Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre Samuel

Variétés algébriques, VII : normalisation des variétés algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 2-3 (1948-1950), exp. n° 7, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1948-1950__2-3__A7_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire A. CHÂTELET et P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Années 1948-1950
-:-:-:-

VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES, VII : NORMALISATION DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

par Pierre SAMUEL

1. Modules et anneaux noethériens.

Un module E sur un anneau A (supposé ici commutatif) est dit noethérien s'il satisfait à la condition suivante :

(N) Toute famille non vide de sous-modules de E, ordonnée par inclusion admet un élément maximal.

La condition (N) est équivalente à l'une ou l'autre des conditions suivantes :

(N') ("Teilerkettensatz") Si (M_i) est une suite croissante de sous-modules de E, on a $M_n = M_{n+1}$ à partir d'un certain rang.

(N") ("Basissatz") Tout sous-module de E est engendré par un nombre fini d'éléments :

$$M = Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_s .$$

(N) entraîne (N') car la famille croissante (M_n) doit admettre un élément maximal. (N') entraîne (N"), car, s'il existait un sous-module M non engendré par un nombre fini de générateurs, on construirait par récurrence une suite strictement croissante de sous-modules de M engendrés chacun par un nombre fini de générateurs. Enfin (N") entraîne (N) car, si Φ est une famille non vide de sous-modules de E, et si Ψ est une sous-famille totalement ordonnée de Φ, la réunion M des ensembles de la famille Ψ est engendrée par un nombre fini d'éléments ; chacun d'entre eux se trouve dans un M_α de Ψ, et, comme Ψ est totalement ordonnée par inclusion, il existe un M_α contenant tous les autres M_β ; ainsi Ψ contient, avec toute sous-famille totalement ordonnée, sa borne supérieure ; Φ est donc inductif et admet un élément maximal en vertu du théorème de Zorn.

Un module engendré par un nombre fini d'éléments sera dit de type fini.

On remarque aussitôt que tout sous-module et que tout module quotient d'un module noethérien sont noéthériens.

Un anneau A est dit noethérien, si, considéré comme module sur lui-même, c'est un module noethérien. Il revient au même de dire que tout idéal de A a une base finie, ou encore que toute suite croissante d'idéaux de A s'arrête.

THÉORÈME 1. - Le produit de deux modules noethériens E et F est un module noethérien.

Soit M un sous-module de $E \times F$; sa projection sur E est un module de type fini, engendré par $(x_1, \dots, x_n)$; pour tout x_i choisissons un élément (x_i, y_i) de M se projetant en x_i. Pour tout élément (x, y) de M il existe des $a_i \in A$ tels que $x = \sum_i a_i x_i$; alors $(x, y) - \sum_i a_i (x_i, y_i)$ est élément de $N = ((0) \times F) \cap M$ qui, en tant qu'isomorphe à un sous-module de F, est de type fini. Comme M est engendré par N et par les (x_i, y_i), c'est un module de type fini.

COROLLAIRE 1. - Si E est un module noethérien, E^n est un module noethérien.

Récurrence sur n.

COROLLAIRE 2. - Si A est un anneau noethérien, A^n est un A-module noethérien.

COROLLAIRE 3. - Tout module de type fini sur un anneau noethérien A est un module noethérien ; autrement dit tout sous-module de M est de type fini.

En effet, si M est engendré par n éléments, c'est un module quotient de A^n, qui est noéthérien en vertu du corollaire 2.

THÉORÈME 2 (Hilbert). - Si A est un anneau noethérien, l'anneau de polynômes $A[X]$ est noethérien.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $A[X]$. L'ensemble des coefficients des termes de plus haut degré de tous les polynômes de $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, donc de type fini ; $\alpha = (a_1, \dots, a_s)$. Soit P_i un polynôme de $\mathfrak{a}$ ayant a_i pour coefficient de son terme de plus haut degré, et soit m le plus grand des degrés des P_i. Pour tout polynôme Q de $\mathfrak{a}$, et de degré $> m$, on peut former une combinaison linéaire $\sum_i X^{n_i} P_i$ ayant même terme de plus haut degré que Q. Par réductions successives on obtient un polynôme R de l'idéal $(P_1, \dots, P_s)$ tel que $Q - R$ soit de degré $\leq m$. Comme les polynômes de degré $\leq m$ de $\mathfrak{a}$ forment un A-module de type fini (corollaire 3, du théorème 1), le théorème est démontré.

COROLLAIRE 1. - Si A est noethérien, l'anneau de polynômes $A[X_1, \ldots, X_n]$ est noethérien. En particulier l'anneau des polynômes en n lettres sur un corps k est un anneau noethérien.

Récurrence sur n.

COROLLAIRE 2 (terminologie de Weil). - Si k est un corps et $(x_1, \ldots, x_n)$ un ensemble de n quantités l'anneau $k[x_1, \ldots, x_r]$ engendré sur k par ces quantités est un anneau noethérien.

En effet c'est un anneau quotient de l'anneau de polynômes $k[X_1, \ldots, X_n]$ (d'ailleurs par un idéal premier).

Si (x) est point générique d'une variété V sur k, nous appellerons $k[x_1, \ldots, x_n] = k[x]$ l'anneau de coordonnées de V sur k.

COROLLAIRE 3. - Si A est un anneau noethérien et S un ensemble multiplicativement stable d'éléments de A qui ne sont pas diviseurs de 0, alors l'anneau de quotients A_S est noethérien.

En effet, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A_S, on a $\mathfrak{a} = (A \cap \mathfrak{a})A_S$ (si $a/s \in \mathfrak{a}$ alors $a \in A \cap \mathfrak{a}$). Les idéaux de A_S sont donc en correspondance biunivoque monotone avec certains idéaux de A (leurs traces sur A). Comme (N) est vraie pour toute famille d'idéaux de A, elle est vraie pour toute famille d'idéaux de A_S.

COROLLAIRE 4. - L'anneau de spécialisation de tout point d'une variété V (sur k) est noethérien.

En effet c'est l'anneau des quotients de l'anneau de coordonnées de V relativement à un idéal premier de celui-ci.

2. Eléments entiers sur anneau d'intégrité.

Soient A un anneau d'intégrité, x un élément d'un sur-corps du corps des fractions K de A. On dit que x est entier sur A si l'une des conditions équivalentes est satisfaite :

(E) L'anneau $A[x]$ est un A-module de type fini.

(E') x satisfait à une "équation de dépendance intégrale" :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad \text{où} \quad a_i \in A .$$

En effet, si $A[x]$ est de la forme $Ap_1(x) + \ldots + Ap_s(x)$, les p_i étant des polynômes à coefficients dans A, on obtient une équation de dépendance intégrale pour x en exprimant x^n au moyen de cette décomposition (n dépassant le plus haut des degrés des polynômes p_i). Si réciproquement (E') est vérifiée $(1, x, \ldots, x^{n-1})$ est un système fini de générateurs de A-module $A[x]$.

PROPOSITION 1. - Pour qu'un élément x du corps des fractions K de A soit entier sur A, il faut qu'il existe un dénominateur commun $d \in A$ tel que $A[x] \subset (1/d).A$; cela suffit si A est noethérien.

La nécessité vient de l'existence d'un dénominateur commun pour $(1, x, \ldots, x^{n-1})$ Pour la suffisance, $A[x]$ est sous module d'un module de type fini $(1/d).A$, donc de type fini (corollaire 3 du théorème 1, paragraphe 1).

Nous supposerons désormais A noethérien.

PROPOSITION 2. - Si x et y sont entiers sur A, xy et $x+y$ sont entiers sur A.

En effet si $(1, x, \ldots, x^s)$ et $(1, y, \ldots, y^t)$ sont des systèmes de générateurs des A-modules $A[x]$ et $A[y]$, le module $A[x, y]$ est engendré par les $x^i y^j$ $(0 \leq i \leq s,\ 0 \leq j \leq t)$; donc de type fini, et $A[x+y]$ et $A[xy]$ en sont des sous-modules.

L'ensemble des éléments d'un sur-corps de K qui sont entiers sur A forment donc un anneau. En particulier les éléments de K qui sont entiers sur A forment un anneau A' contenant A et que l'on appelle la clôture intégrale de A. Un anneau A est dit intégralement fermé (ou clos) si $A' = A$. Pour montrer que la clôture intégrale A' de A (et, plus généralement le sous-anneau des éléments d'un sur-corps de K qui sont entiers sur A) est intégralement fermée, nous montrerons la propriété de transitivité suivante :

PROPOSITION 3. - Si x est entier sur un anneau B composé d'éléments entiers sur A, x est lui-même entier sur A.

Soit B' le sous-anneau de B engendré (sur A) par les coefficients d'une équation de dépendance intégrale de x sur B ; c'est un A-module de type fini. Comme $B'[x]$ est un B'-module de type fini, c'est aussi un A-module de type fini, donc aussi $A[x]$ qui en est un sous-module.

THÉORÈME 1. - Pour qu'un élément t soit entier sur un anneau de coordonnées $A = k[x]$, il faut et il suffit que t soit fini sur toute spécialisation finie

(x') de (x) avec référence à k .

De $t^n + a_1(x)\, t^{n-1} + \dots + a_n(x) = 0$ (les a_i étant des polynômes à coefficients dans k) , on déduit par spécialisation $t'^n + \dots + a_n(x') = 0$, ce qui implique que t' est fini. Réciproquement, si toute spécialisation t' de t sur une spécialisation finie $(x) \longrightarrow (x')$ avec référence à k est finie, on pose $y = 1/t$ (le cas $t = 0$ étant trivial) ; alors, quelle que soit la spécialisation finie (x') de (x) , $(x', 0)$ n'est pas spécialisation de (x, y) ; ceci veut dire que , dans $k[x, y]$ l'idéal engendré par y n'est contenu dans aucun idéal maximal M , sinon l'homomorphisme canonique de $k[x, y]$ sur $k[x, y]/M$ définirait une telle spécialisation ; on a donc $1 = yP(x, y)$; si $n - 1$ est le degré de P en y , ceci s'écrit $x\, t^n = t^{n-1} P(x, 1/t)$ ce qui est une équation de dépendance intégrale.

REMARQUES :

1) Le résultat est valable pour un anneau A quelconque au lieu de l'anneau de coordonnées $k[x]$, à condition de définir une spécialisation d'un anneau comme un homomorphisme de cet anneau dans un corps.

2) Si (x, t) est point générique d'une variété V , la condition du théorème 1 exprime que le point à l'infini de OT n'est pas sur V .

Nous allons maintenant déterminer la structure de la clôture intégrale d'un anneau de coordonnées :

THÉORÈME 2 (F.K. SCHMIDT). - Si $A = k[x_1, \dots, x_n]$ est l'anneau de coordonnées d'une variété V^d sa clôture intégrale A' est de la forme $A' = k[x, y]$ où (y) est un ensemble fini de quantités de $k(x)$.

LEMME de normalisation (E. NOETHER). - Si k est un corps infini il existe d combinaisons linéaires (à coefficients dans k) $(l_1, \dots, l_d)$ des x_i tel que tout x_i soit entier sur $k[l]$ et que $k(x)$ soit séparable sur $k(l)$.

Si on ne se préoccupe pas de la séparabilité, on obtient les (l) en projetant V^d à partir d'une variété linéaire L^{n-d-1} de l'hyperplan de l'infini ne rencontrant pas V^d , ce qui est possible. Pour la séparabilité il faut aussi éviter les L^{n-d-1} d'une famille algébrique ne les contenant pas toutes (si $k(x)$ n'était pas séparable sur $k(l)$, il existerait une dérivation non triviale de $k(x)$ qui serait triviale sur $k(l)$; ceci s'exprime par des conditions algébriques sur les coefficients des E^{n-d-1} ; et ces conditions ne sont pas toujours vérifiées en vertu de l'existence d'une base de transcendance séparante extraite de $(x))$. Tout ceci est possible si k est infini.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 2. D'après la proposition 3 A' est l'anneau des éléments de $k(x)$ qui sont entiers sur $k[1]$, qui est un anneau de polynômes. Prenons une base (σ_α) de $k(x)$ sur $k(1)$, et soient $\sigma_\alpha^{(i)}$ les conjugués de σ_α ; on a $D = \det(\sigma_\alpha^{(i)}) \neq 0$ en vertu de la séparabilité. Tout élément ω de $k(x)$ s'écrit

$$\omega = \sum_\alpha t_\alpha \sigma_\alpha \; (t_\alpha \in k(1)) ,$$

et ses conjugués sont les $\omega^{(i)} = \sum_\alpha t_\alpha \sigma_\alpha^{(i)}$. Si ω est entier sur $k[1]$, ses conjugués le sont aussi. Si $\varphi_\alpha^{(i)}$ désigne le mineur de $\sigma_\alpha^{(i)}$ dans D , on a $t_\alpha = \sum_i \omega^{(i)} \varphi_\alpha^{(i)}$. Par multiplication de tous les σ par un même élément de $k(1)$, on peut supposer que les $\varphi_\alpha^{(i)}$ sont entiers sur $k[1]$. Alors les t_α sont aussi entiers sur $k[1]$ et donc appartiennent à cet anneau, puisqu'un anneau de polynômes est intégralement fermé. A' est donc un sous-module du module de type fini $\sum_\alpha \sigma_\alpha k[1]$, donc est de type fini sur $k[1]$, et à fortiori sur $k[x]$. On a donc $A' = \sum_j y_j [x] = k[x, y]$.

REMARQUES :

1) Le théorème 2 est encore vrai si k est un corps fini. Il se démontre en remplaçant les d formes linéaires du lemme par d polynômes convenablement choisis (cf. ZARISKI [5]).

2) Comme A' est un A-module de type fini, il existe au moins un dénominateur commun $d \in A$ tel que $da' \in A$ pour tout $a' \in A'$ (autrement dit $dA' \subset A$) et $d \neq 0$. On voit aussitôt que les d ayant cette propriété forment un idéal $\mathfrak{f}$ de A , appelé le <u>conducteur</u> de la fermeture intégrale de A . On a $A'\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$, car $A'A'\mathfrak{f} = A'\mathfrak{f} \subset A$. La conducteur est donc un idéal de A' . On voit aisément que c'est le plus grand idéal de A qui soit aussi idéal de A' .

3. Variétés normales.

On dit qu'une variété V de l'espace affine (resp. projectif) est <u>arithmétiquement normale</u> (sur k) , si son anneau de coordonnées (resp. l'anneau de coordonnées homogènes, c'est-à-dire celui de son cône représentatif) est <u>intégralement fermé</u>. Le théorème 2 (paragraphe 2) nous montre qu'à toute variété affine V (de point générique (x) sur k) on peut faire correspondre une variété arithmétiquement normale V' (de point générique (x, y)) qui lui est birationnellement équivalente;

on appelle V' un <u>modèle normal</u> de V. Un modèle normal de V est déterminé à une correspondance birationnelle partout birégulière près (choix des générateurs (y) de A').

REMARQUE. - Pour les variétés projectives, la démonstration des propriétés correspondantes est possible, mais il y a la complication technique supplémentaire de l'homogénéité.

PROPOSITION 1. - <u>L'anneau des quotients $A_{\mathfrak{p}}$ d'un anneau A intégralement fermé par rapport à un idéal premier $\mathfrak{p}$ est aussi intégralement fermé.</u>

Raisonnons plus généralement dans le cas d'un anneau de quotients A_S. Si un élément a/b du corps des quotients K de A $(a \in A\ ,\ b \in A)$ est entier sur A_S, on a une équation de dépendance intégrale dont nous pouvons réduire tous les coefficients à un même dénominateur $s \in S$:

$$(a/b)^n + (a_1/s)(a/b)^{n-1} + \dots + (a_n/s) = 0 \quad (a_i \in A) .$$

Par multiplication par s^n on voit que (as/b) est entier sur A, donc est un élément c de A. On a donc $a/b = c/s$, et $a/b \in A_S$.

Nous voyons donc que, si V est arithmétiquement normale, les anneaux de spécialisation de toutes les sous-variétés W de V (définies sur k) sont des anneaux locaux intégralement fermés. On exprime cette propriété de l'anneau de spécialisation de W sur V en disant que V est <u>localement normale</u> le long de W (ou en P si W est un point P).

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> V^d <u>est localement normale le long de</u> W^{d-1}, W^{d-1} <u>est une sous-variété simple de</u> V.

Dans l'anneau de spécialisation A de W sur V, il y a (outre (0)) un seul idéal premier $\mathfrak{p}$, celui induit par l'idéal de W. Il est donc maximal. Comme A est noethérien et intégralement fermé, la théorie classique des idéaux s'y applique (cf. VAN DER WAERDEN [4], chap. XIV), et tout idéal de A est une puissance de $\mathfrak{p}$. En prenant un élément p de $\mathfrak{p}$ qui n'est pas dans $\mathfrak{p}^2$, on voit que $\mathfrak{p}$ est principal et engendré par p. Donc A est un <u>anneau de valuation</u> discrète dont Ap est l'idéal de valuation.

Soient (x) et (x') des points génériques de V et W sur k, et $(P_\lambda(X))$ l'idéal de (x') sur k. Comme (x') est simple sur W, il existe un déterminant d'ordre $n - d + 1$ non nul extrait de la matrice jacobienne des $P_\lambda(X))$, soit par exemple, $\left|\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(x')\right| \neq 0$ $(i\,,\,j = 1\,,\,\ldots\,,\,n - d + 1$. De tous les $P_i(x)$ il y en a un, $P_1(x)$ qui a la plus petite valeur pour la valuation ci-dessus. Donc, pour tout i , $P_i(x)/P(x)$ appartient à l'anneau de spécialisation A , et on peut écrire $P_i(x)/P(x) = Q_i(x)/Q(x)$ où $Q(x') \neq 0$. Donc les $n - d$ polynômes

$$R_i(X) = P_i(X)Q(X) - Q_i(X)P(X) \quad (i \neq 1)$$

appartiennent à l'idéal de V sur k .

Pour tout polynôme $S(X)$ nous noterons $L(y\,,\,X\,,\,S)$ la forme linéaire $\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial X_\alpha}(y).(X_\alpha - y_\alpha)$. Avec cette notation, et en vertu de $P_i(x') = P(x') = 0$, on a

$$L(x'\,,\,X\,,\,R_i) = Q(x')L(x'\,,\,X\,,\,P_i) - Q_i(x')L(x',\,X\,,\,P) \,.$$

Par hypothèse les $n - d + 1$ formes figurant aux seconds membres sont linéairement indépendantes. Comme $Q(x') \neq 0$, on en déduit que les $n - d$ formes $L(x'\,,\,X\,,\,R_i)$ sont linéairement indépendantes ce qui signifie que (x') est simple sur V .

REMARQUES.

1) Nous avons supposé ici que W était définie sur k . On peut lever cette restriction lorsque k est un corps parfait (et, plus généralement lorsque l'ordre d'inséparabilité de W sur k est égal à 1).

2) La réciproque du théorème 1 (toute sous-variété simple de dimension $d - 1$ a son anneau de spécialisation intégralement fermé) est vraie. Elle est même vraie dans la restriction aux variétés de dimension $d - 1$.

3) Par contre le théorème 1 ne s'étend pas aux sous-variétés de dimension moindre que $d - 1$. Par exemple l'origine est point double du cône V de dim 2 , de point générique $(u^2\,,\,uv\,,\,v^2)$ (et d'équation $Y - XZ = 0$) , dont cependant l'anneau de coordonnées $k[u^2\,,\,uv\,,\,v^2]$ est intégralement fermé.

Le théorème 1 nous montre donc qu'une variété normale de dimension d n'a <u>pas</u> de singularité de dim $d - 1$. Ainsi une courbe normale n'a pas de points singuliers (la normalisation donne donc un procédé de résolution des singularités pour les courbes), et une surface normale n'a d'autres singularités que des points multiples (et n'a pas de courbes multiples).

La réciproque de ce fait ("une variété V^d dont toutes les sous-variétés de dim $d-1$ sont simples est normale") n'est pas vraie sans restrictions (exemple de la surface conique de point générique (u^4, u^3, v, uv^3, v^4) qui n'a de singularité qu'à l'origine, et dont l'anneau de coordonnées (et même l'anneau de spécialisation de l'origine) n'est pas intégralement fermé (à cause de $u^2 v^2$)). Cette réciproque est cependant vraie si V^d est intersection complète de $n-d$ hypersurfaces (c'est-à-dire si son idéal admet une base de $n-d$ éléments), et plus généralement si V est intersection propre et de multiplicité 1 d'une intersection complète d'hypersurfaces et d'une autre variété (sur laquelle V est forcément simple).

Pour démontrer d'autres propriétés des variétés normales, on doit se servir du fait que, dans un anneau intégralement fermé, tout idéal principal est intersection de puissances symboliques (la puissance symbolique $\mathfrak{p}^{(n)}$ de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est la composante primaire de $\mathfrak{p}^n$ suivant $\mathfrak{p}$) d'idéaux premiers maximaux. Au moyen de ce résultat (et de bien d'autres encore), on démontre les résultats suivants :

1) (ZARISKI). - Si V est localement normale le long de W, elle est <u>analytiquement irréductible</u> le long de W (réciproque fausse : rebroussements).

2) (MUHLY et ZARISKI). - Pour qu'une variété soit arithmétiquement normale, il faut et il suffit que le système linéaire découpé sur elle par les hypersurfaces de degré n de l'espace soit <u>complet</u> pour tout n.

Pour d'autres propriétés des variétés arithmétiquement normales et localement normales, nous renvoyons :

a) A l'exposé de P. DUBREIL [1] fait au colloque d'Algèbre (Paris, septembre 1949) : relations entre variétés normales et variétés de première espèce.

b) Aux exposés de L. GAUTHIER [2] et P. SAMUEL [3] faits au séminaire Bourbaki en 1948-49 : rôle des variétés normales dans la théorie des correspondances birationnelles selon Zariski.

c) Et, plus généralement, aux nombreux mémoires de O. ZARISKI.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUBREIL (Paul). - La fonction caractéristique de Hilbert, Algèbre et théorie des nombres, Paris 1949. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1950 (Colloques internationaux du C.N.R.S., 24) ; p. 109-114.

[2] GAUTHIER (Luc). - Théorie des correspondances birationnelles selon Zariski, Séminaire Bourbaki, t. 1, 1948/49.

[3] SAMUEL (Pierre). - La théorie des correspondances birationnelles selon Zariski, Séminaire Bourbaki, t. 1, 1948/49.

[4] VAN DER WAERDEN (B.L.). - Algebra, II., 3e éd. - Berlin, Springer, 1955 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 34).

[5] ZARISKI (Oscar). - Foundations of a general theory of birational correspondances, Trans. Amer. math. Soc., t. 53, 1943, p. 490-542.