Charles Pisot

Étude de certains entiers algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 4 (1950-1951), exp. n° 2, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1950-1951__4__A2_0>

ÉTUDE DE CERTAINS ENTIERS ALGÉBRIQUES

par Charles PISOT

La répartition (mod 1) est au carrefour de deux grandes théories : d'une part la théorie des fonctions périodiques, d'autre part celle des approximations en théorie des nombres. Quand la fonction à étudier ne croît pas plus vite que n^{α}, on a obtenu de nombreux résultats dont beaucoup ont eu des applications importantes. Par contre peu de chose est connu pour des croissances plus rapides. Je mentionnerai toutefois le résultat de KOKSMA [2] qui dit que, si une fonction $f(n, \alpha)$ dépend assez régulièrement d'un paramètre α et croît avec n plus vite qu'un polynôme, l'ensemble des α pour lesquels la répartition (mod 1) de $f(n, \alpha)$ n'est pas uniforme est de mesure nulle.

Nous allons montrer comment on peut construire des valeurs de α de l'ensemble de mesure nulle précédent, de façon plus précise $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots$ étant une répartition donnée d'avance, nous allons essayer de déterminer α de façon que $f(n, \alpha)$ soit (mod 1) le plus près possible de γ_n. Nous commencerons par prendre tous les γ_n nuls, le cas général s'en déduira aisément [4], [5].

Soit $u_n = f_n(\alpha)$ une suite de fonctions positives ; nous supposons que si α est dans un intervalle A, on a $0 < \gamma_n \leq f'_n(\alpha)$, avec $\lim_{n=\infty} \gamma_n = \infty$ et $f'_{n+1}(\alpha) \leq \mu_n f'_n(\alpha)$. Il existe alors des fonctions inverses $\alpha = \varphi_n(u_n)$. Posons $f_n(\alpha) = a_n + \varepsilon_n$, a_n étant entier et $|\varepsilon_n| < 1$. Si $\alpha' \neq \alpha$ est dans A

$$|f_n(\alpha') - f_n(\alpha)| = |(\alpha' - \alpha) f'_n(\alpha'')| > |\alpha' - \alpha| \gamma_n \longrightarrow \infty$$

donc pour n assez grand, a_n est toujours dans l'image de A par f_n et $\alpha_n = \varphi_n(a_n)$ est dans A.

Si l'on forme alors

$$\omega_{n+1} = a_{n+1} - f_{n+1}[\varphi_n(a_n)] = f_{n+1}(\alpha) - \varepsilon_{n+1} - f_{n+1}[\varphi_n(a_n)]$$

$$= f_{n+1}[\varphi_n(a_n + \varepsilon_n)] - f_{n+1}[\varphi_n(a_n)] - \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \frac{f'_{n+1}(\alpha'_n)}{f'_n(\alpha'_n)} - \varepsilon_{n+1}$$

où α'_n est entre α_n et α. Ainsi $|\omega_{n+1}| < |\varepsilon_n|\mu_n + |\varepsilon_{n+1}|$ par suite si $|\varepsilon_n| < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_n + 1} \text{ et } \frac{1}{\mu_{n-1} + 1}\right)$ on a $|\omega_{n+1}| < \frac{1}{2}$ et a_{n+1} est l'entier le plus voisin de $f_{n+1}(\alpha_n)$, donc la suite des a_n est déterminée à partir d'un certain rang. Comme $\alpha = \lim_{n=\infty} \varphi_n(a_n)$, l'ensemble de tels nombres α est dénombrable.

Pour démontrer la réciproque, nous supposerons de plus que dans A on a $f'_{n+1}(\alpha) \geqslant \beta_n f'_n(\alpha)$ avec $\beta_n \geqslant 2$. Prenons $\gamma_n = C \prod_{\gamma=0}^{n-1} \beta_\gamma \geqslant C2^n$. Appelons A_n l'intervalle déduit de A en retranchant aux extrémités de A deux petits segments de longueur $\frac{1}{2\gamma_n}$ et $|A_n|$ sa longueur. Comme $f_n(\alpha)$ transforme A_n en un segment de longueur supérieure à $|A_n|\gamma_n$, il y a donc pour $n > n_0$ un point entier a_n dans $f_n(A_n)$. L'intervalle $\left[\alpha_n - \frac{1}{2\gamma_{n+1}}, \alpha_n + \frac{1}{2\gamma_{n+1}}\right]$ est dans A_{n+1}, car

$$\frac{1}{2\gamma_n} - \frac{1}{2\gamma_{n+1}} = \frac{1}{2\gamma_{n+1}}(\beta_{n+1} - 1) \leqslant \frac{1}{2\gamma_{n+1}} \quad ;$$

son transformé par f_{n+1} est donc de longueur $\geqslant \gamma_{n+1} \cdot \frac{1}{\gamma_{n+1}} = 1$, il y a donc un entier a_{n+1} tel que

$$|\omega_{n+1}| = |a_{n+1} - f_{n+1}(\alpha_n)| < \frac{1}{2}$$

et que $\alpha_{n+1} = \varphi_{n+1}(a_{n+1})$ est dans A_{n+1}. De plus $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \frac{1}{2\gamma_{n+1}}$ donc $\lim_{n=\infty} \alpha_n = \alpha$ existe. Enfin

$$f_n(\alpha) - a_n = f_n(\alpha) - f_n(\alpha_n) = \sum_{m=n}^{\infty} f_n(\alpha_{m+1}) - f_n(\alpha_m)$$

et

$$|f_n(\alpha_{m+1}) - f_n(\alpha_m)| = |f_n[\varphi_{m+1}(a_{m+1})] - f_n[\varphi_{m+1}(a_{m+1} - \omega_{m+1})]|$$

$$= |\omega_{m+1}| \left|\frac{f'_n(\alpha'_m)}{f'_{m+1}(\alpha'_m)}\right| \leqslant \frac{1}{2\beta_n \cdots \beta_m}$$

α'_m étant compris entre α_m et α_{m+1}.

Ainsi

$$|f_n(\alpha) - a_n| \leqslant \frac{1}{2\beta_n}\left[1 + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{n+1} \cdots \beta_m}\right] \leqslant \frac{1}{\beta_n}$$

car $\beta_m \geq 2$. Il y a donc dans tout intervalle A des nombres α tels que $|f_n(\alpha) - a_n| \leq \frac{1}{\beta_n}$, ces nombres sont donc partout denses dans A .

Les conditions imposées aux fonctions $f_n(\alpha)$ ne sont pas modifiées si on ajoute à $f_n(\alpha)$ les constantes $-\eta_n$.

La croissance en n limite où la méthode s'applique est celle de la fonction exponentielle $u_n = \alpha^n$. On voit qu'il n'y a qu'un ensemble dénombrable de valeurs α telles que $|\alpha^n - a_n| < \varepsilon$, ε étant une constante inférieure à $\frac{1}{2(\alpha+1)}$, et il y a une infinité partout dense de nombres $\alpha > 2$ pour lesquels $|\alpha^n - a_n| < \varepsilon'$, ε' étant une constante supérieure à $\frac{1}{2(\alpha-1)}$.

Une méthode analogue s'applique au cas d'une fonction $u_n = f_n(\alpha_1 , \dots , \alpha_s)$ dépendant de s paramètres. On élimine $\alpha_1 , \dots , \alpha_s$ entre les relations $u_n = f_n(\alpha_1 , \dots , \alpha_s)$, ... , $u_{n+s} = f_{n+s}(\alpha_1 , \dots , \alpha_s)$
d'où $u_{n+s} = F_n(u_n , \dots , u_{n+s-1})$ et on pose $\omega_{n+s} = a_{n+s} - F(a_n , \dots , a_{n+s-1})$
Ainsi si $u_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \dots + \lambda_s \alpha_s^n$, $\lambda_1 , \dots , \lambda_s$, $\alpha_1 , \dots , \alpha_s$ étant les paramètres, la relation qui les élimine s'obtient de la façon suivante :

Soit

$$\Delta_n^s = \begin{vmatrix} u_n & \dots & u_{n+s} \\ & & \\ u_{n+s} & \dots & u_{n+2s} \end{vmatrix}$$

alors $\omega_{n+2s} = \frac{\Delta_n^s}{\Delta_n^{s-1}}$, les u_n étant remplacés par les entiers a_n .

<u>Relations de récurrence</u>. - La condition nécessaire et suffisante pour que la suite u_n vérifie une relation de récurrence d'ordre s , c'est que $\Delta_n^s = 0$ pour n = 0 , 1 , ... La condition est bien nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante on utilise la relation

$$\Delta_{n+2}^{s-2} \Delta_n^s = \Delta_n^{s-1} \Delta_{n+2}^{s-1} - (\Delta_{n+2}^{s-1})^2 \quad .$$

Elle montre que si $\Delta_n^s = 0$ et si un $\Delta_n^{s-1} = 0$, alors tous les $\Delta_n^{s-1} = 0$. Donc on peut supposer s choisi de sorte que tous les $\Delta_n^{s-1} \neq 0$. Alors il est clair qu'une solution du système $x_0 u_{n+h} + \dots + x_s u_{n+h+s} = 0$, $h = 0 , 1 , \dots , s-1$ vérifie aussi l'équation pour $h = s$.

THÉORÈME de Fatou ([1], p. 368-369). - Si les u_n sont tous entiers, les $x_0, \dots, x_s$ peuvent être pris entiers et $x_s = 1$. En effet on peut résoudre les équations $y_0 u_0 + \dots + y_s u_s = 0$, $y_0 u_{s-1} + \dots + y_s u_{2s-1} = 0$ en entiers $y_0, \dots, y_s$ non tous nuls. Posons alors $b'_n = y_0 u_n + \dots + y_s u_{n+s}$ et $b_n = \frac{1}{b} b'_n$, b étant le p.g.c.d. de tous les b'_n. Les b_n vérifient la même récurrence $x_0 b_n + \dots + x_s b_{n+s} = 0$, $x_0, \dots, x_s$ peuvent être supposés premiers entre eux. Soit alors $p \neq 1$ un facteur premier de x_s et b_q le premier nombre b_n non divisible par p $(q \geq s)$. Alors

$$x_{s-1} b_q = -(x_s b_{q+1} + x_{s-2} b_{q-1} + \dots + x_0 b_{q-s+1}) \ ,$$

donc x_{s-1} est divisible par p. De proche en proche on montrerait que p divise $x_{s-1}, x_{s-2}, \dots, x_0$; contradiction.

Critère de Kronecker. - La condition nécessaire et suffisante pour que la suite u_n vérifie une relation de récurrence, c'est que $\Delta_0^n = 0$ pour $n = s + 1, \dots$. Cette condition se démontre encore avec la relation

$$\Delta_{n+2}^{s-2} \Delta_n^s = \Delta_n^{s-1} \Delta_{n+2}^{s-1} - (\Delta_{n+1}^{s-1})^2 \ .$$

On en déduit que $\Delta_1^n = 0$ pour $n = s, s+1, \dots$ puis $\Delta_2^n = 0, \dots$ et par suite on a bien $\Delta_n^s = 0$, $n = 0, 1, \dots$.

Nombre τ [4]. - Soit un nombre $\tau > 1$ tel qu'il existe un nombre λ avec $\lambda \tau^n = a_n + \varepsilon_n$, a_n entier et $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2$ convergent. Alors τ est un entier algébrique, les modules de tous ses conjugués sont inférieurs à un et λ est un nombre du corps de τ.

Formons en effet

$$\Delta_0^n = \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_n \\ & & \\ a_n & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \eta_1 & \cdots & \eta_n \\ & & & \\ a_n & \eta_{n+1} & \cdots & \eta_{2n} \end{vmatrix}$$

où $\eta_n = a_n - \tau a_{n-1} = \tau \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n^2$ est aussi convergente. D'après l'inégalité de Hadamard, on aura :

$$(\Delta_0^n)^2 \leq (a_0^2 + \dots + a_n^2) \prod_{\nu=1}^{n} (\eta_\nu^2 + \dots + \eta_{\nu+n}^2) < c\, \tau^{2n} \prod_{\nu=1}^{n} (\eta_\nu^2 + \eta_{\nu+1}^2 + \dots)$$

On peut choisir n_0 tel que pour $\nu > n_0$ on ait $\eta_\nu^2 + \eta_{\nu+1}^2 \dots \leq \frac{\theta}{\tau^2}$, $0 < \theta < 1$.

Alors

$$\prod_{\nu=1}^{n_0} (\gamma_\nu^2 + \gamma_{\nu+1}^2 + \dots) = C_1$$

ne dépend pas de n et enfin $(\Delta_0^n)^2 \leq C\, C_1\, \tau^{2n} \left(\frac{\theta}{\tau^2}\right)^{n-n_0} \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$. Comme Δ_0^n est un entier, il est nul pour n assez grand.

On a donc $a_{n+s} + u_{s-1}\, a_{n+s-1} + \dots + u_0\, a_n = 0$, $u_0, \dots, u_{s-1}$ entiers, d'où

$$\lambda \tau^n [\tau^s + u_{s-1} \tau^{s-1} + \dots + u_0] = \varepsilon_{n+s} + u_{s-1}\, \varepsilon_{n+s-1} + \dots + u_s\, \varepsilon_n \longrightarrow 0$$

et τ est racine de $P(z) \equiv z^s + u_{s-1}\, z^{s-1} + \dots + u_0 = 0$.

La récurrence montre que $\left(\frac{a_0}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \dots\right) P(z) = Q(z)$, Q étant un polynôme. Donc $\frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{\lambda}{z-\tau} - \varepsilon(z)$ où $\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_0}{z} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{z^{n+1}} + \dots$. $\varepsilon(z)$ est holomorphe pour $|z| > 1$, donc $z = \tau$ est la seule racine de $P(z) = 0$ de module > 1. Ses conjugués $\tau_2, \dots, \tau_s$ sont donc de module ≤ 1. $\lambda = \frac{Q(\tau)}{P'(\tau)}$ est algébrique du corps de τ ; si $\lambda_2, \dots, \lambda_s$ sont ses conjugués, on a

$$a_n = \lambda \tau^n + \lambda_2\, \tau_2^n + \dots + \lambda_s \tau_s^n \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Soit $\delta(z) = (z - \tau) \dots (z - \tau_{s-1}) = z^{s-1} + \delta_{s-2}\, z^{s-2} + \dots + \delta_0$, alors

$$a_{n+s-1} + \delta_{s-2}\, a_{n+s-2} + \dots + \delta_0\, a_n = \lambda \tau^n \delta(\tau) + \lambda_2 \tau_2^n\, \delta(\tau_2) + \dots + \lambda_s\, \delta_s^n (\tau_s) =$$

$$\lambda \tau^n\, \delta(\tau) - (\varepsilon_{n+s-1} + \dots + \delta_0\, \varepsilon_n)$$

Or $\delta(\tau) = \delta(\tau_2) = \dots = \delta(\tau_{s-1}) = 0$, $\delta(\tau_s) \neq 0$, donc $|\tau_s| < 1$, [12].

La réciproque est immédiate.

<u>Existence des nombres</u> τ. – Soit $\omega_1, \dots, \omega_s$ une base des entiers d'un corps algébrique réel K, $\omega_\nu^{(\sigma)}$ les conjugués ; d'après MINKOWSKI, on peut trouver des entiers $x_1, \dots, x_s$ non tous nuls tels que

$$|x_1\, \omega_1 + \dots + x_s\, \omega_s| \leq \gamma_1$$

$$|x_1\, \omega_1^{(2)} + \dots + x_s\, \omega_s^{(2)}| \leq \gamma_2$$

$$\dots$$

$$|x_1\, \omega_1^{(s)} + \dots + x_s\, \omega_s^{(s)}| \leq \gamma_s$$

dès que $\gamma_1\, \gamma_2 \dots \gamma_s \geq \sqrt{D}$, D = carré du déterminant des $\omega_i^{(j)}$, discriminant du corps.

Si on choisit $\gamma_2 < 1$, ... , $\gamma_s < 1$ le nombre $\tau = x_1\omega_1 + \dots + x_s\omega_s > 0$ (en changeant au besoin le signe de tous les x_1 , ... , x_s) est un entier avec $|\tau_2| < 1$, ... , $|\tau_s| < 1$ et comme $|N(\tau)| = |\tau\tau_2 \dots \tau_s| \geq 1$ on en déduit que $\tau > 1$.

En prenant une suite de $\gamma_2^{(\nu)}$, ... , $\gamma_s^{(\nu)}$ avec

$$|\gamma_2^{(\nu)}| < |\tau_2^{(\nu-1)}| \text{ , ... , } \gamma_s^{(\nu)} < |\tau_s^{(\nu-1)}| \quad \text{et} \quad \gamma_1^{(\nu)^2} \dots \gamma_s^{(\nu)} = |\sqrt{D}|$$

la norme des $\tau^{(\nu)}$ ainsi formés est bornée par $|\sqrt{D}|$, donc elle est la même, soit m pour une infinité de tels $\tau^{(\nu)}$. Si nous prenons encore $x_1^{(\nu)}$, ... , $x_s^{(\nu)}$ (mod n), il y a une infinité de tels systèmes congrus (mod n), alors pour τ' et τ'' de cette nature on aura $\tau'' = \tau' + m\alpha$, α entier et $\tau'' = \tau' + \tau$. $\bar{\tau}'\alpha = \tau'(1 + \bar{\tau}'\alpha) = \tau'\rho$ où $\bar{\tau}'\frac{N(\tau')}{\tau'}$ entier. Comme $N(\tau') = N(\tau').N(\rho)$ on a $N(\rho) = 1$. On aura alors $\tau''_\sigma = \tau'_\sigma \rho_\sigma$, donc comme $|\tau''_\sigma| < |\tau'_\sigma|$, $|\rho_\sigma| < 1$, donc ρ est une unité du corps τ .

Soit enfin λ un nombre quelconque du corps K , il y a toujours un entier rationnel a tel que $a\lambda$ soit entier dans K . Il y aura d'après la démonstration précédente des entiers τ dans K tels que $|a\tau_2| < 1$, ... , $|a\tau_{s_n}| < 1$ donc $a\tau$ sera un entier τ . Alors $\lambda(a\tau)^n + \lambda_2(a\tau_2)^n + \dots + \lambda_s(a\tau_s) = a_n$ sera entier et $\lambda(a\tau)^n = a_n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \longrightarrow 0$. Ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit algébrique c'est que $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(\pi\lambda x^n)$ converge pour certaines valeurs $x > 1$.

THÉORÈME de Salem [8]. - L'ensemble des nombres τ est fermé.

Soit

$$R(z) = \frac{z^s + u_{s-1}z^{s-1} + \dots + u_0}{1 + u_{s-1}z + \dots + u_0 z^s} = \frac{(z-\tau)(z-\tau_2)\dots(z-\tau_n)}{(1-\tau z)(1-\tau_2 z)\dots(1-\tau_n z)} \text{ , } \tau > 1 \text{ , } |\tau_\sigma| < 1.$$

On aura,

$$R(z) = \frac{1}{a_s} + \frac{\lambda}{1-\tau z} + \dots + \frac{\lambda_s}{1-\tau_s z}$$

d'où $R(z) = a_0 + \dots + a_n z^n + \dots$ avec $a_n = \lambda\tau^n + \lambda_2\tau_2^n + \dots + \lambda_s\tau_s^n$, $n \geq 1$, $a_0 = \frac{1}{a_0} + \lambda + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$.

Pour calculer λ , posons $R(z) = \frac{z-\tau}{1-\tau z}H(z)$, alors en multipliant par $1 - \tau z$ et en faisant $z = \frac{1}{\tau}$, il vient $\lambda = (\frac{1}{\tau} - \tau)H(\frac{1}{\tau})$, d'autre part comme le terme constant du dénominateur de $R(z)$ est 1 , tous les a_n sont entiers.

Posons alors $\lambda\tau^n = a_n + \varepsilon_n$, alors

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \tau^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{\lambda}{1-\tau z} - R(z)$$

est holomorphe pour $|z| \leq 1$ et on a

$$\varepsilon_0^2 + \dots + \varepsilon_n^2 + \dots = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \varepsilon(z) . \varepsilon(\tfrac{1}{z}) \frac{dz}{z}$$

Or $\frac{1}{z}\ \varepsilon(z)\ \varepsilon(\frac{1}{z}) = [\frac{\lambda}{z-\tau} - \frac{1}{z} R(\frac{1}{z})][\frac{\lambda}{1-\tau z} - R(z)]$ et $R(\frac{1}{z}) = \frac{1}{R(z)}$. Les pôles de la fonction dans $|z| = 1$ sont ceux de $-\frac{1}{zR(z)}[\frac{\lambda}{1-\tau z} - R(z)]$, car $\varepsilon(z)$ et $\frac{\lambda}{z-\tau}$ sont holomorphes dans $|z| = 1$, ce sont donc ceux de

$\frac{1}{z} - \frac{\lambda}{z(1-\tau z)R(z)} = \frac{1}{z} - \frac{\lambda}{z(z-\tau)H(z)}$. La fonction $\frac{\lambda}{z(z-\tau)H(z)}$ est rationnelle et le degré du dénominateur dépasse de 2 unités celui du numérateur. La somme des résidus est donc nulle. Or dans $|z| \leq 1$, $z(z-\tau)H(z)$ s'annule en $z = 0$, $z = \tau_2$, ..., $z = \tau_s$, donc la somme des résidus est opposée au résidu en $z = \tau$, donc $-\frac{\lambda}{\tau H(\tau)}$. Par suite

$$\varepsilon_0^2 + \dots + \varepsilon_n^2 + \dots = 1 + \frac{\lambda}{\tau H(\tau)} = 1 - (1 - \frac{1}{\tau^2}) \frac{1}{H^2(\tau)_2},$$

car $H(\frac{1}{\tau}) = H(\tau)$. Comme $\tau > 1$, $\varepsilon_0^2 + \dots + \varepsilon_n^2 + \dots = 1 - \frac{\lambda^2}{\tau^2-1} < 1$, donc $\lambda < \sqrt{\tau^2-1} < \tau$.

En remplaçant alors λ au besoin par λ^k on peut donc associer à tout τ un nombre λ avec $1 \leq \lambda < \tau$ tel que $\lambda\tau^n = a_n + \varepsilon_n$ avec $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 < 1$.
Soient alors $\tau_h \to \tau'$, alors suite λ_h extraite $\to \lambda$. Alors $\sin(\pi \lambda_h \tau_h^n) \to \sin(\pi\lambda\tau^n)$ et la somme

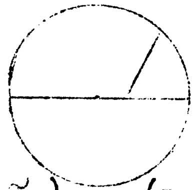
$$S_n^{(h)} = \sum_{\nu=0}^{n} \sin^2(\pi \lambda_h \tau_h^{\nu}) \leq \pi^2 \sum_{\nu=0}^{n} (\varepsilon_{\nu}^{(h)})^2 \leq \pi^2 .$$

Or la quantité $S_n^{(h)}$ tend vers $S_n = \sum_{\nu=0}^{n} \sin^2(\pi\lambda\tau^{\nu})$ et par suite $S_n \leq \pi^2$, la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} \sin^2(\pi\lambda\tau^{\nu})$ est convergente donc aussi $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi\lambda\tau^n - a_n)$, a_n entier le plus voisin, donc τ' est un nombre τ et l'ensemble des τ est fermé.

<u>Points d'accumulation de l'ensemble des</u> τ. — $\tau = 1$ n'est pas un point d'accumulation. En effet, sinon soit $\tau_h \to 1$, et soit $1 < a < b$ intervalle quelconque donné. Pour $h > h_0$, $1 < \tau_h < \frac{b}{a}$, alors si n_h est tel que

$\tau_h^{n_h-1} < a < \tau_h^{n_h}$, on aura $\tau_h^{n_h} < \frac{b}{a} \tau_h^{n_h-1} < b$ donc $\tilde{\tau}_h = \tau_h^{n_h}$ est encore un nombre τ dans $a < \tilde{\tau}_h < b$, il y en a donc une infinité, et tout intervalle contiendrait un point d'accumulation des τ , donc l'ensemble des τ serait partout dense. SIEGEL a démontré que le plus petit $\tau > 1$ était isolé et c'est la racine de $z^3 - z - 1 = 0$, $\tau = 1{,}324$.

Montrons que si τ est totalement réel, il est point limite. En effet, si $\tau_2 > 0$

$\left|\frac{z - \tau_2}{z - 1}\right| \geq \frac{1 + \tau_2}{2}$ si $|z| = 1$  , et si $\tau'_2 < 0$, $\left|\frac{z - \tau'_2}{z - 1}\right| \geq \frac{1 - \tau'_2}{2}$

Soit alors $P(z) \equiv (z - \tau)(z - \tau_2) \dots (z - \tau_s)$, $Q(z) \equiv (z - 1)^p (z + 1)^q$, p nombre de racines > 0 , q nombre de racines < 0 de $P(z) = 0$ alors

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \geq \frac{1 + \tau}{2} \prod_{\sigma=2}^{s} \frac{1 + |\tau_\sigma|}{2} \geq \prod_{\sigma=1}^{s} \frac{1 + |\tau_\sigma|}{2}$$

où on a posé $\tau_1 = \frac{1}{|\tau_2 \dots \tau_s|} \leq \tau$. Mais un produit $\prod_{\sigma=1}^{s}(1 + x_\sigma)$, où $x_1 \dots x_\sigma = 1$, est minimum pour $x_1 = \dots = x_\sigma = 1$, donc il est $> 2^s$ car $x_1 > 1$. $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| > 1$, si $|z| = 1$. Donc $z^n P(z) + Q(z) = 0$ a autant de racines dans $|z| < 1$ que $z^n P(z) = 0$, donc $n + s - 1$; elle est de degré n , donc sa racine $\tau_n > 1$ est un entier τ . Soit $\tau_n > 1$ cette racine, $\left|\frac{Q(z)}{z}\right|$ est borné pour $|z| \geq 1$, donc $|P(\tau_n)|^n = - \left|\frac{Q(\tau_n)}{\tau_n^s}\right| \cdot \frac{1}{\tau_n^{n-s}}$,

$|P(\tau_n)| < \frac{M}{\tau_n^{n-s}}$, comme τ_n ne peut tendre vers 1, $\tau_n > 1 + \delta$, et

$P(\tau_n) \to 0$, donc $\tau_n \to \tau$.

Ces points τ totalement réels sont tous isolés. En effet τ^2 est alors un nombre totalement positif ; SCHUR a démontré que le nombre d'entiers algébriques totalement positifs vérifiant $Tr(\alpha) \leq \lambda s$ est fini si $\lambda < e^{1/2}$ Si alors $|\tau| < A$, $\tau^2 < A^2$ et

$$Tr(\tau^2) = \tau^2 + \tau_2^2 + \dots + \tau_s^2 < A^2 + s - 1 < \lambda s$$

pour $s > \frac{A^2 - 1}{\lambda - 1}$. Pour les autres valeurs de s le degré de τ étant borné ainsi que tous ses conjugués, il n'y en a qu'un nombre fini.

L'ensemble des points limites de τ a des dérivées de tout ordre [8]. En effet si $|P(z)| > 1$ sur $|z| = 1$, alors $z^n P(z) - 1 = 0$ a une racine $\tau_n \to \tau$

car $P(\tau_n) = \frac{1}{\tau_n^n} \to 0$. Or prenons $P(z) = z - k$, alors $\tau^{(n)}$ racine de $z^n(z-k) - 1 \equiv P_2(z) = 0$ tend vers k . Puis

$$|P_2(z)| \geqslant |z-k| - 1 \geqslant k-2$$

sur $|z| = 1$, donc $z^m\, P_2^{(n)}(z) - 1 \equiv P_3^{(m,n)}(z) = 0$ a une racine $\tau^{(m,n)} \to \tau^{(n)}$, d'où le dérivé d'ordre $k-1$ au moins existe.

Nous avons été amené à l'étude des nombres τ par la considération de $\lambda\alpha^n$ (mod 1). En réalité cette expression dépend de deux paramètres, et la théorie générale nous incite à éliminer λ et α entre les trois relations $u_n = \lambda\alpha^n$, $u_{n+1} = \lambda\alpha^{n+1}$, $u_{n+2} = \lambda\alpha^{n+2}$. L'élimination donne

$$u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = 0 \quad .$$

Posons $\lambda\alpha^n = a_n + \varepsilon_n$, a_n étant entier. On a alors

$$a_{n+2} - \frac{a_{n+1}^2}{a_n} = -\alpha^2\varepsilon_n + 2\alpha\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2} - \frac{(\varepsilon_{n+1} - \alpha\varepsilon_n)^2}{a_n} \,.$$

Par suite on a le théorème suivant :

THÉORÈME. - <u>Si</u> $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon < \frac{1}{2(\alpha+1)^2}$ <u>pour</u> $n > n_0$, λ <u>et</u> α <u>appartiennent à un ensemble dénombrable de nombres</u> [3]. <u>En effet</u>

$$|a_{n+2} - \frac{a_{n+1}^2}{a_n}| < \frac{1}{2}$$

pour n assez grand, la suite d'entiers a_n est donc déterminée par a_{n_1} et a_{n_1+1} , il n'y a donc qu'une infinité dénombrable de telles suites et

$$\alpha = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad , \quad \lambda = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\alpha^n} \quad .$$

Réciproquement en partant de deux entiers arbitraires a_0 , $a_1 > a_0$, formons la suite $a_0 , a_1 , \dots , a_n , \dots$ par la condition $\frac{1}{2} \leq a_{n+2} - \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$. On montre facilement que $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ existe. Si $\alpha > 1$, on a

$\alpha - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon$ pour n assez grand, donc $a_{n+m} > (\alpha - \varepsilon)^m a_n$ et

$|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n}| \leqslant \frac{1}{2a_{n+1}}$ montre que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha\right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \left|\frac{a_{n+m+2}}{a_{n+m+1}} - \frac{a_{n+m+1}}{a_{n+m}}\right| < \frac{1}{2a_n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha-\varepsilon)^m} < \frac{1+\varepsilon'}{2(\alpha-1)a_n}$$

La série de terme général $\frac{a_n}{\alpha^n} - \frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}}$ converge, donc $\frac{a_{n+1}}{\alpha^n}$ tend vers une limite λ et

$$\left|\frac{a_n}{\alpha^n} - \lambda\right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \left|\frac{a_{n+m+1}}{\alpha^{n+m+1}} - \frac{a_{n+m}}{\alpha^{n+m}}\right| < \frac{1+\varepsilon'}{2\alpha^n(\alpha-1)^2}$$

Donc $\lambda\alpha^n = a_n + \varepsilon_n$ avec $|\varepsilon_n| < \frac{1+\varepsilon'}{2(\alpha-1)^2}$. On montre assez facilement que l'ensemble des nombres $\alpha > 1$ ainsi obtenus est partout dense.

Il est clair que les nombres τ sont des nombres de la famille précédente. Mais il y en a encore d'autres qui ont été étudiés par R. SALEM [9], que j'appellerai nombres de Salem à savoir des entiers algébriques $\sigma > 1$, dont tous les conjugués $|\sigma_h| \leq 1$, l'égalité étant réalisée pour certains conjugués.

Si $|\sigma_h| = 1$, σ_h est complexe, donc $\bar{\sigma}_h = \frac{1}{\sigma_h}$ est aussi racine de l'équation irréductible vérifiée par σ. Cette équation est donc réciproque, c'est-à-dire σ est une unité, son degré $2s$ est pair et les nombres $\gamma_h = \sigma_h \frac{1}{\sigma_h}$ sont entiers algébriques totalement réels tel que $\gamma = \sigma + \frac{1}{\sigma} > 2$, tandis que $-2 < \gamma_h < 2$ pour $h = 2, \ldots$ Cette dernière propriété caractérise les nombres σ. Les nombres σ appartiennent donc à une extension quadratique d'un corps totalement réel, et contrairement aux nombres τ il n'y en a pas dans tout corps. D'ailleurs les nombres σ d'un même corps forment un groupe multiplicatif à un seul générateur. En effet le produit et le quotient de deux nombres σ d'un corps est encore un nombre σ et le nombre des nombres σ du corps inférieurs à une borne donnée est fini.

Etudions la répartition (mod 1) de $\lambda\sigma^n$, λ étant un entier du corps de σ. Posons $b_n = \lambda\sigma^n + \lambda_2\sigma_2^n + \ldots + \lambda_{2s-1}\sigma_{2s-1}^n + \lambda_{2s}\sigma_{2s}^n$ où nous supposons $\sigma_{2s} = \frac{1}{\sigma}$ réel et $\sigma_{2s+1-h} = \frac{1}{\sigma_h}$, $h = 2, \ldots, s$ sont les conjugués complexes de module 1, b_n est un entier. Posons

$$\eta_n = \lambda_2\sigma_2^n + \ldots + \lambda_{2s-1}\sigma_{2s-1}^n \quad \text{et} \quad \sigma_h = e^{2i\pi\omega_h}.$$

Les nombres $\omega_2, \ldots, \omega_s$ sont rationnellement indépendants. En effet s'il y avait une relation $u_1 + u_2\omega_2 + \ldots + u_s\omega_s = 0$ avec u_h entier, on en déduirait $\sigma_2^{u_2} \ldots \sigma_s^{u_s} = 1$. Cette relation serait vraie, si on y remplace σ_h par σ. Or $\frac{1}{\sigma_h}$ n'y figurant pas, $\frac{1}{\sigma}$ ne figurera pas après la substitution, et on arrive à une contradiction. Or on sait, d'après KRONECKER, que dans ce cas les vecteurs $n\vec{S}$ où $\vec{S} = (\omega_2, \ldots, \omega_s)$ sont partout denses dans le cube unité. Il est donc possible de choisir n de façon que les nombres σ_h^n soient aussi voisins que l'on veut de $s - 1$ nombres complexes de module 1 donnés d'avance. Il en résulte que l'on peut trouver n de façon que η_n soit aussi voisin que l'on veut de tout nombre réel de valeur absolue inférieure à

$$\varepsilon = |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_{2s-1}| \quad .$$

Comme $\lambda_{2s-}\sigma_{2s}^n$ tend vers zéro, si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, b_n est à partir d'un certain rang l'entier le plus voisin de $\lambda\sigma^n$ et la répartition de $\lambda\sigma^n$ (mod 1) est partout dense dans l'intervalle $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ (mais non uniformément répartie). Si $\varepsilon > \frac{1}{2}$, la répartition (mod 1) de $\lambda\sigma^n$ est partout dense.

<u>Comparaison avec les nombres</u> τ. – <u>Chaque nombre</u> τ <u>est limite de nombres</u> σ [9].

Soit

$$P(z) \equiv z^s + u_{s-1}z^{s-1} + \ldots + u_0 = 0$$

l'équation du nombre τ. Posons

$$Q(z) \equiv z^s P(\tfrac{1}{z}) = 1 + U_{s-1}z + \ldots + u_0 z^s$$

et formons

$$F(z) = z^n P(z) + Q(z) \quad .$$

$F(z) = 0$ est une équation réciproque. On a

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \prod_{h=1}^{s} \frac{z - \tau_h}{1 - \tau_h z} \quad \text{où} \quad \tau_1 = \tau \ .$$

Pour $|z| = 1$, $\left|\frac{z - \tau_h}{1 - \tau_h z}\right| = 1$.

Montrons que, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, $\left|\frac{z^n P(z)}{Q(z)}\right| > 1$ si $|z| = 1 + \varepsilon$. D'autre part $\left|\frac{z - \tau}{1 - z_1}\right|$ est minimum pour $z = 1 + \varepsilon$ et ce minimum est supérieur à $1 - \varepsilon\,\frac{\tau + 1}{\tau - 1}$. L'inégalité $|Q(z)| < |z^n P(z)|$, pour $z = 1 + \varepsilon$, en résulte. L'équation $F(z) = 0$ a donc autant de racines dans $|z| \leq 1 + \varepsilon$ que $z^n P(z) = 0$, c'est-à-dire $n + s - 1$; le degré de $F(z)$ étant $n + s$, $F(z) = 0$ est vérifiée par un nombre σ. $F(\sigma) = 0$ donne alors $P(\sigma) + \frac{Q(\sigma)}{\sigma^n} = 0$ et $|P(\sigma)| < \frac{M}{(1+\varepsilon)^n}$ donc ce nombre σ tend vers τ et d'un même côté. On montrerait de même par la considération de $\dfrac{z^n P(z) - Q(z)}{z-1} = 0$ que τ est limite de nombres σ de l'autre côté.

Le raisonnement est en défaut si $P(z) \equiv Q(z)$, alors $P(z) \equiv z^2 - az + 1$, a entier. Il suffit de considérer l'équation $(x-a)\,T_n(x) - 1 = 0$ où $T_n(x) = 2\cos\left[n \arccos \frac{x}{2}\right]$ est un polynôme de TCHEBYCHEFF de degré n pour avoir l'équation d'un entier algébrique γ totalement réel avec $\gamma > 2$ dont les conjugués sont compris entre -2 et $+2$, et qui tend vers a si $n \longrightarrow \infty$. On en déduit un nombre σ par la relation $\sigma + \frac{1}{\sigma} = \gamma$ qui tend vers τ racine de $P(z) = 0$.

La question reste ouverte de savoir si les nombres τ et σ épuisent l'ensemble dénombrable des nombres α tels que $\lambda\alpha^n = a_n + \varepsilon_n$, $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon < \dfrac{1}{2(\alpha+1)^2}$. Dans ce cas il faudrait que l'ensemble des nombres $\sigma > 1$ soit partout dense.

<u>Caractérisation des nombres de Salem</u> [6]. – A tout nombre σ on peut associer un nombre $\lambda \geq 1$ de son corps tel que $\lambda\sigma^n = a_n + \varepsilon_n$ avec $|\varepsilon_n| < \frac{1}{\psi}$ pour $n = 0, 1, \ldots$; où $\psi = 2e\,\sigma(\sigma+1)(1 + \log\lambda)$. En effet, si l'on prend un nombre τ du corps de σ tel que $|\tau_h| \leq \dfrac{1}{2s\,\psi}$ on a

$$\tau\sigma^n + \tau_2\sigma_2^n + \ldots + \tau_{2s}\sigma_{2s}^n = a_n$$

entier, donc

$$|\varepsilon_n| = |\tau_2\sigma_2^n + \ldots + \tau_{2s}\sigma_{2s}^n| < \frac{1}{\psi}$$

car $|\sigma_h| \leq 1$.

Ce théorème admet une réciproque : <u>Si deux nombres réels</u> $\lambda > 1$ <u>et</u> $\alpha > 1$ <u>vérifient</u> $\lambda\alpha^n = a_n + \varepsilon_n$ <u>avec</u> $|\varepsilon_n| < \frac{1}{\psi}$ <u>pour</u> $n = 0, 1, \ldots$ α <u>est un nombre</u> σ <u>ou un nombre</u> τ, <u>et</u> λ <u>appartient au corps de</u> α. Pour le démontrer nous allons partir d'une idée de THUE [11] et la généraliser, en construisant une relation de récurrence que vérifieront les entiers a_n. Soient $u_0, u_1, \ldots, u_\nu$ des entiers arbitraires et posons $b_n = u_0 a_n + \ldots + u_\nu a_{n+\nu}$. Si on a pu choisir les $u_0, \ldots, u_\nu$ de façon que $b_0 = 0$, alors b_n est toujours nul, dès que $\psi > (\nu+1)(\alpha+1)U$, lorsque $|u_0| \leq U, \ldots, |u_\nu| \leq U$. En effet

$$b_{n+1} - \alpha b_n = u_0(a_{n+1} - \alpha a_n) \ldots + u_\nu(a_{n+\nu+1} - \alpha a_{n+\nu})$$

$$= u_0(\alpha\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}) + \ldots + u_\nu(\alpha\varepsilon_{n+\nu} - \varepsilon_{n+\nu+1})$$

donc

$$|b_{n+1} - \alpha b_n| \leq (\nu+1)(\alpha+1)U\frac{1}{\psi} < 1 .$$

Si donc $b_n = 0$, l'entier $b_{n+1} = 0$. Il suffit alors de déterminer $u_0 , \dots , u_\nu$ de façon que $b_0 = 0$. Nous montrerons que cela est possible pour tout $\nu \geq 1$ dès que $U \geq 2\alpha\lambda^{1/\nu} - 1$.

Considérons en effet toutes les expressions $b'_0 = u'_0|a_0| + \dots + u'_\nu|a_\nu|$ où $0 \leq u'_h \leq U$ pour $h = 0 , 1 , \dots , \nu$, u'_h entier. Il y a $(U+1)^{\nu+1}$ systèmes $u'_0 , \dots , u'_\nu$ correspondants. Les valeurs de l'entier b'_0 vérifient

$$0 \leq b'_0 \leq U(\nu+1)(\lambda\alpha^\nu + \frac{1}{\psi}) < (\nu+1)U\lambda\alpha^\nu + \frac{1}{\alpha+1} < (\nu+1)(U+1)\lambda\alpha^\nu - 1 .$$

Par suite si $(U+1)^{\nu+1} \geq (\nu+1)(U+1)\lambda\alpha^\nu$, c'est-à-dire si $U + 1 \geq (\nu+1)^{1/\nu}\lambda^{1/\nu}\alpha$ deux systèmes $u'_0 , \dots , u'_\nu$ différents donnent la même valeur numérique à b'_0 . La différence donnera donc des entiers $u_0 , \dots , u_\nu$ avec $|u_h| \leq U$ tels que $b_0 = u_0 a_0 + \dots + u_\nu a_\nu = 0$. Comme $(\nu+1)^{1/\nu} \leq 2$ la relation est vraie dès que $U \geq 2\alpha\lambda^{1/\nu} - 1$.

Choisissons alors l'entier ν par la condition $\nu - 1 \leq \log\lambda < \nu$, alors $(\nu+1)\lambda^{1/\nu} < e(1 + \log\lambda)$. En effet la droite $y_1 = \frac{x}{\nu} + \log(1+\nu)$ et la courbe $y_2 = 1 + \log(1+x)$ se coupent pour $x = \nu$. Pour $x = \nu - 1$, on a $y_1 = 1 - \frac{1}{\nu} + \log(1+\nu)$ et $y_2 = 1 + \log\nu$, donc $y_1 - y_2 = \log(1+\frac{1}{\nu}) - \frac{1}{\nu} < 0$. En vertu de la concavité de la courbe y_2 , on a donc $y_1 < y_2$ pour $\nu - 1 \leq x < \nu$, en particulier pour $x = \log\lambda$.

Ayant ainsi choisi ν , déterminons U par la condition $2\alpha\lambda^{1/\nu} - 1 \leq U < 2\alpha\lambda^{1/\nu}$ On pourra alors trouver des entiers u_h avec $|u_h| \leq U$ $h = 0 , \dots , \nu$ tels que $b_0 = u_0 a_0 + \dots + u_\nu a_\nu = 0$, pourvu que $\psi > (\nu+1)(\alpha+1)U$, c'est-à-dire, comme

$$(\nu+1)(\alpha+1)U < 2(\alpha+1)\alpha(\nu+1)\lambda^{1/\nu} < 2e\alpha(\alpha+1)(1+\log\lambda),$$

il suffira que $\psi \geq 2e\alpha(\alpha+1)(1+\log\lambda)$. Mais alors $b_n = 0$, pour tout n , et α est algébrique.

La démonstration faite à partir de la relation de récurrence pour les nombres τ , montre que α est entier algébrique et que ses conjugués sont de module ≤ 1 . λ appartient au corps de α . Le degré de α ne dépasse pas $1 + \log\lambda$. α est donc un nombre τ ou un nombre σ .

APPLICATIONS

Approximations rationnelles. - Depuis LAGRANGE on sait que les nombres algébriques du second degré sont caractérisés par la périodicité de leur développement en fraction continue. Cette périodicité entraîne une régularité dans la distribution des valeurs approchées rationnelles ; de façon précise, elle démontre l'existence de valeurs approchées $\frac{p_n}{q_n}$ du nombre ξ telles que

$$|p_{n+1} - \alpha p_n| < \frac{C}{p_n} \ , \quad |q_{n+1} - \alpha q_n| < \frac{C}{q_n} \ ,$$

c'est-à-dire telles que les numérateurs p_n et les dénominateurs q_n sont "presque" en progression géométrique.

Les considérations précédentes démontrent la réciproque et permettent de la généraliser à tout nombre algébrique réel. Ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que ξ soit algébrique, c'est que $\xi = \lim\limits_{n=\infty} \frac{p_n}{q_n}$ où les nombres rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ sont tels que les séries $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |p_{n+1} - \alpha p_n|^2$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |q_{n+1} - \alpha q_n|^2$ soit convergentes. Le nombre α, raison de la progression géométrique approximative de p_n et de q_n, est en effet alors un nombre τ et ξ sera un nombre du corps de τ.

Répartition (mod 1) de $\lambda\alpha^n$ [6]. - Posons $\lambda\alpha^n = a_n + \psi_n$, a_n étant entier. Supposons que ψ_n ait un nombre fini de points limites. Si α est algébrique on montre facilement que α est nécessairement un nombre τ. Si l'on ne sait pas que α est algébrique, supposons que ℓ_k, $k = 1, \dots, k$ soient les points limites de ψ_n qui sont irrationnels, et que $|\psi_n - \ell_k| = o(\frac{1}{n^{k+1}})$. Alors α est encore un nombre τ. Pour le montrer, on approche les k nombres ℓ_k par des nombres rationnels $\frac{p_k}{q}$ tels que $|p_k - q\,\ell_k| < \frac{1}{n_0^{k+1}}$, C étant une constante appropriée. ν étant le dénominateur commun des points limites rationnels, alors $\nu q \lambda \alpha^n = b_n + \varepsilon_n$, avec b_n entier et ε_n est assez petit pour que $|\varepsilon_n| < \frac{1}{\psi}$, $\psi = 2e\,\alpha(\alpha + 1)(1 + \log q\,\nu\lambda)$.

Fonctions analytiques. - On sait que si $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ représente une fonction bornée pour $|z| < 1$, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ est convergente. Les considérations développées sur les nombres τ montrent alors que si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec a_n entier représente une fonction ayant un nombre fini de pôles pour $|z| < 1$ et bornée dans $|z| < 1$ sauf au voisinage de ces pôles, alors $f(z)$ est une fraction rationnelle. R. SALEM [9] a donné diverses généralisations de cette propriété. Indiquons encore une autre généralisation.

Si la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a_n entier, peut se mettre sous la forme $f(z) = \frac{\varepsilon(z)}{\eta(z)}$ avec $\varepsilon(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n$, $\eta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n z^n$ et si les séries $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|^{\lambda}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|^{\mu}$ avec $\lambda \leq 2$, $\mu \leq 2$, $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$ sont convergentes, $f(z)$ est une fraction rationnelle.

R. SALEM a également donné une caractérisation des nombres σ basée sur les séries de TAYLOR [9]. Posons $\lambda \alpha^n = a_n + \varepsilon_n$, a_n entier. La condition nécessaire et suffisante pour que α soit un nombre σ c'est que l'on puisse trouver un nombre λ tel que la série $\varepsilon(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n$ ait sa partie réelle bornée pour $|z| < 1$ sans que sapartie imaginaire le soit.

Le théorème sur le nombre fini de points limites permet aussi de démontrer le théorème suivant [7].

Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une fonction méromorphe pour $|z| \leq R$, $R > 1$. Si les nombres c_n ont (mod 1) un nombre fini de valeurs, $g(z)$ est une fraction rationnelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FATOU (P.). - Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta math., t. 30, 1906, p. 335-400.

[2] KOKSMA (J. F.). - Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins, Comp. Math., t. 2, 1935, p. 250-258.

[3] PISOT (Charles). - Sur la répartition modulo 1 des puissances successives d'un même nombre, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 204, 1937, p. 312-314.

[4] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Annali r. Scuola Norm. Sup. Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248.

[5] PISOT (Charles). -

[6] PISOT (Charles). - Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres réels, Comment. Math. Helv., t. 19, 1946, p. 153-160.

[7] PISOT (Charles). - Propriétés arithmétiques des coefficients des séries de Taylor, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 224, 1947, p. 438-440.

[8] SALEM (R.). - A remarkable class of algebraic integers, Proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.

[9] SALEM (R.). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.

[10] SIEGEL (Carl Ludwig). - Algebraic integers whose conjugates Lie in the unit circle, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 597-602.

[11] THUE (Axel). - Über eine Eigenschaft, die keine transcendente Grösse haben kann, Skrifter Vidensk. I. Kristiania, t. 2, n° 20, 1912, p. 1-15.

[12] VIJAYARAGHAVAN (T.). - On the fractional parts of the powers of a numbers, II., Proc. Cambridge philos. Soc., t. 37, 1941, p. 349-357.

ADDITIF

CHABAUTY (Claude). - Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 231, 1950, p. 465-466.

CHAMFY (Christiane). - Sur les coefficients de certaines fonctions méromorphes dans le cercle-unité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 225-227.

CHAMFY (Christiane). - Valeur minima du module pour un ensemble fermé d'entiers algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 1992-1994.

DOUBRÈRE (Monique). - Sur les points limites d'un ensemble remarquable d'entiers algébriques imaginaires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 2111-2113.

DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 70, 1953, p. 105-133.

DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les dérivés successifs d'un ensemble fermé d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., Série 2, t. 77, 1953, p. 129-136.

DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité, Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 72, 1955, p. 69-92.

DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les éléments d'accumulation d'un ensemble fermé d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., Série 2, t. 79, 1955, p. 54-64.

KELLY (John B.). - A closed set of algebraic integers, Amer. J. of Math., t. 72, 1950, p. 565-572.

PISOT (Charles). - Sur une famille remarquable d'entiers algébriques formant un ensemble fermé, Colloque sur la théorie des nombres [1955. Bruxelles]. - Liège, Thone et Paris, Masson, 1956.

SAMET (P. A.). - Algebraic integers with two conjugates outside the unit circle, Proc. Cambridge philos. Soc., t. 49, 1953, p. 421-436.

SAMET (P. A.). - Algebraic integers with two conjugates outside the unit circle, II., Proc. Cambridge philos. Soc., t. 50, 1954, p. 346.

[Mai 1957]