques, anneaux standards, anneaux quasi-associatifs, etc.). L'intérêt des anneaux à puissances associatives provient de la simplicité de tout anneau monogène et du fait que P. JORDAN a montré qu'en mécaque quantique pour qu'une algèbre ait un sens physique il est nécessaire qu'elle soit à puissances associatives [26].

Cependant la catégorie des anneaux à puissances associatives ne contient pas les anneaux flexibles puisqu'en particulier il existe des anneaux commutatifs non-associatifs. Les conditions pour qu'un anneau flexible soit à puissances associatives sont seulement un peu plus simples : il suffit que la caractéristique soit première à 30 et que $x^2 x^2 = x^4$.

7. Anneaux à puissances commutatives.

J'ai montré que pour englober les anneaux flexibles il est nécessaire de considérer des anneaux à puissances commutatives définis par la condition que tout sous-anneau monogène soit commutatif. En effet en se bornant aux anneaux de caractéristique première à 2, j'ai montré [24] que dans un anneau flexible tout sous-anneau engendré par n éléments qui commutent entre eux était commutatif. Il en résulte que tout anneau flexible (de caractéristique première à 2) est à puissances commutatives. J'ai montré [26] que la condition $x^p x^q = x^q x^p$ realisée pour tout couple $(p, q)$ d'entiers naturels n'était pas suffisante pour qu'un anneau soit à puissances commutatives. Plus généralement :

a. Etude des puissances (positives). - Si on affaiblit au maximum la relation de flexibilité pour la généraliser on obtient $xx^2 = x^3$. J'ai construit à partir de cette relation une gamme descendante de catégories d'anneaux. Cette gamme est définie de la façon suivante :

$A_1$ désigne un anneau absolument quelconque.

$A_2$ désigne un anneau (quelconque) à cubes uniques, c'est-à-dire pour lequel on a : $xx^2 = x^3$.

$A_3$ désigne un anneau à puissances principales uniques, c'est-à-dire tel que l'on ait $xx^n = x^{n+1}$ (pour tout entier naturel n).

$A_4$ désigne un anneau à puissances principales commutatives, c'est-à-dire tel que l'on ait : $x^p x^q = x^q x^p$ pour tout couple $(p, q)$ d'entiers naturels).

$A_5$ désigne un anneau semi-flexible, c'est-à-dire tel que $(xy)x = x(yx)$ si $y \in [x]$.

$A_6$ désigne un anneau à puissances commutatives.

$A_7$ désigne un anneau à puissances associatives.

Il est évident a priori qu'on a schématiquement :

$$\{A_1\} \supseteq \{A_2\} \supseteq \{A_3\} \supseteq \{A_4\} \supseteq \{A_5\} \supseteq \{A_6\} \supseteq \{A_7\} .$$

Je vais indiquer de quelle façon j'ai précisé ces relations [25] d'abord dans le cas où on restreint par des conditions simples les ensembles considérés, puis dans le cas général :

Je désigne par $A_i^*$ un anneau $A_i$ de caradtéristique première à 6 et du n-ième degré avec $n < 5$. Cela signifie que $x^4$ appartient au module engendré par $x^3$, $x^2$, $x$ et $e$ (s'il existe). J'ai montré qu'on a :

$$(4)\quad \begin{cases} \{A_1^*\} \supset \{A_2^*\} = \{A_3^*\} = \{A_4^*\} = \{A_5^*\} = \{A_6^*\} \supset \{A_7^*\} , \\ \text{car } A_i^* = A_j^* \qquad (i , j = 2 , 3 , 4 , 5 , 6) . \end{cases}$$

Du fait que $x^4 \in (x^3 , x^2 , x , e)$ on ne peut d'ailleurs pas déduire, en général, que module $[x] = (x^3 , x^2 , x , e)$ ce qui rendrait les relations (4) presque triviales. Cependant j'ai montré [27] que, dans des circonstances simples $[x]$ avait son module limité. Par exemple si $A_i^*$ $(i > 1)$ est une algèbre ayant une base finie sur un corps, l'espace vectoriel de toute sous-algèbre monogène est au plus de dimension 7 .

Au contraire les égalités (4) ne seraient plus toutes vraies si l'on considérait des algèbres du 5e degré. A partir du 7e degré elles sont toutes remplacées par des inclusions strictes (sauf la dernière) si bien que :

$$(5)\quad \{A_1^{(2)}\} \supset \{A_2^{(2)}\} \supset \{A_3^{(2)}\} \supset \{A_4^{(2)}\} \supset \{A_5^{(2)}\} = \{A_6^{(2)}\} \supset \{A_7^{(2)}\} .$$

où $A_i^{(2)}$ désigne un anneau $A_i$ de caractéristique première à 2. Ces relations sont d'ailleurs encore vraies si on se limite à des ensembles d'anneaux de caractéristique zéro. Enfin si l'on supprime toute restriction on obtient, schématiquement :

$$(6)\quad \{A_1\} \supset \{A_2\} \supset \{A_3\} \supset \{A_4\} \supset \{A_5\} \supset \{A_6\} \supset \{A_7\} .$$

J'ai démontré ces relations à la fois par un procédé de linéarisations et par des contre-exemples (voir [28] ).

b. Puissances négatives : problèmes de divisibilité. - Les relations (5) et (6) mettent en évidence la variété et la complication des anneaux à puissances non-associatives. Cependant, avec les anneaux flexibles, ces anneaux interviennent d'une façon naturelle si l'on veut étudier non plus les puissances ordinaires positives d'un élément, mais ses puissances négatives.

Toutefois, l'existence même de ces puissances négatives soulève des problèmes de divisibilité dans les anneaux non-associatifs généraux. Aussi avant d'aborder les questions relatives aux puissances négatives, je vais donner brièvement, d'abord des notions très succintes sur les anneaux non-associatifs généraux puis les résultats simples et importants sur les anneaux non-associatifs généraux à division.

8. Anneaux non-associatifs généraux.

Dans un anneau non-associatif général la multiplication n'a plus aucune propriété propre à part la fermeture.

1° Modules de multiplication. - Il est commode surtout dans le cas des algèbres ayant une base finie sur $\mathcal{B}$ d'introduire [1] les modules de multiplication à gauche et à droite de la façon suivante :

Si $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ et $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ on a :

$$ax = \sum_{i,j,k}' \alpha_i \gamma_{ijk} \xi_j e_k = (\alpha_1 , \dots , \alpha_n) \left[ \sum_j' \begin{pmatrix} \gamma_{1j1} & \dots & \gamma_{1jn} \\ \gamma_{nj1} & \dots & \gamma_{njn} \end{pmatrix} \xi_j \right] .$$

On peut donc écrire : $ax = aR_x$ , au second membre $a$ est le vecteur ligne $(\alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ et $R_x$ la matrice $( \sum_j' \gamma_{ijk} \xi_j)$ , ou plutôt l'endomorphisme représenté, avec la base $(e_1 , \dots , e_n)$ par cette matrice. L'ensemble des $R_x$ constitue le module $R$ des multiplications à droite. Si $\mathcal{B}$ est un corps, la dimension de ce module est évidemment $\leqslant n$ . On définit d'une façon analogue le module $L$ des multiplications à gauche comme l'ensemble des $L_x$ tels que $xa = aL_x$ . Enfin l'algèbre $\mathcal{B}[I \, ; \, R^{(i)} \, ; \, L^{(j)}]$ des polynômes à coefficients dans $\mathcal{B}$ en $R^{(i)}$ et $L^{(j)}$ (constituant des bases respectivement de $L$ et de $R$), $I$ étant la transformation identique, est l'algèbre des transformations de $A$.

Il existe une différence évidente et fondamentale avec les algèbres associatives, on a : $(ax)\, y = a(R_x \, R_y)$ et $a(xy) = aR_{xy}$ , si l'algèbre est associative il en résulte l'égalité, quel que soit $a$ , des seconds membres et par suite $R_x \, R_y = R_{xy}$ : en particulier, par rapport à la multiplication des endomorphismes, $R$ forme une algèbre. Au contraire dans le cas non-associatif rien ne prouve qu'il existe dans $A$ un élément $z$ tel que $az = (ax)\, y$ et en fait il n'en existe généralement pas : $R$ ne forme pas une algèbre. Remarque analogue pour $L$ .

Il peut se faire d'ailleurs que $R$ et $L$ forment des algèbres sans pour cela que $A$ soit associative, ce serait le cas pour la loi $(xy)\, z = \lambda x(yz)$ . (Il résulte immédiatement de la définition de l'associativité que, si $r$ et $\ell$ sont des éléments quelconques respectivement de $R$ et de $L$ , pour que $A$ soit associatif il faut et il suffit que l'on ait $r\ell = \ell r$).

L'introduction des ensembles $R$ et $L$ permet souvent de remplacer un calcul non-associatif par un calcul associatif. A. A. ALBERT s'en est beaucoup servi aussi bien pour les algèbres non-associatives générales que pour des algèbres particulières.

2° Généralisations des définitions du cas associatif. - D'une façon générale on a cherché à généraliser les définitions du cas associatif.

a. Simplicité. - Certaines généralisations sont immédiates : ainsi un anneau (non-associatif) sera simple s'il ne contient pas d'idéal propre, et semi-simple s'il est somme directe d'anneaux simples (une algèbre non-associative simple n'a pas forcément d'éléments unité).

b. Centre. - D'autres demandent pour être utiles des conditions supplémentaires ; c'est le cas de la définition du centre d'un anneau non-associatif :

D. REES [29] appelle noyaux d'un anneau non-associatif $A$ les ensembles définis de la façon suivante : $a$ et $b$ étant des éléments quelconques de $A$, le noyau à gauche $N_\ell$ est l'ensemble de tous les éléments $x$ de $A$ tels que $x(ab) = (xa)b$, le noyau médian $N_m$ est l'ensemble des $y$ de $A$ tels que $(ay)b = a(yb)$ et le noyau à droite $N_r$ est l'ensemble des $z$ de $A$ tels que $(ab)z = a(bz)$. Ces noyaux sont évidemment des sous-anneaux associatifs de $A$. Cela étant le centre $\mathcal{C}$ de $A$ est l'intersection des 3 noyaux et du A-commutateur de $A$ (soit $G$) :

$$\mathcal{C} = G \cap N_\ell \cap N_m \cap N_r .$$

Si $\mathcal{C} \neq 0$, $\mathcal{C}$ forme un sous-anneau associatif et commutatif.

c. Radical. - Pour d'autres généralisations on est réduit à choisir seulement certaines propriétés essentielles du cas associatif, par exemple ALBERT [2] définit le radical $R$ d'une algèbre non-associative (ayant une base finie sur un corps) par la propriété que $R$ soit un idéal tel que $A - R$ soit semi-simple, $R$ existe si $A$ est homomorphe à une algèbre semi-simple. Mais, alors que dans le cas associatif $R$ est un idéal nilpotent, il n'en est pas ainsi, en général, dans le cas non-associatif, en particulier $R$ peut être un corps [2].

3° Isotopie. - Le concept d'isomorphisme de deux algèbres se transporte tel quel, mais se généralise utilement par le concept d'isotopie : $A_o$ est isotopique à $A$, si ces algèbres ont le même module $M$ et si

$$x \circ y = (xP.yQ)\, R^{-1} ,$$

où $\circ$ désigne la multiplication dans $A_o$ et où $P$, $Q$, $R$ sont des automorphismes de $M$. L'isotopie est une relation d'équivalence ($A_o$ isotopique à $A$ entraîne $A$ isotopique à $A_o$, etc.).

9. Anneaux à divisions.

On peut appeler anneau à division tout anneau (non-associatif) $D$ tel que si $a \neq 0$ et $b$ appartiennent à $D$ les équations :

$$ax = b , \quad ya = b$$

aient toujours une solution et une seule.

PROPRIÉTÉS immédiates. - Il est clair qu'il faut que D n'ait pas de diviseurs propres de zéro.

Dans le cas des algèbres (non-associatives), ayant une base finie sur un corps, cette condition est suffisante.

Un anneau à division n'a évidemment ni idéal à droite, ni idéal à gauche.

Le fait, pour une algèbre, d'être à division est invariant par isotopie.

Comme tout demi-groupe où la division est toujours possible est un groupe, a fortiori un anneau associatif à division a-t-il un élément unité : c'est une algèbre sur un corps. Il n'en est pas de même dans le cas non-associatif, mais, du moins : toute algèbre à division (ayant une base finie sur un corps) est isotopique à une algèbre à division ayant un élément unité.

De même dans une algèbre à division (finie sur un corps) avec élément unité il peut se faire que le polynôme à droite (par exemple) d'un élément a soit réductible, du moins existe-t-il une algèbre isotope avec unité dans laquelle le polynôme minimum à droite de a est irréductible.

Algèbres réelles à division. - Il serait intéressant de déterminer les anneaux à division ou du moins les algèbres non-associatives à division, ayant une base finie sur un corps. En fait le problème beaucoup plus restreint : déterminer toutes les algèbres (non-associatives) à division, ayant une base finie sur le corps des nombres réels, n'est pas résolu. On sait que l'ordre de cette algèbre doit être $2^n$ mais on ignore si on peut avoir $n > 3$, même quand on se borne au cas des algèbres à puissances associatives [6].

A ce sujet D. REES a obtenu [29] le résultat suivant :

Une algèbre à division ayant une base finie sur le corps des nombres réels, avec un élément unité, dans laquelle 2 au moins des 3 noyaux ne sont pas triviaux est d'ordre 2 ou 4. Si elle est d'ordre 2 elle est isomorphe au corps des nombres complexes sinon elle est isomopique à une algèbre dont les éléments sont des paires de nombres complexes $(z_1, z_2)$ avec une multiplication définie par

$$(z_1, z_2)(w_1, w_2) = (z_1 w_1 + z_2 \bar{w}_2 e^{i\theta}, z_1 w_2 + z_2 \bar{w}_1) ;$$

on peut prendre $(0 < \theta \leq \pi)$.

Les quaternions correspondent évidemment à $\theta = \pi$.

Les autres résultats principaux sont ceux d'ALBERT [5] : il montre que les seules algèbres réelles absolument valuées, à base finie, avec unité, sont alternatives et par suite sont les nombres réels, les nombres complexes, les quaternions ou les nombres de Cayley. La restriction de la base finie peut d'ailleurs être élargie [8] ; le résultat est encore vrai si toute sous-algèbre monogène est de dimension finie sur R (corps des réels). Dans le cas où il n'y a pas d'élément unité on obtient des isotopes (non-alternatifs) des algèbres précédentes. Le cas le plus simple est :

| , | $i$ | $j$ |
|---|---|---|
| $i$ | $i$ | $-j$ |
| $j$ | $-j$ | $-i$ |

Cette algèbre absolument valuée est sans doute la plus simple des algèbres à division sans élément unité. Le produit dans S est le conjugué du produit dans C (corps des nombres complexes).

10. <u>Inverse bilatère</u>.

Je me suis particulièrement attaché au problème de l'inversibilité et plus précisément au problème de l'existence d'un inverse bilatère d'un élément $a$ dans les anneaux admettant un élément unité $e$. L'inverse bilatère $a^{-1}$ de $a$ est défini par $a^{-1}a = aa^{-1} = e$

Mais, alors que pour les anneaux associatifs et alternatifs on a seulement les 4 cas possibles du tableau (T), pour les anneaux non-associatifs généraux (avec élément unité) à peu près tous les cas imaginaires sont effectivement possibles. Ainsi un élément $a$ peut être à la fois inversible à gauche (existence de $a_g$ tel que $a_g a = e$) et diviseur de zéro à gauche, $a$ peut être même diviseur bilatère de zéro et inversible bilatéralement. Le raisonnement simple de TOEPLITZ montre, dans le cas associatif, que l'existence et l'unicité de $a_g$, par exemple, entraîne :

1° l'existence de $a_d$,

2° son unicité,

3° la relation $a_d = a_g$ ; ce raisonnement dans le cas non-associatif n'est plus valable et ses conclusions ne subsistent pas comme je l'ai montré par des contre-exemples. Cependant si A est une algèbre ayant une base finie sur un corps et si, pour tout $x$ de A, $x_g$ existe et est unique, alors $x_d$ existe et est unique. A est alors à division ; mais en général $x_d \neq x_g$.

Etude des puissances négatives. - Les puissances négatives (si elles existent) d'un élément a sont définies de la façon suivante :

$\alpha$. On suppose que l'anneau A contient un élément unité e .

$\beta$. $a^{-1}$ , s'il existe, est tel que $a^{-1}a = aa^{-1} = e$ .

$\gamma$. $a^{-n} = (a^{-1})^n$ .

La non-associativité de A entraîne plusieurs complications :

1° En général $a^{-1}$ n'est pas unique.

Si même on choisit l'un de ces inverses :

2° Il existe des puissances mixtes négatives.

3° Il existe enfin des puissances qui ne sont ni positives ni négatives comme $a^{-1}a^2$ ou $a^2a^{-1}$ ou $a^2a^{-2}$ .

Toutefois dans certains cas ces puissances, ni positives ni négatives, s'expriment linéairement au moyen des puissances positives et négatives, ce fait est trivial dans le cas des algèbres du second degré et j'ai montré [23] que si A est du troisième degré toute puissance de a s'exprime linéairement au moyen de $a^2$ , $a$ , $e$ , $a^{-1}$ et $a^{-2}$ . (Plus exactement : module $[a\ ,\ u] = (a^2\ ,\ a\ ,\ e\ ,\ u\ ,\ u^2)$ où u est l'un des inverses bilatères de a). D'ailleurs même dans un anneau à puissances associatives, l'associativité des puissances ne s'étend pas en général aux puissances négatives bien que ceci puisse arriver dans des cas particuliers.

11. Algèbres symétriques : classification.

Pour l'étude des inverses bilatères il m'était utile d'introduire [21] les algèbres suivantes :

1° Les algèbres symétriques $A_s$

dans lesquelles tout élément admet un inverse bilatère.

2° Les algèbres monosymétriques $A_m$

dans lesquelles tout élément admet un inverse bilatère unique.

3° Les algèbres symétriques à division $A_d$

dans lesquelles tout élément admet un inverse à gauche et un inverse à droite uniques et égaux.

Ces dernières algèbres constituent la généralisation au cas non associatif des corps gauches. Un exemple important d'algèbres symétriques à division est fourni par la propriété suivante :

Toute algèbre flexible à division est symétrique à division.

J'ai montré qu'on a :

$$\{0\} \subset \{A_d\} \subset \{A_m\} \subset \{A_s\} \subset \{A\} \quad .$$

**PROPRIETES.** - Algèbre monosymétrique et algèbre à division avec élément unité offrent une certaine analogie de définition. Certaines propriétés sont également analogues. Dans les deux cas [illegible] est un corps. Une algèbre à division ne contient pas de diviseurs de zéro, une algèbre monosymétrique ne contient pas de diviseurs <u>bilatères</u> de zéro. Mais il y a une divergence dans les réciproques : la première est vraie, la seconde non, toutefois elle le devient dans le cas des algèbres à puissances principales uniques où l'élément général satisfait à une identité polynomiale.

Dans une algèbre à division à puissances associatives toute sous-algèbre monogène est un corps : cette propriété s'étend [22] sans changement aux algèbres monosymétriques à puissances associatives (conséquence : une algèbre réelle monosymétrique à puissances associatives est du second degré).

Mais une algèbre telle que toute sous-algèbre monogène soit un corps n'est pas forcément monosymétrique car il peut exister un élément $a$ admettant dans $[a]$ un inverse bilatère mais ayant également un autre inverse bilatère n'appartenant pas à $[a]$. Ainsi dans une algèbre $P$ (sur un corps réel) dont les éléments de base satisfont aux relations :

$$e_i^2 = -e \,, \quad e_i \, e_j = -e_j \, e_i \qquad (i \neq j)$$

tout $[x]$ de $P$ est un corps, cependant certaines algèbres $P$ ne sont pas monosymétriques.

Il arrive aussi que, dans une algèbre symétrique un élément $a$ n'admette pas d'inverse bilatère dans $[a]$.

Cette éventualité m'amène à signaler les deux possiblités paradoxales suivantes.

Au moins dans des cas particuliers, il est possible d'immerger une algèbre ayant des diviseurs de zéro même bilatères dans une algèbre symétrique [23] et une algèbre avec diviseurs de zéro non bilatères dans une algèbre monosymètrique. Possibilités renouvelant le problème de l'immersion des anneaux en y comprenant les anneaux avec diviseurs de zéro (cependant l'abandon de l'associativité rend difficilement utilisables ces possibilités puisque de l'équation $xy = z$ on peut bien déduire $x^{-1}(xy) = x^{-1} z$, mais qu'en général $x^{-1}(xy) \neq y$).

12. Algèbres absolument symétriques.

Ces faits, et l'étude des algèbres du n-ième degré, m'ont conduit à donner une autre classification des anneaux symétriques fondée non plus sur le nombre des inverses mais sur leur nature, j'indique seulement la plus restreinte de ces classes : j'appelle absolument symétrique une algèbre symétrique où quel que soit $x$, il existe un $x^{-1}$ tel que $[x] = [x^{-1}]$. La réciprocité alors parfaite entre $x$ et $x^{-1}$ se traduit par exemple par cette propriété : les polynômes minima à droite (gauche) de $x$ et $x^{-1}$ existent ensemble, et s'ils existent sont de même degré.

EXEMPLES. - Les algèbres $P$ d'ordre 4 telles que l'espace formé par les produits $e_i e_j$ soit à 3 dimensions, sont à la fois monosymétriques et absolument symétriques. Toute algèbre symétrique à division est monosymétrique et absolument symétrique.

APPLICATIONS. - A quoi ces études peuvent-elles servir ?

En dehors de l'intérêt intrinsèque qui s'attache à toute théorie mathématique elles ont déjà manifesté leur utilité.

En mathématiques pures, Saunders MACLANE [19] a appliqué certaines identités entre des produits non-associatifs à l'étude des algèbres associatives.

Mais c'est surtout dans les sciences appliquées que se rencontrent les applications les plus importantes.

En physique, les algèbres non-associatives seront peut-être capables de suggérer et de réaliser cette généralisation fondamentale de la théorie des quanta qui fut tentée par JORDAN et von NEUMANN. Mais d'autre part, on a déjà utilisé, pour former des systèmes d'équations d'ondes corpusculaires, généralisant les équations de Dirac et comme elles invariants par la transformation de Lorentz, les propriétés des systèmes triples de Lie et de Jordan, c'est-à-dire d'algèbres closes par rapport à des produits de la forme : $(xLy)\,Lz$ ou $(xJy)\,Jz$. G. PETIAU [20], J.K. LUBAŃSKI [18], étendent ainsi les équations de Dirac au cas où la masse est nulle, au cas où le spin est quelconque ; N. SVARTHOLM [32], N. JACOBSON [15], étudient les systèmes triples du méson et des généralisations.

En génétique, on peut représenter une population (constituée d'individus quelconques) par un élément $x$ d'un système hypercomplexe. Le produit de l'accouplement de deux populations (représentées respectivement par $x$ et $y$) sera représenté par le produit $xy$. L'algèbre ainsi définie est commutative puisque $xy$ et $yx$ signifient la même chose, mais elle n'est pas associative et même, en général, elle n'est pas à puissances associatives. I.M.H. ETHERINGTON [13] et R.D. SHAFER [30] ont étudié la structure de ces algèbres "génétiques".

## 13. Conclusion.

En conclusion, il me semble que l'ampleur, à peine explorée, des recherches concernant les anneaux non-associatifs, rend probable l'existence de problèmes et de résultats, encore insoupçonnés et intéressants, en eux-mêmes, et par leurs applications de plus en plus nombreuses aux sciences expérimentales.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] ALBERT (A. A.). - Non-associative algebras, I : Fundamental concepts and isotopy, Annals of Math., Series 2, t. 43, 1942, p. 685-707.

[2] ALBERT (A. A.). - The radical of a non-associative algebra, Bull. Amer. math. Soc., t. 48, 1942, p. 891-897.

[3] ALBERT (A. A.). - Algebras derived by non-associative matrix multiplication, Amer. J. of Math., t. 66, 1944, p. 30-40.

[4] ALBERT (A. A.). - A structure theory for Jordan algebras, Annals of Math., Series 2, t. 48, 1947, p. 546-567.

[5] ALBERT (A. A.). - Absolute valued real algebras, Annals of Math., Series 2, t. 48, 1947, p. 495-501.

[6] ALBERT (A. A.). - Power-associative rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 64, 1948, p. 552-593.

[7] ALBERT (A. A.). - On right alternative algebras, Annals of Math., Series 2, t. 50, 1949, p. 318-328.

[8] ALBERT (A. A.). - Absolute valued algebraic algebras, Bull. Amer. math. Soc., t. 55, 1949, p. 763-768.

[9] BIRKHOFF (Garrett). - Representability of Lie algebras and Lie groups of matrices, Annals of Math., Series 2, t. 38, 1937, p. 526-532.

[10] CAYLEY (Arthur). - On certain results relating to quaternions, Philos. Mag., t. 26, 1845, p. 141-145.

[11] DIRAC (P. A. M.). - The principles of quantum mechanics. - Oxford, Clarendon Press, 1930.

[12] DIRAC (P. A. M.). - The relation between mathematics and physics, Proc. roy. Soc. Edinburgh, t. 59, 1939, p. 122-129.

[13] ETHERINGTON (I. M. H.). - Genetic algebras, Proc. roy. Soc. Edinburgh, t. 59, 1939, p. 242-258.

[14] HURWITZ (A.). - Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1898, p. 309-316.

[15] JACOBSON (Nathan). - Lie and Jordan systems, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 149-170.

[16] JORDAN (P.). - Über die Multiplikation quantenmechanischer Grössen, für Physik, t. 80, 1933, p. 285-291.

[17] JORDAN (P.), von NEUMANN (J.) and WIGNER (E.). - On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, Annals of Math., Series 2, t. 35, 1934, p. 29-64.

[18] LUBAŃSKI (J. K.). - Sur la théorie des particules élémentaires de spin quelconque, I., Physica, t. 9, 1942, p. 310-338.

[19] MACLANE (Saunders). - A non-associative method for associative algebras, Bull. Amer. math. Soc., t. 54, 1948, p. 897-902.

[20] PETIAU (Gérard). - Contribution à la théorie des équations d'ondes corpusculaires, Mém. Acad. roy. Belgique, Cl. Sc., t. 16, 1936 (Thèse Sc. math. Paris, 1936).

[21] RAFFIN (Raymond). - L'inversibilité dans les algèbres linéaires non-associatives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 228, 1949, p. 1685-1687.

[22] RAFFIN (Raymond). - Algèbres monosymétriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 230, 1950, p. 31-33.

[23] RAFFIN (Raymond). - Algèbres du troisième degré, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 230, 1950, p. 164-166.

[24] RAFFIN (Raymond). - Anneaux à puissances commutatives et anneaux flexibles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 230, 1950, p. 804-806.

[25] RAFFIN (Raymond). - Sur certaines propriétés de commutation dans les anneaux monogènes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 230, 1950, p. 904-906.

[26] RAFFIN (Raymond). - Sur les conditions pour qu'un anneau soit à puissances commutatives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 230, 1950, p. 1488-1489.

[27] RAFFIN (Raymond). - Algèbres non-associatives, Algèbres du quatrième degré, Bull. Cl. Acad. roy. Belgique, Série 5, t. 36, 1950, p. 574-578.

[28] RAFFIN (Raymond). - Propriétés de commutation et de finitude des anneaux non-associatifs, Généralisations des corps gauches. - Dakar, 1955 (Thèse Sc. math. Paris. 1951).

[29] REES (D.). - Linear systems of algebras, Annals of Math., Series 2, t. 51, 1950, p. 123-160.

[30] SCHAFER (R. D.). - Structure of genetic algebras, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 121-135.

[31] SMILEY (M. F.). - The radical of an alternative ring, Annals of Math., Series 2, t. 49, 1948, p. 702-709.

[32] SVARTHOLM (N.). - On the algebras of relativistic quantum theories, Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, t. 12, 1942, n° 9, p. 94-108.

[33] ZORN (Max). - Theorie der alternativen Ringe, Abh. math. Sem. Hamb. Univ., t. 8, 1930, p. 123-147.