Claude Chabauty

Géométrie des nombres

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 4 (1950-1951), exp. nº 1, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1950-1951__4__A1_0>

GÉOMÉTRIE DES NOMBRES

par Claude CHABAUTY

1. Introduction.

GAUSS, DEDEKIND, HERMITE ont employé quelquefois des méthodes géométriques dans la théorie arithmétique des formes. MINKOVSKI les a développées systématiquement, apportant un grand nombre de résultats, de méthodes et de problèmes nouveaux. (Cf. [29], [30], et divers articles séparés). On a un résumé assez complet de son oeuvre dans ce domaine dans : HANCOCK [22]. Les résultats essentiels, utiles pour la théorie des nombres algébriques sont dans : A. CHÂTELET [11]. Pour la bibliographie des travaux postérieurs à MINKOWSKI jusqu'en 1936 (peu nombreux) cf. KOKSMA [25]. Depuis 1936, de nombreux travaux ont été publiés par MORDELL, DAVENPORT, MAHLER et leurs élèves. REMAK, TCHEBOTAREFF, HAJOS, SIEGEL, DYSON ont démontré, plus ou moins complètement suivant les cas, les plus importantes conjectures de MINKOWSKI. Il n'y a pas de monographie récente, mais les compte-rendus dans le Zentralblatt für Mathematik et les Mathematical Reviews sont très complets et forment un bon résumé de la question.

Nous ne nous occuperons ici que de quelques questions simples relatives aux majorations des minima des formes, en rappelant les résultats classiques et signalant les problèmes ouverts.

2. Formes quadratiques définies.

Soit $f(x) = f(x_1 , \dots , x_n) = \sum g_{ij} x_i x_j$ une forme quadratique définie positive de discriminant $\Delta = \det (g_{ij})$. On peut la mettre sous la forme $f(x) = (\sum_h x_h a_h)^2$, les a_h étant n vecteurs linéairement indépendants. Quand les x_i sont entiers $\sum x_i a_i$ décrit un réseau G dont tout parallélotope fondamental a pour mesure $m(G) = \sqrt{\Delta} = \det(a_i)$. Si $p_1 , \dots , p_n$ forment une base de G, $g(x) = (\sum x_h p_h)^2$ est une forme arithmétiquement équivalente à $f(x)$.

Cas $n = 2$. - Soit m_1 un des points de G différents de 0 situés à distance minima de 0, m_2 un des points de G non situés sur la droite Om_1

et ayant parmi ceux-ci la distance minima de O. m_1 et m_2 constituent une base de G. Soit q la projection de O sur la droite $m_2 + tm_1$, il y a un point de G sur tout intervalle $t_0 < t \leqslant t_0 + 1$ de cette droite. Donc on a $m_2 = q + t_1\, m_1$ $(-\frac{1}{2} < t_1 \leqslant \frac{1}{2})$. On obtient donc pour la base ainsi choisie

(1) $|m_1| \leqslant |m_2|$

(2) $|m_1 . m_2| \leqslant \frac{1}{2}\, m^2$

en outre, comme $m_2^1 \leqslant q^2 + \frac{1}{4}\, m_1^2$ et $|q_1|\;|m_1| = D$ on a aussi

(3) $|m_1| . |m_2| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\; D$

l'égalité pouvant être réalisée dans (1), (2), (3) dans le cas du réseau "équilatère" $(|m_1| = |m_2|\;,\;\; (\widehat{m_1, m_2}) = \pi/3)$. La base m_1, m_2 est en général bien déterminée par les conditions (1) et (2) à des transformations triviales près. Ces résultats donnent l'essentiel de ce qu'on sait depuis LAGRANGE sur la réduction des formes quadratiques définies binaires (la forme "réduite" étant $f(x) = (x_1\, m_1 + x_2\, m_2)^2$).

<u>Cas</u> $n > 2$. — Pour $n = 3$, on peut démontrer de même l'existence d'une base de G, formée des "minima" indépendants m_1, m_2, m_3 et obtenir en particulier l'inégalité $|m_1|\,|m_2|\,|m_3| \leqslant \sqrt{2}\; D$ (GAUSS, Cf. la démonstration géométrique d'HERMITE, [23], p. 94, qui peut être beaucoup simplifiée)

Pour $n = 4, 5$, KORKINE et ZOLOTAREFF [26], pour $n = 6, 7, 8$, BLICHFELDT [2] et [4] ont déterminé la meilleure majorante de $m_1\; 1/D$. (On pose en général $\gamma_n = \sup \frac{m_1^2}{D^2}$ de sorte que γ_n est le plus petit nombre tel qu'une forme quadratique définie positive représente toujours pour des valeurs entières non toutes nulles des variables, un nombre $\leqslant \gamma_n$). La connaissance de ces valeurs de γ_n est importante dans de nombreuses questions. Il serait très intéressant de simplifier les calculs très ardus des auteurs cités et d'étendre leurs résultats. Le travail de CHOW sur la question est malheureusement incorrect. D'une majoration de γ_n résulte comme on verra tout à l'heure une majoration de $|m_1|\,|m_2| \ldots |m_n|$. Mais une autre difficulté se présente dès que n est $\geqslant 4$. Un système de minima $m_1, \ldots, m_n$ d'un réseau pour la distance euclidienne, n'est pas nécessairement une base. Exemple : réseau G formé par les points de R^n de coordonnées toutes égales à 0 ou toutes égales à $\frac{1}{2}$ module 1. Pour $n \geqslant 2$, en prenant n points à distance 1 de l'origine sur les axes et linéairement indépendants, on obtient un système de minima (et ce sont les seuls possibles si $n \geqslant 5$) . Ce n'est pas une base de G .

Pour n quelconque, HERMITE a montré par le calcul, qu'on peut dans tout réseau G trouver une base $p_1, \ldots, p_n$ telle que

$$p_1^2 . p_2^2 \times \ldots \times p_n^2 \leqslant \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^2)$$

(d'où $\gamma_n \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}$), majoration très grossière, mais qui lui a suffi pour jeter les bases d'une théorie générale de la réduction des formes quadratiques définies à n variables et à en donner de nombreuses applications ; mais les conditions de réduction sont peu commodes. Il a donné une autre définition d'une <u>forme réduite</u>, ou ce qui revient au même d'une base réduite $p_1, \ldots, p_n$ d'un réseau. On doit prendre pour p_{h+1} un élément de G qui, parmi les adjonctions primitives à $p_1, \ldots, p_h$, donne la plus petite valeur à $|p_{h+1}|$ (la condition de primitivité signifie que $p_1, \ldots, p_{h+1}$ doivent former une base de sous-réseau formé des éléments de G contenus dans la variété linéaire $t_1 p_1 + \ldots + t_{h+1} p_{h+1}$). Un des intérêts de cette définition (en général attribuée à MINKOWSKI) c'est qu'elle se traduit par des conditions linéaires sur les coefficients g_{ij} d'une forme réduite $g(x)$: $g_{hh} \leqslant g(x)$ pour tout x à coordonnées entières tel que le p.g.c.d. $(x_h, \ldots, x_n) = 1$, de sorte que le domaine fondamental dans l'espace $R^{\frac{n(n-1)}{2}}$ des g_{ij} est un cône convexe limité par des hyperplans. On peut démontrer qu'il n'a effectivement qu'un nombre fini de faces à partir de l'inégalité (3) généralisée,

$$(3) \qquad \prod_{h=1}^{n} g_{hh} = \prod_{h=1}^{n} p_h^2 \leqslant \sigma_n \Delta , \quad \sigma_n \text{ constante } < +\infty$$

fonction de n seul, qu'on peut obtenir aussi pour n quelconque, avec ce type de réduction.

HERMITE a annoncé une telle inégalité. STOUFF, puis MINKOWSKI ont démontré $\sigma_n < +\infty$ sans que leurs calculs leur permettent de majorer numériquement σ_n . BIEBERBACH et SCHUR en 1929 ont démontré que $\sigma_n \leqslant (\mathrm{Cte})^{n^3}$ et REMAK en 1938 a démontré $\sigma_n \leqslant (\mathrm{Cte})^{n^2}$.

Les méthodes géométriques introduites par MINKOWSKI lui ont permis de majorer γ_n très aisément et beaucoup mieux qu'HERMITE, et il n'est pas difficile dans le même esprit de retrouver le résultat de REMAK. Voici dans le cas qui nous occupe le procédé de MINKOWSKI :

Majoration de γ_n. - D'après la définition même du "premier minimum" m_1, la boule $A = \mathcal{E}_x(|x| < |m_1|)$ ne contient pas d'autres points du réseau G que l'origine 0. Soit $B = \mathcal{E}_x(|x| < |m_1|/2)$, les boules

$$B_g = B + g = \mathcal{E}_x(|x - g| < |m_1|/2) ,$$

ou $g \in G$, n'ont pas de points communs (empilement régulier de sphères), ou ce qui revient au même, l'ensemble B est irréductible par rapport à G ($x \in B$, $y \in B$, $x - y \in G$ entraînent $x = y$). Il est alors évident que $\operatorname{mes}(B) \leq D$ mesure du parallélotope fondamental de G. Soit Ω_n la mesure de la boule unité $\mathcal{E}_x(|x| < 1)$ dans R^n on a donc

$$|m_1|^n \, \Omega_n \leq 2^n D \qquad \gamma_n \leq 4/(\Omega_n)^{2/n}$$

Remarquons que Ω_n contient le cube $|x_i| \leq 1/\sqrt{n}$ de mesure $2^n/n^{n/2}$, on a donc $\gamma_n \leq n$, résultat bien meilleur que celui d'HERMITE. En utilisant la valeur exacte $\Omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1 + n/2)$ on voit que

$$\gamma_n < \frac{2}{\pi e} n \quad \text{(MINKOWSKI)}.$$

Majoration du produit $\prod |m_n|$. Ramenons comme on peut toujours le faire, au cas $G = Z^n$ (réseau des points à coordonnées entières), où $p_{j_i}(m_i) \neq 0$, $p_{j_j}(m_i) = 0$ pour tout $j > i$, et la forme quadratique considérée mise sous la forme $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, $X_i = \sum a_{ij} x_j$, $a_{ii} \neq 0$, $a_{ij} = 0$ si $j > i$. Posons $g(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2/f(m_i)$. Soit x un élément de Z^n différent de 0. Soit h le plus petit entier tel que $p_{j_k}(x) = 0$ pour tout $k > h$. Alors $f(x) \geq f(m_h)$, donc :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{h} X_i^2/f(m_i) \geq \Big(\sum_{i=1}^{h} (X_i^2)/f(m_h)\Big)^2 = f(x)/f(m_h) \geq 1$$

Il vient, d'après la définition de γ_n, $1 \leq \gamma_n^n \times \operatorname{discr}(g(x))$, mais $\operatorname{discr}(g(x)) = \operatorname{discr}(f(x))/\prod f(m_h)$,

donc

$$\prod_{h=1}^{n} f(m_h) \leq \gamma_n^n \, \Delta \quad \text{(MINKOWSKI)}$$

En posant $\rho_n = \sup \prod |m_h|^2/\Delta$ on voit qu'on a montré que la constante ρ_n

évidemment $\leqslant \gamma_n^n$, lui est, en fait, égale.

Majoration de $\prod |p_i|$. - En modifiant très légèrement une idée de MAHLER [27] (qui donnait une majoration un peu moins bonne), nous allons montrer qu'on peut obtenir la majoration de REMAK (sans les longs calculs de celui-ci). Pour une base réduite (au sens défini plus haut) on démontre d'abord le lemme suivant presque immédiat :

LEMME 1. - Si $\ell_1 , \dots , \ell_n$ sont n éléments linéairement indépendants d'un réseau G de R^n , pour tout $x \in R^n$ il existe un $g \in G$ tel que

$$|x - g|^2 \leqslant \frac{1}{4} (\ell_1^2 + \dots + \ell_n^2)$$

LEMME 2. - Soit G un réseau de R^n , $m_1 , \dots , m_n$, un système de minima du réseau, $p_1 , \dots , p_h$ une base réduite de G , au sens défini plus haut. On a $p_h^2 \leqslant \tau_h m_h$ avec $\tau_h = (\frac{5}{4})^{h-4}$ si $h \geqslant 4$, et $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 1$.

Supposons $p_1 , \dots , p_h$ choisis. Parmi les $h + 1$ vecteurs linéairement indépendants $m_1 , \dots , m_{n+1}$, il y en a au moins un, soit m_i $(i \leqslant h + 1)$, linéairement indépendant de $p_1 , \dots , p_h$. Si m_i est une adjonction primitive à $p_1 , \dots , p_h$, on prendra $p_{h+1} = m_i$, alors $p_{h+1}^2 = m_i^2 \leqslant m_{h+1}^2$. Si m_i n'est pas une adjonction primitive, c'est qu'il existe des points de G dans une variété linéaire $\frac{1}{r} m_i + t_1 p_1 + \dots + t_h p_h$, r étant un certain entier > 2 . Soit q la projection de 0 sur la variété linéaire précédente. D'après le lemme (1), il existe un élément ℓ de G situé dans cette variété et tel que

$$|\ell_{-q}|^2 \leqslant \frac{1}{4} (p_1^2 + \dots + p_h^2) .$$

Mais, par construction, ℓ est une adjonction primitive à $p_1 , \dots , p_h$ donc on aura $p_{h+1}^2 \leqslant \ell^2$ et d'autre part $|q| \leqslant |m_i| |r \leqslant |m_h|/2$. D'où, dans ce cas, l'inégalité :

$$p_{h+1}^2 \leqslant (m_h^2 + p_1^2 + p_h^2)/4$$

On peut donc prendre $\tau_h = \max(1 , (\tau_1 + \dots + \tau_h)/4)$ et évidemment $\tau_1 = 1$. Il en résulte $\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 1$ et pour $h \geqslant 4$

$$\tau_h = (1 + \tau_1 + \dots + \tau_h)/4 , \quad \tau_{h+1} - \tau_h = \tau_h/4 ,$$

d'où le résultat annoncé.

COROLLAIRE. - <u>L'inégalité de REMAK</u> : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 1$,

et

$$\sigma_n \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{(n-3)(n-4)}{2}} \gamma_n^n \quad (n \geq 4) .$$

En effet $\prod |p_h|^2 \leq \prod (\tau_h) \prod |m_h|^2 \leq \prod \tau_h \, \gamma_n^n \, D^2$ d'après un résultat antérieur.

REMARQUE. - Par une méthode analogue si on prend une base réduite au premier sens d'HERMITE (que nous n'explicitons pas) j'ai pu obtenir une inégalité bien meilleure, le coefficient $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{(n-3)(n-4)}{2}}$ étant remplacé par le coefficient $\frac{1}{4^{n-4}} \frac{n!}{6}$ qu'il est possible d'améliorer encore légèrement. De telles majorations facilitent la recherche des formes quadratiques à coefficients entiers de discriminant donné.

<u>Amélioration de BLICHFEIDT à la majoration de</u> γ_n. - Le point de départ de MINKOWSKI, c'est le fait trivial que des sphères de densité 1, empilées, donnent une densité moyenne ≤ 1 . Si l'on tient compte de <u>vides</u> laissés entre elles par ces sphères de même rayon, on obtient un résultat plus fort. BLICHFEIDT a montré que la fraction d'espace, η_n , occupée par un tel empilement dans R^n , est $\leq \frac{n+2}{2(\sqrt{2})^n}$. D'où la majoration

$$\gamma_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{2\,\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{n}{\pi e} .$$

Démonstration de BLICHFEIDT [3] : on part de l'identité vectorielle élémentaire, relative à m + 1 points $M_1 , \dots , M_m . P$, et le centre de gravité G de $M_1 , \dots , M_m$, dans R^n :

$$m \sum_{i=1}^{m} \overline{PM}_i^2 = \sum_{(i,j)} \overline{M_1 M_j}^2 + m^2 \, \overline{PG}^2 .$$

Supposons les M_i centres de sphères disjointes de rayon 1, alors

$$m \sum \overline{PM}_i^2 \geq \sum_{(ij)} \overline{M_1 M_j}^2 \geq 4 \frac{m(m-1)}{2} , \text{ donc } \sum \left(1 - \left(\frac{PM}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \leq 1 .$$

Si donc à chaque M_i on associe la sphère de rayon $\sqrt{2}$ et de densité $1 - \frac{r^2}{2}$ (r distance au centre), elles empiètent éventuellement mais la somme des densités en chaque point de l'espace est ≤ 1 . La masse de chaque sphère est

$$\int_{r=0}^{r=\sqrt{2}} \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) d(\Omega_n \, r^n) = \Omega_n \, \frac{2(\sqrt{2})^n}{n+2}$$

D'où le résultat annoncé.

La démonstration initiale de BLICHFELDT [1] est un peu plus compliquée, mais importante du point de vue méthode. Il serait extrêmement intéressant d'améliorer le résultat de BLICHFELDT $\gamma_n < \frac{n}{\pi e}$, s'il est possible, ou de montrer, comme on l'a conjecturé, qu'il ne peut l'être ($\gamma_n \sim \frac{n}{\pi e}$?) Mais les travaux récents sur l'empilement des sphères (RANKIN [36]) ne modifient pas l'ordre asymptotique de la majoration de BLICHFELDT pour η.

THÉORÈME de HLAWKA. - En sens inverse un résultat très général de HLAWKA [23], conjecturé par MINKOWSKI, montre aisément que pour les empilements réguliers de sphères (ou d'ensembles convexes symétriques quelconques), on a toujours, dans R^n, $\eta \geq \frac{1}{2}n$, donc ici $\gamma_n > \frac{n}{2\pi e}$.

Enonçons sans le démontrer, le théorème de HLAWKA :

Soit A un ensemble arbitraire A de R^n, posons $\delta(A) = \inf m(G)$ pour tous les réseaux G tels que $G \cap A$ se réduise à l'origine ou soit vide. Alors pour tout ensemble quarrable $\delta(A) \leq \operatorname{mes}(A)$.

Soit $\Delta(A) = \inf m(G)$ pour les réseaux G tels que les ensembles $A + g$ soient disjoints. On a $\eta(A) = \frac{\operatorname{mes}(A)}{\Delta(A)}$ et, si A est convexe et symétrique par rapport à l'origine, $\Delta(A) = 2^n\, \delta(A)$ d'où l'application annoncée.

ROGERS [38] a donné une élégante démonstration élémentaire du résultat de HLAWKA, que j'ai exposée au Séminaire Bourbaki l'année dernière.

THÉORÈMES de moyenne. - SIEGEL [41] a obtenu le théorème de HLAWKA comme corollaire du résultat suivant (cf. aussi WEIL [43]).

Notons $\delta(A, B)$ le nombre de points de $A \cap B$ et $G = G - \{0\}$. Alors pour tout ensemble quarrable : $\operatorname{mes}(A) = \int_{G \in \Gamma} \delta(A, G)\, dV$, Γ étant un domaine fondamental des réseaux réduits (i. e. l'espace homogène quotient du groupe des transformations linéaires de déterminant 1 par le sous-groupe formé des transformations à coefficients entiers), dV étant la mesure "naturelle" (mesure de Maur) dans Γ, nommée par $\operatorname{mes}(\Gamma) = 1$.

Notons à ce propos que le résultat signalé plus haut : si $\operatorname{mes}(A) > m(G)$, A n'est pas "irréductible" par rapport à G, admet une généralisation immédiate qui peut se mettre aussi sous forme de théorème de moyenne (REMAK)

$$\operatorname{mes}(A)/m(G) = \int_{x \in F} \delta(A + x, G)\, dx \quad (F \text{ domaine fondamental de } G),$$

COROLLAIRE. - Il existe x_0 tel que $\delta(A + x_0 , G) \geqslant \text{mes}(A)/m(G)$ (BLICHFELDT). Il est probable que d'autres résultats importants de géométrie des nombres trouveront leur source dans de tels théorèmes de moyenne, les résultats plus "fins" ressortant de méthodes plus "techniques". Ainsi le résultat de HLAWKA a été largement amélioré par ROGERS et DAVENPORT [19] pour les ensembles convexes et symétriques et plus particulièrement pour les sphères.

3. Minimum d'une forme.

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu l'application de méthodes géométriques à l'étude des valeurs d'une forme quadratique définie positive $\varphi(x)$, $x \in R^n$, sur un réseau $x = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$. Les méthodes de MINKOWSKI s'appliquent, comme il l'a montré, à des formes plus générales.

Appelons forme positivement homogène de degré d , une fonction $f(x)$ définie sur R^n , à valeurs réelles $\geqslant 0$, prenant éventuellement la valeur $+\infty$, et telle que $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ pour tout $\lambda \geqslant 0$. Pour l'étudier on peut toujours se ramener au cas $d = 1$, et dans la suite, "forme" signifiera "forme positivement homogène de degré 1" , sauf mention expresse du contraire. Une forme est finie si elle ne prend pas la valeur $+\infty$, définie si $f(x) = 0$ entraîne $x = 0$, symétrique si $f(-x) = f(x)$, convexe si $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$; c'est une norme si elle a ces 4 propriétés à la fois.

A une forme f on associe $S = \mathcal{E}_x(f(x) < 1)$, $S' = \mathcal{E}_x(f(x) \leqslant 1)$, ce sont des ensembles étoilés (par rapport à 0 , $x \in S$ entraîne $\lambda x \in S$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Réciproquement, étant donné un ensemble étoilé Σ , on peut lui associer une forme f , son indicatrice, uniquement déterminée par la condition $S \subset \Sigma \subset S'$. Nous appelons jauge un ensemble convexe, symétrique (par rapport à 0) , borné et contenant un voisinage de l'origine. Son indicatrice est donc une norme.

Minimum d'une norme. - La première inégalité de MINKOWSKI sur le minimum d'une forme quadratique définie positive φ se transpose immédiatement au cas d'un norme quelconque, puisqu'on a utilisé essentiellement le fait que $\sqrt{\varphi}$ est une norme (norme euclidienne). G étant un réseau de déterminant $m(G)$, si A est un ensemble tel que les $A + g$, $g \in G$, soient disjoints (empilement régulier), on a $\text{mes}(A) \leqslant m(G)$. Soit $v(A)$ le vectoriel de A :

$$v(A) = \mathcal{E}_z(z = x - y,\ x \in A,\ y \in A)$$

la propriété "les $A + g$ sont disjoints" équivaut à "$v(A) \cap \dot{G}$ est vide" $(\dot{G} = G - \{0\})$.

Si en particulier A est une jauge $v(A) = 2a$ (propriété caráctéristique). Donc, si J est une jauge, et si $\operatorname{mes}(J) > p^n\, m(G)$, il existe un élément $p \in G$ et $\neq 0$ qui est contenu dans J (si on remplace $>$ par $<$ on peut seulement affirmer $p \in \bar{J}$). En d'autres termes, si $f(x)$ est une norme, $J = \mathcal{C}_x(g(x) < 1)$ la jauge associée, il existe $p \in G$ et $\neq 0$ tel que

$$(1) \qquad f(p) \leq 2(m(G)/\operatorname{mes}(J))^{1/n} \qquad \text{(MINKOWSKI)}$$

Formes non convexes. - On peut aisément généraliser (1) à des formes k-convexes : $f(x+y) \leq k(f(x) + f(y))$. Mais quelque hypothèse de convexité est nécessaire car pour une forme f, $\operatorname{mes}(S(f)) = +\infty$ n'entraîne pas nécessairement que la forme représente un nombre arbitrairement petit sur tout réseau. Exemple : $f = |x_1 . x_2|^{1/2}$. Sur un réseau G avec $m(G) = 1$, le nombre minimum représenté est $\leq (1/5)^{1/4}$, cette borne étant atteinte pour le réseau $x_1 = t_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} t_2$, $x_2 = t_1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} t_2$, t_1, t_2 entiers, puisque $t_1^2 - 2t_1 t_2 - t_2^2$ ne peut représenter zéro pour t_1, t_2 entiers non tous deux nuls. Que cette borne suffise pour tout réseau G avec $m(G) = 1$ peut se démontrer par un raisonnement géométrique très élémentaire (KORKINE), qui prouve aisément, en même temps, qu'il y a une infinité de telles représentations, d'où l'énoncé bien connu : pour tout θ réel il y a une infinité de paires d'entiers p et q avec

$$\left|\frac{p}{q} - \theta\right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}q^2} \qquad \text{(HURWITZ)},$$

démontré sans les fractions continues.

Si f est une forme telle que $\operatorname{mes}(S(f)) = \theta$ pour majorer son minimum sur un réseau, on n'a guère, comme méthode générale, que la méthode banale, mais souvent puissante, de la majorer par une forme convexe. Si on cherche un ensemble auxiliaire A (de la plus grande mesure possible) tel que $v(A) \subset S(f)$, ce n'est que dans des conditions assez particulières (cf. MORDELL [33], MULLENDER [34] qu'on trouve des ensembles auxiliaires meilleurs que les jauges.

Nous indiquerons in fine un artifice d'un autre genre dû à DAVENPORT et une généralisation que j'en ai faite pour améliorer l'emploi d'une forme majorante.

Applications classiques aux formes linéaires. Soient $X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$ $(i = 1, \dots, n)$ n formes linéaires indépendantes à n variables et soit $D = |\det(a_{ij})|$. Pour les x_i entiers $X = (X_1 \dots X_n)$ décrit un réseau G avec $m(G) = D$. On a donc comme corollaire immédiat de (I) :

Si les C_h sont des constantes > 0 avec $\prod C_h \leq 1$ il existe des entiers x_i non tous nuls tels que :

(A) $$C_h \, |X_h| \leq D^{1/n} \qquad (h = 1 , \ldots , n)$$

et de même, il existe des entiers x_i non tous nuls tels que

(B) $$\sum_{h=1}^{n} C_h \, |X_h| \leq (n \, ! \, D)^{1/n} \sim \frac{n}{e} D^{1/n}$$

puisque

$$\text{mes}(\mathcal{E}_x (C_1 \, |X_1| < 1 \, , \; C_n \, |X_n| < 1)) = 2^n / \prod C_h$$

et

$$\text{mes}(\mathcal{E}_x (C_1 \, |X_1| + \ldots + C_n |X_n| < 1) = 2^n / n! \prod C_h$$

Par le théorème de la moyenne, (B) entraîne l'existence d'une infinité de systèmes de x_i entiers non tous nuls tels que

(C) $$\prod_{h=1}^{n} |X_h| \leq \frac{(n!D)^{1/n}}{n} \sim \frac{1}{e} \; D^{1/n} \quad .$$

Conséquences arithmétiques. - Ces résultats joints aux résultats analogues pour les systèmes de r formes réelles et $2s$ formes complexes conjuguées ($r + 2s = n$ nombre des variables) ont des applications importantes dans la théorie des corps de nombres algébriques.

Soient K un corps de degré n , $\omega_1 , \ldots , \omega_n$ une base des entiers de K , $\omega_1^{(i)} + \ldots + x_n \, \omega_n^{(i)}$. On obtient alors le théorème des unités, la finitude du nombre de classes d'idéaux, les théorèmes du discriminant (qui est le carré du déterminant du réseau associé aux entiers du corps). On trouvera ces résultats classiques dans la "Théorie des nombres" de A. CHÂTELET [11] .

Remarquons que l'amélioration des inégalités précédentes de MINKOWSKI (quand elle est possible) est intéressante non seulement en soi, mais aussi éventuellement pour les applications à la théorie des nombres algébriques. Par exemple, si on pouvait remplacer la constante $\frac{1}{e}$ dans (G) , par une fonction de n tendant vers zéro et faire une amélioration analogue pour les formes complexes, on démontrerait la conjecture des "Tours de corps de classes" : Si (K_n) est une suite de corps, $K_{n+1} \supset K_n$ et corps de classe pour K_n , alors la suite (K_n) est finie. Mais on est loin de compte encore.

Amélioration des inégalités de MINKOWSKI. - Quand il s'agit d'une jauge J, l'amélioration consiste, comme on a vu dans le cas des sphères, à tenir compte des "vides" dans les empilements $J + g$, g parcourant un réseau, c'est-à-dire majorer non trivialement, s'il est possible, la quantité $\eta(J)$ qui représente la fraction d'espace occupée par les $J + g$ dans l'empilement régulier le plus dense.

Pour l'inégalité (A) (cas totalement réel), il ne peut y avoir d'amélioration, car un empilement régulier de pavés peut remplir l'espace ($\eta = 1$). Dans le cas non totalement réel, j'ai donné (au Colloque de septembre 1949) une amélioration de l'inégalité qui fournit en particulier le meilleur coefficient possible pour le cas $r = n - 2$, $s = 1$, comme conséquence du résultat suivant facile à établir : si $P = A \times B$ (produit cartésien), $\eta(P) \leqslant \min(\eta^{\times}(A), \eta^{\times}(B))$ $\eta^{\times}$ étant le coefficient analogue à η pour des empilements réguliers ou non d'ensembles par translation. (Celles-ci ne formant pas nécessairement un réseau). L'inégalité (B) peut être améliorée à l'aide du résultat de BLICHFEIDT $\eta \leqslant \frac{n+2}{(\sqrt{2})^n}$ pour les sphères, démontré plus haut, et de l'inégalité $\sum |X_1^2| \leqslant \sqrt{n}(\sum X_1^2)^{1/n}$. RANKIN [37] a démontré $\eta \leqslant (0,74)^n$ pour l'ensemble $\sum |X_i| < 1$ ce qui améliore un peu (B), donc (G). Il a aussi obtenu des résultats analogues pour les jauges $(\sum |X_i|^p)^{1/p} < 1$, en liaison avec d'autres travaux de VAN DER CORPUT, HUA, HLAWKA.

Les méthodes sont des prolongements de celle de BLICHFEIDT.

4. "Minima indépendants" et "anomalie" d'une forme.

Soient $f(x)$ une forme sur R^n, G un réseau de déterminant $m(G)$. Choisissons n éléments linéairement indépendants de G (que nous numérotons de façon que $f(p_1) \leqslant f(p_2) \leqslant \dots \leqslant f(p_n)$ et posons :

$$\gamma = \gamma(b) = \frac{1}{(m(G))^{1/n}} \inf(f(p_1)), \quad \rho = \rho(b) = \frac{1}{m(G)} \inf \prod_{h=1}^{n} f(p_h) ;$$

$\alpha = \alpha(f) = \frac{\rho}{\gamma^n}$ est un invariant affine de f, évidemment $\geqslant 1$, que j'appelle l'anomalie de la forme f (ou de l'ensemble étoilé associé à f). On a démontré dans les premiers paragraphes que $\alpha(f) = 1$ pour une norme euclidienne (MINKOWSKI).

Pour une norme f quelconque, MINKOWSKI a donné, outre l'inégalité (1) vue plus haut qu'on peut écrire, (J étant la jauge associée à f) $\gamma^n \leqslant 2^n/\text{mes}(J)$, l'inégalité

$$\rho \leqslant 2^n/\text{mes}(J) \tag{2}$$

de démonstration beaucoup moins immédiate que (1) qu'elle contient. On trouvera sa démonstration dans A. CHÂTELET [11], qui est aussi présentée sous une forme géométrique condensée au maximum dans DAVENPORT [13] (Cf. plus loin). En outre, comme pour certaines questions une inégalité moins précise est suffisante, MINKOWSKI a donné une démonstration très élémentaire d'une forme affaiblie de l'inégalité précédente

(2')
$$\rho \leq n!\,2^{n}/\mathrm{mes}(J)$$

Naturellement, comme (1), (2), elle ne peut se généraliser à des formes sans quelque hypothèse de convexité, et (1) et (2) ne donnent, au moins directement, aucun renseignement sur α.

J'ai obtenu dans [6] et [7], le résultat curieux que pour une forme arbitraire l'anomalie est bornée par une constante ne dépendant que de la dimension n de l'espace. Plus précisément

$$\alpha \leq 2^{(n-1)/2} .$$

Cette constante ne pouvant d'ailleurs être améliorée, car j'ai donné des exemples de formes sur R^n d'anomalie $= 2^{(n-1)/2}$, et de formes définies et continues sur R^n ayant une anomalie arbitrairement voisine de $2^{(n-1)/2}$. L'inégalité obtenue :

(3)
$$\rho \leq 2^{\frac{n-1}{2}} \gamma^{n} ,$$

peut s'écrire dans le cas d'une norme

(4)
$$\rho \leq 2^{\frac{n-1}{2}} \eta(J)/\mathrm{mes}(J) ,$$

$\eta(J)$ étant le coefficient d'empilement régulier de la jauge J définie plus haut toujours ≤ 1. Si on le remplace par 1 dans (4) on obtient une inégalité moins forte que (2) mais plus forte que (2') et de démonstration plus simple. Si on tient compte de la valeur de η il n'est pas exclu que pour certaines jauges (4) soit plus forte que (2).

Le problème de savoir si pour toute jauge, $\alpha = 1$, est ouvert.

MINKOWSKI l'a démontré pour $n = 2$. J'en ai donné une démonstration plus simple, qui pour $n > 2$ permet de majorer l'anomalie des jauges un peu mieux que par $2^{\frac{n-1}{2}}$, par exemple pour R^3, $\alpha(J) \leq 2^{2/3}$. Mais pour les jauges de R^n $(n > 2)$

on n'a pu déterminer α que dans des cas où $\alpha = 1$: jauges euclidiennes et jauges dont un empilement régulier pour remplir l'espace (alors $\eta = 1$ et (2) donne $\rho = \gamma^n = 2^n/\mathrm{mes}(J)$. Une conjecture moins forte, qui est suggérée par le mode de démonstration de (2) est l'inégalité

$$\rho(J) \leqslant 2^n \, \eta^{\times}(J)/\mathrm{mes}(J)$$

où $\eta^{\alpha}(J)$ est le coefficient d'empilement quelconque des $J(\eta^{\times} \leqslant \eta)$. C'est, sauf dans des cas particuliers, $\eta^{\times}$, qu'on sait majorer quand on sait quelque chose (cf. pour J jauge euclidienne, "le résultat de BLICHFELDT). Il serait très intéressant de démontrer ces conjectures ou de les infirmer par un autre exemple (pour n nécessairement $\geqslant \beta$) .

Donnons quelques indications sur la démonstration de (2) et du théorème de l'anomalie, c'est-à-dire de (3). Etant donnés une forme f et un réseau G dans R^n posons, pour $h = 1, 2, \ldots, n$,

$$\mu_h = \mu_h(f, G) = \inf_{\mu \geqslant 0}$$

$f(x) \leqslant \mu$ a h solutions linéairement indépendantes dans G) . Dans le cas où f est une norme euclidienne, la méthode de MINKOWSKI pour démontrer $\alpha = 1$ (cf. paragraphe 2) est d'établir l'existence d'une transformation linéaire $\mathcal{C}$ de déterminant $\prod_{h=1}^{n} \mu_h$ telle que $\mathcal{C}(J) \cap G$ soit vide. Dans le cas d'une norme quelconque, faute d'avoir pour une jauge quelconque un système de n directions ayant des propriétés analogues à celles d'un système de directions conjuguées pour un ellipsoïde, on est amené (Cf. DAVENPORT) à utiliser, outre une telle transformation des transformations continues conservant la mesure. Au lieu de $J' = \mathcal{C}(J)$ de mesure $\mathrm{mes}(J) \times \prod \mu_h$, on obtient K , de même mesure, et irréductible par rapport à $2G$, d'où l'inégalité (2) . K n'étant plus transformé linéaire de J , on a perdu en chemin $\eta(J)$ et on n'a donc pas de majoration de α . La méthode que j'emploie consiste à utiliser seulement des transformations linéaires, ce qui est possible si au lieu des μ_h on utilise des nombres auxiliaires $\lambda_h \leqslant \mu_h$ assujettis à la condition que les nombres λ_{h+1}/λ_h soient entiers. Il est commode de transformer le réseau et non l'ensemble. On obtient ainsi un sous-réseau H de G avec $m(H) = \lambda_n^n / \prod_{h=1}^{n} \lambda_h$ et $H \cap \lambda_n S$ vide (sans qu'on ait eu à se préoccuper de la forme, au sens géométrique, de l'ensemble étoilé S) , ce qui implique $\prod \lambda_h \leqslant \gamma^n(f)\, m(G)$. D'autre part on démontre que, quels que soient les n nombres μ_h , $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ on peut leur associer des nombres λ_h avec $\lambda_h \leqq \mu_h$, λ_{h+1}/λ_h entier et $\prod \mu_h/\prod \lambda'_h \leq 2^{\frac{n-1}{2}}$, ce nombre étant le meilleur possible. En outre je montre que pour tout n cette valeur $2^{\frac{n-1}{2}}$ est effectivement utilisée pour un ensemble étoilé convenable, d'où le résultat annoncé, (la majoration plus faible 2^{n-1} est évidente en prenant $\lambda_1 = \mu_1 , \dots , \lambda_{h+1}$ = plus grand multiple entier de λ_h qui est $\leq \mu_{h+1}$) . Pour les ensembles étoilés k-convexes, le théorème de l'anomalie permet de généraliser l'inégalité d'Hermite : existence d'une base $a_1 , \dots , a_n$ avec $\prod f(a_i) \leq \sigma(n , k)\ m(G)/\mathrm{mes}(S)$, et en conséquence, si $\varphi = f^d$ est une forme algébrique définie, existence d'une forme réduite, dans chaque "classe arithmétique" de telles formes, la réduite ayant tous ses coefficients majorés en fonction du plus petit nombre représenté, et de n , d , k et $V = \mathrm{mes}(S)$, résultats analogues à ceux de la théorie des formes quadratiques définies positives. Le théorème de l'anomalie a aussi des généralisations aux ensembles non étoilés.

Limites de réseaux, réseaux critiques. - MAHLER a démontré le lemme suivant : étant donnée une suite (G_n) de réseaux tels que $m(G_n) \subset M + \infty$ et que $G_n \cap V$ soit vide pour tout n , V étant un voisinage fixe de l'origine, on peut extraire de (G_n) une suite $(G_{n'})$ qui converge vers un réseau G . La première inégalité de Minkowski et l'inégalité d'Hermite sur l'existence d'une base telle que $\prod |a_h| \leq \sigma(n)\ m(G)$, ramène la démonstration à l'utilisation du lemme de Bolzano-Weierstrass. J'ai donné de ce lemme une démonstration indépendante des inégalités citées [9] qui se généralise dans une certaine mesure aux "réseaux" dans un groupe topologique localement compact (sous-groupe ayant un domaine fondamental de mesure finie). Le lemme de Mahler permet de démontrer des "théorèmes de continuité" fort utiles, pour les invariants tels que γ , ρ , α , etc., pour des familles convenables d'ensembles. En particulier il permet dans des conditions très générales de montrer l'existence d'au moins un réseau critique pour un ensemble (A étant ouvert, G est critique pour A si $G \cap A$ est vide et si $m(G)$ a la plus petite valeur possible dans ces conditions :

$$m(G) = S(A) \quad (1/\gamma^n(A) \text{ si } A \text{ est étoilé})).$$

Des considérations simples de continuité montrent que pour un ensemble étoilé régulier (fonction d'appui définie et continue) un réseau critique a au moins n points sur la frontière de l'ensemble, pour une jauge euclidienne au moins $n(n-1)$ points (KORKINE et ZOLATAREFF). Pour une jauge, un réseau critique a au plus $3^{n+1} - 3$ points sur la frontière, (au plus $2^{n+1} - 2$ si elle est strictement convexe) (MINKOWSKI). Il en déduit que l'ordre d'un groupe de transformations linéaires à coefficients entiers à n variables est $\leq 3n^2$. Il serait intéressant de voir si la minoration de Korkine et Zolatareff (qui est valable même pour des réseaux "localement critiques") ne peut être améliorée et étendue à des jauges générales. Pour les ensembles étoilés non bornés, les propriétés des réseaux critiques sont plus cachées et sont particulièrement intéressantes pour les ensembles ayant un groupe étendu de transformations linéaires en eux-mêmes, comme l'ensemble $P_n = \mathcal{E}_x(|x_1.x_2 \ldots x_n| < 1)$ pour lequel il agit transitivement sur la frontière. MAHLER le premier a étudié ce genre de problème ([28]). Pour un étoilé ouvert S, si on pose $S_n = S \cap (\mathcal{E}_x |x| < n)$ on a $\lim \delta(S_n) = \delta(S)$; si les automorphismes linéaires de S permettent d'amener n'importe quel point de la frontière de S à une distance $< k$ donnée de l'origine, il en résulte aisément l'existence d'un réseau critique ayant un point sur la frontière de S et, pour $S = P_n$ que $\alpha(P_n) = 1$. Peut-on par le même genre de considération montrer que P_n, pour tout n, possède un réseau critique invariant par n automorphismes "indépendants" de P_n ? Il en résulterait alors que $\delta(P_n)$ est égal au plus petit discriminant des corps totalement réels de degré n. Une voie éventuelle de démonstration serait de prouver que P_n est "<u>réductible</u> à un ensemble borné" (i.e. qu'il existe $A_n \subset P_n$, A_n borné avec $\delta(A_n) = \delta(P_n)$) comme MALHER l'a démontré pour $n = 2$ et 3. Mais on ne pourrait suivre la méthode de Mahler qui utilise précisément la connaissance de tous les réseaux critiques pour ces ensembles.

<u>Autres méthodes de majoration du minimum d'une forme non convexe</u>. - Soit S un ensemble étoilé et T un ensemble étoilé auxiliaire, $T \subset S$, on a évidemment $\gamma(S) \leq \gamma(T)$. Soit G un réseau critique pour S, supposons qu'on ait mieux que le renseignement banal $\mu_1(T, G) \geq 1$, par exemple : $\mu_i(T, G) \geq \theta > 1$ pour tout $i \geq h$. Si T a une anomalie égale à 1, par exemple si T est une jauge euclidienne, on en déduit évidemment $m(G) \geq \theta^{n-h} \delta(T)$, c'est-à-dire $\gamma(S) \leq \theta^{1 - \frac{h}{n}} \gamma(T)$ (C'est la méthode qu'a utilisée DAVENPORT pour majorer $\gamma(P_n)$, avec comme ensemble auxiliaire $T = \mathcal{E}_x(\sum x_i^2 \leq n)$ ([14], [15]). Supposons qu'on n'aît aucun renseignement sur l'anomalie de T, alors on utilisera un lemme analogue à celui qui sert à démontrer le théorème de l'anomalie, et qui donne

$$\gamma(S) \leq \theta^{1 - \frac{h}{n}} 2^{\frac{h-1}{n}} \gamma(T)$$

Si pour $n \to \infty$, θ est indépendant de n, et $h/n \to 0$, la majoration asymtotique obtenue est la même que si l'anomalie était égale à un. Comme application, j'ai considéré $S = P_n$, $T = \mathcal{E}_x(\sum |x_i| < n)$. Les automorphismes de P_n assurent l'existence d'un réseau critique contenant le point $\dot{I} = (1, 1, \ldots, 1)$. Alors pour un réseau G contenant I et tel que $P_n \cap G$ soit vide, on montre $\mu_2(T, G) \geqslant \theta = 1{,}118$, en minorant le minimum de $|x_1| + \ldots + |x_n|$ pour

$$\prod |x_i| > 1 , \quad \prod |x_i - 1| > 1 , \quad \prod |x_i + 1| > 1 .$$

Alors en utilisant le résultat de RANKIN sur T, j'obtiens $\gamma(P_n) < 1/4$ [6] en particulier le discriminant d'un corps algébrique de degré n totalement réel est $> (16)^n$, résultats meilleurs que ceux de DAVENPORT. En fait, DAVENPORT et moi-même avions négligé un article peu connu et très intéressant de BLICHFELDT [5] qui contenait implicitement un résultat plus fort, obtenu par une voie toute différente. Dans [39], ROGERS a encore légèrement amélioré le résultat de BLICHFELDT.

(Remarquons que le résultat sur le minimum de $|x_1| + \ldots + |x_n|$ ci-dessus, montre que pour tout entier algébrique totalement réel de degré n et ses conjugués, α_1, α_n, on a $\sum |\alpha_n| \geqslant \theta_n$, résultat analogue à un résultat de SCHUR sur $\sum \alpha_i^2$ [40]. Ce n'est que pour $n = 2$ ($\gamma = 1/5)^{1/4}$ KORKINE et ZOLOTAREFF [26]) et pour $n = 3$ ($\gamma = 1/7)^{1/3}$ DAVENPORT [12]) qu'on connaît la valeur exacte de $\gamma(P_n)$.

5. Quelques autres problèmes de minimum.

Nous complétons l'exposé par des indications sommaires sur les résultats obtenus relativement à d'autres types de formes et sur les principaux autres problèmes envisagés en géométrie des nombres.

Pour les formes quadratiques indéfinies : La théorie de leur réduction est plus difficile que celles des formes définies, et a des applications limitées essentiellement aux formes à coefficients entiers car le groupe unimodulaire arithmétique n'agit pas discrètement sur l'ensemble des formes à coefficients réels. La méthode des variables continues d'Hermite consiste à associer à la forme indéfinie f une famille de formes définies g à n paramètres (si f est mis sous la forme $\sum \pm X_1^2$ alors $g = \sum \lambda_1^2 \; X_1^2$). Si f a ses coefficients entiers, alors les g appartiennent à un nombre fini de classes. Cela amène HERMITE à définir pour les formes indéfinies des formes réduites dont les coefficients satisfont à des inégalités remarquables analogues à celles que nous avons démontrées pour les formes définies. Elles permettent de démontrer que les f telles que $|\Delta| \leq$ Cte (Δ discriminant de f) appartiennent à un nombre fini de classes (comme pour les formes définies) au moins dans le cas ou f ne représente pas proprement zéro ($f \neq 0$, si x_1, x_n sont des entiers non tous nuls). Mais le résultat est aussi valide dans ce cas, comme l'a montré STOUFF [42]. Ce complément est essentiel car MEYER a démontré que f représente toujours proprement zéro pour $n \geqslant 5$. (Pour des démonstrations simples du théorème de Meyer et du théorème du nombre fini de classes, cf. MORDELL [31] et [32]. Si nous passons maintenant aux formes indéfinies à coefficients réels quelconques, le théorème de Meyer fait conjecturer que $\gamma(f) = 0$ pour $n \geqslant 5$. Et on a aussi probablement $\gamma(f) = 0$ pour toute forme indéfinie de degré d pour n suffisamment grand (d fixe), à cause de la généralisation récente du théorème de Meyer à toutes les formes indéfinies par PECK [35]. D'autre part, f étant une forme arbitraire, soit $m = m(f)$ l'ensemble des valeurs de $\mu_1(f_1\ G)$ pour $m(G) = 1$, $\gamma = \gamma(f)$ est la borne supérieure de l'ensemble m. Soit γ' la plus grande limite de m. Si f est convexe, alors $\gamma = \gamma'$. Mais pour des formes indéfinies, on peut avoir $\gamma' < \gamma$, c'est le phénomène curieux dont MARKOFF a démontré l'existence pour les formes quadratiques indéfinies binaires et ternaires et qui est encore vrai pour les formes quaternaires (OPPENHEIMER). (Si la conjecture de tout à l'heure est vraie, il n'y a pas de problème analogue pour $n \geqslant 5$). On a de même $\gamma' < \gamma$ pour la forme décomposable $x_1 \ldots x_n$ pour $n = 3$ (DAVENPORT [12]).

Nous ne pouvons que signaler ces problèmes, ainsi que tous les problèmes non homogènes analogues aux problèmes homogènes que nous avons considérés. Etant donné un ensemble A, posons

$D(A) = \sup m(G)$ pour les réseaux G tels que les $A + g$ recouvrent l'espace,

$d(A) = \inf m(G)$ pour les réseaux G tels que les $A + g$ ne recouvrent pas l'espace.

Pour l'ensemble borné, $d(A)$ est trivialement nul et $D(A) \leq \mathrm{mes}(A)$. Mais même pour des jauges simples, par exemple euclidiennes, on n'en sait guère plus, sauf pour $n = 2$.

Pour des ensembles non bornés et de mesure ∞, il n'y a pas d'inégalité triviale. Pour $P_n = \mathcal{E}_x(\prod |x_i| < 1)$, $d(P_n) \geqslant (\sqrt{2})^n$ (TCHEBOTAREFF). MINKOWSKI a conjecturé que $d(P_n)$, qui est trivialement $\leqslant 2^n$, lui est en fait égal, résultat démontré seulement pour $n = 2$ (MINKOWSKI), $n = 3$ (REMAK) et récemment pour $n = 4$ (DYSON [20], [21]. C'est un résultat assez caché que $D(P_2) < +\infty$ (KINTCHINE, MORIMOTO). On voit aisément le rapport entre ces questions et l'existence d'un algorithme d'Euclide dans les corps de nombres algébriques totalement réels.

Si le corps a des conjugués complexes c'est l'ensemble

$P_{rs} = \mathcal{E}_x \left(\left| \prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{j=r+1}^{r+s} (x_j^2 + x_{j+s}^2) \right| < 1 \right)$, $(r + s = n)$ qui intervient, r étant le nombre de conjugués réels, (pour ces questions voir deux articles de DAVENPORT [17] et [18]).

Pour $H_{rs} = \mathcal{E}_x \left(\left| \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{j=r+1}^{r+s} x_j^2 \right| \right)$, DAVENPORT a démontré que

$d(H_{12}) = \frac{10}{\sqrt{27}}$ [16] et $D(H_{12}) = +\infty$, BLANEY a démontré $d(H_{r,s}) > 0$ $(r > 0, \; s > 0)$ Je n'ai pas connaissance d'autre résultat général pour ces ensembles.

A la suite de B. SEGRE, on a aussi étudié les problèmes homogènes et non homogènes pour les ensembles

$$0 \leqslant \varphi(x) < 1 \text{ et plus généralement } \lambda > \varphi(x) < \mu ,$$

pour φ forme décomposable, ou forme quadratique indéfinie, (CHAIK [10], DAVENPORT, BLANEY) qui ont révélé des résultats intéressants en eux-mêmes, ou utiles comme auxiliaires pour l'étude des ensembles considérés précédemment.

Enfin signalons pour finir que les problèmes d'approximations diophantiennes linéaires (approximations de zéro par des systèmes linéaires homogènes, et non homogènes, cf. KOKSMA) fournissent à la géométrie des nombres des problèmes d'une nature parfois un peu différente (étude d'ensembles au voisinage de l'infini).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLICHFELDT (H.F.). - A new principle in the geometry of numbers, with some applications, Trans. Amer. math. Soc., t. 15, 1914, p. 227-235.

[2] BLICHFELDT (H.F.). - On the minimum value of positive real quadratic forms in 6 variables, Bull. Amer. math. Soc., t. 31, 1925, p. 386.

[3] BLICHFELDT (H.F.). - The minimum value of quadratic forms and the closest parking of sphere, Math. Annalen, t. 101, 1929, p. 605-608.

[4] BLICHFELDT (H.F.). - The minimum values of positive forms in 6, 7 and 8 variables, Math. Z., t. 39, 1934, p. 1-15.

[5] BLICHFEIDT (H.F.). - Note on the minimum value of the discriminant of an algebraic field, Monatshefte für Math. und Phys., t. 48, 1939, p. 531-533.

[6] CHABAUTY (Claude). - Géométrie des nombres d'ensembles non convexes, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 227, 1948, p. 747-749 et 796-797.

[7] CHABAUTY (Claude). - Sur le minimum du produit de formes linéaires, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 228, 1949, p. 1361-1363.

[8] CHABAUTY (Claude). - Sur les minima arithmétiques des formes, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 66, 1949, p. 367-394.

[9] CHABAUTY (Claude). - Limite d'ensembles et géométrie des nombres, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 143-151.

[10] CHALK (J.H.H.). - On the positive values of linear formes, Quart. J. of Math., t. 18, 1947, p. 215-227.

[11] CHÂTELET (Albert). - Leçons sur le théorie des nombres ... - Paris, Gauthier-Villars, 1913.

[12] DAVENPORT (H.). - On the product of three homogeneous linear forms, II., Proc. London math. Soc., t. 44, 1938, p. 412-441.

[13] DAVENPORT (H.). - Minkowski's inequality for the minima associated with a convex body, Quart. J. of Math., t. 10, 1939, p. 119-121.

[14] DAVENPORT (H.). - Non-homogeneous binary quadratic forms, Koninkl. nederl. Akad. v. Wetensch., t. 49, 1946, p. 815-821.

[15] DAVENPORT (H.). - The product of n homogeneous linear forms, Koninkl. nederl. Akad. v. Wetensch., t. 49, 1946, p. 822-828.

[16] DAVENPORT (H.). - Non homogeneous ternary quadratic forms, Acta math., t. 80, 1948, p. 65-95.

[17] DAVENPORT (H.). - On indefinite ternary quadratic form, II., Proc. London math. Soc., t. 51, 1949, p. 145-160.

[18] DAVENPORT (H.). - Euclid's algorithm in cubic fields of negative discriminant Acta Math., t. 84, 1950, p. 159-179.

[19] DAVENPORT (H.) and ROGERS (C.A.). - Hlawka's theorem in the geometry of numbers, Duke math. J., t. 14, 1947, p. 367-375.

[20] DYSON (F.J.). - A theorem in algebraic topology, Annals of Math., t. 49, 1948, p. 75-80.

[21] DYSON (F.J.). - On the product of four homogeneous linear forms, Annals of Math., t. 49, 1948, p. 81-109.

[22] HANCOCK (Harris). - Development of the Minkowski geometry of numbers. - New-York, Macmillan Company, 1939.

[23] HERMITE (Charles). - Oeuvres, Tome 1. - Paris, Gauthier-Villars, 1905.

[24] HLAWKA (Edmund). - Zur Geometrie der Zahlen, Math. Z., t. 49, 1944, p. 285-312.

[25] KOKSMA (J.F.). - Diophantische Approximationen. - Berlin, Springer, 1936 (Ergebnisse der Mathematik, Band 4, n° 4).

[26] KORKINE (A.) et ZOLOTAREFF (G.). - Sur les formes quadratiques positives quaternaires, Math. Annalen, t. 5, 1872, p. 581-583.

[27] MAHLER (K.). - On Minkowski's theory of reduction of positive quadratic form, Quart. J. of Math., t. 9, 1938, p. 259-262.

[28] MAHLER (K.). - Lattice points in n-dimensional star bodies, II., Koninkl. nederl. Akad. v. Wetensch., t. 49, 1946, p. 331-343, 444-454, 524-532 et 622-631.

[29] MINKOWSKI (H.). - Geometrie der Zahlen. - Reprinted New York, Chelsea, 1953.

[30] MINKOWSKI (H.). - Diophantische Approximationen. - Leipzig, B.G. Teubner, 1907.

[31] MORDELL (L.J.). - The condition for integer solutions of $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$, J. für reine und angew. Math., t. 164, 1931, p. 40-49.

[32] MORDELL (L.J.). - The arithmetically reduced indefinite quadratic form in n-variables, Proc. royal Soc. London, Series A, t. 131, p. 99-108.

[33] MORDELL (L.J.). - Lattice points in some n-dimensional non-convex regions, Koninkl. nederl. Akad. v. Wetensch., t. 49, 1946, p. 773-792.

[34] MULLENDER (P.). - Homogeneous approximation, Koninkl. nederl. Akad. v. Wetensch., t. 50, 1947, p. 173-184.

[35] PECK (L.G.). - On the approximation of irrational numbers by the convergents of their diophantine equations in algebraic number fields, Amer. J. of Math., 1949, t. 71, p. 387-402.

[36] RANKIN (R.A.). - On the closest packing of sphere in n dimensions, Annals of Math., t. 48, 1947, p. 1062-1081.

[37] RANKIN (R.A.). - On sums of powers of linear forms, III., Koninkl. nederl. Akad. v. Wetensch., t. 51, 1948, p. 846-853.

[38] ROGERS (C.A.). - Existence theorems in the geometry of numbers, Annals of Math., t. 48, 1947, p. 994-1002.

[39] ROGERS (C.A.). - The product of n real homogeneous linear forms, Acta Math., t. 82, 1950, p. 185-208.

[40] SCHUR (I.). - Über endliche Gruppen und hermitesche Formen, Math. Z., t. 1, 1918, p. 184-207.

[41] SIEGEL (Carl Ludwig). - A mean value theorem in geometry of numbers, Annals of Math., t. 46, 1945, p. 340-347.

[42] STOUFF (M.). - Remarques sur quelques propositions dues à M. Hermite, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 19, 1902, p. 89-118.

[43] WEIL (André). - Sur quelques résultats de Siegel, Summ. bras. Math., t. 1, 1946, p. 21-39.