Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Léonce Lesieur

Variétés algébriques, VI : multiplicités d'intersection des variétés algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 2-3 (1948-1950), exp. nº 6, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1948-1950__2-3__A6_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire A. CHÂTELET et P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Années 1948-1950
-:-:-:-

VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES, VI : MULTIPLICITÉS D'INTERSECTION DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

par Léonce LESIEUR

Les points communs à deux variétés V^r et W^s définies dans S^n sur un même corps k sont les points d'un nombre fini de sous-variétés de V et W ; leur ensemble est normalement algébrique sur k, c'est-à-dire que toutes ses variétés maximales sont définies sur $\bar{k}$ (clôture algébrique de k), et qu'il contient en même temps qu'une variété maximale C toutes ses conjuguées par rapport à k. La théorie des multiplicités d'intersection consiste à définir pour chaque composante C de $V \cap W$ dans S^n un entier positif qu'on appelle <u>la multiplicité de</u> C <u>dans l'intersection</u> $V \cap W$; ou encore <u>la multiplicité d'intersection de</u> V <u>et</u> W <u>le long de</u> C. On désigne cet entier par $j(V.W, C)$. Lorsque les variétés V et W sont deux sous-variétés d'une même variété U, le problème consiste à définir une multiplicité d'intersection $i(V.W, C ; U)$ relativement à cette variété ambiante U. On a donc $j(V.W, C) = i(V.W, X ; S^n)$. La théorie classique (A. WEIL [11], chap. V et VI) définit la multiplicité j d'une composante propre (1), et la multiplicité i d'une composante propre simple sur U. Une autre théorie est due à C. CHEVALLEY [1]. Le rapprochement de ces deux théories a été fait par P. SAMUEL [5] qui obtient en outre une définition de la multiplicité i d'intersection pour les composantes excédentaires (c'est-à-dire non propres) et de la multiplicité i pour certaines composantes non simples sur U. Les publications de VAN DER WAERDEN avaient antérieurement apporté une contribution algébrique essentielle dans la question des multiplicités d'intersection ([9], paragraphe 38). L'exposé qui suit reproduit dans ses grandes lignes la théorie de A. WEIL pour la définition du symbole $j(V.W, C)$.

1. <u>Dimension d'une intersection</u>.

Soient V^r et W^s deux variétés de dimensions respectives r et s, définies dans l'espace projectif ou affine S^n sur un corps commun k. Il est possible

(1) C'est-à-dire de dimension convenable (voir paragraphe 1).

de donner une inégalité vérifiée par la dimension d d'une composante quelconque de l'intersection $V \cap W$, par le théorème suivant :

THÉORÈME 29. – $d \geqslant r + s - n$.

On le démontre en prenant d'abord le cas particulier où W est une hypersurface F (définie par une seule équation $\varphi = 0$).

(Dans l'espace affine). Si l'intersection d'une variété V^r par une hypersurface F qui ne contient pas V n'est pas vide, toutes ses composantes ont la même dimension égale à $r - 1$.

(Dans l'espace projectif, l'intersection vide est impossible lorsque $r \geqslant 1$). Les démonstrations sont nombreuses, renvoyons par exemple à VAN DER WAERDEN [9] (2) ou A. WEIL ([11], p. 86). On peut aussi appliquer un théorème général établi par W. KRULL sur un idéal principal dans un anneau noethérien ([4], p. 37).

On passe ensuite à l'intersection par k hypersurfaces :

(Dans l'espace projectif ou affine). Si l'intersection d'une variété V^r par k hypersurfaces $F_1, F_2, \dots, F_k$ n'est pas vide, chaque composante de l'intersection a au moins la dimension $r - k$.

Comme une variété linéaire L^s de dimension s peut toujours être définie par l'intersection de $n - s$ hyperplans $F_1, \dots, F_{n-s}$ (exposé 4), on en déduit :

(Dans l'espace affine ou projectif). Si l'intersection d'une variété V^r avec une variété linéaire L^s n'est pas vide, chaque composante a au moins la dimension $r + s - n$.

C'est la forme prise par le théorème général lorsque l'une des variétés est linéaire. Il est facile de ramener le cas général à ce cas particulier au moyen du produit des variétés V^r et W^s (exposé 4). C'est une variété $V^r \times W^s$, définie sur k dans $S^n \times S^n$; et de dimension $r + s$. Soit C^d une composante de l'intersection $V \times W$; $P = (x)$ un point générique de C sur $\bar{k}$. Le point $(P, P) = (x, x)$ décrit une variété Δ_c, de dimension d. Cette variété appartient au produit $C \times C$, donc au produit $V \times W$. Elle est d'ailleurs l'image d'une transformation birationnelle entre C et elle-même, définie par les équations

$$y_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(2) Dans la théorie de VAN DER WAERDEN, qui repose en partie sur l'élimination, l'enchaînement des raisonnements est différent.

et partout birégulière (exposé 5). Δ_c , qu'on appelle variété diagonale du produit $C \times C$, appartient évidemment à l'intersection de $V \times W$ avec la variété linéaire Δ de dimension n définie dans $S^n \times S^n$ par les équations

$$Y_i = X_i \qquad (i = 1 , 2 , \dots , n) .$$

Elle est donc incluse dans une composante Z de l'intersection $(V \times W) \cap \Delta$. Le point générique de Z est de la forme $(\bar{P} , \bar{P})$ où $\bar{P} \in V \cap W$. Le point (P , P) est une spécialisation de $(\bar{P} , \bar{P})$ sur k , donc P une spécialisation de $\bar{P}$ sur $\bar{k}$. La projection de Z dans S^n (considéré par exemple comme premier facteur du produit $S^n \times S^n$) est donc une composante de $V \cap W$ qui contient C , et par suite coïncide avec C . Réciproquement, la projection dans S^n d'une composante de $(V \times W) \cap \Delta$ est une composante de $V \cap W$. Par suite, <u>les composantes</u>, de $V \cap W$ sont les projections dans S^n des composantes <u>de l'intersection du produit</u> $V \times W$ <u>avec la variété linéaire</u> Δ <u>d'équations</u> $Y_i = X_i$ $(i = 1 , 2 , \dots , n)$.

Or la dimension d'une variété contenue dans Δ est le même que celle de sa projection dans S^n . La dimension d'une composante quelconque de l'intersection est donc $d \geqslant r + s + n - 2n$, ce qui démontre le théorème.

Lorsque l'égalité a lieu, dans ce théorème, pour une certaine composante C de $V \cap W$, on dit que C <u>est une composante propre de</u> $V \cap W$, <u>dans</u> S^n .

EXEMPLES :

Composante réduite à un point, pour l'intersection d'une variété V^r avec une variété linéaire L^{n-r}, dans S^n .

Variétés linéaires V et W transversales dans S^n .

Une composante non propre de $V \cap W$ s'appelle une <u>composante excédentaire dans</u> S . Il en est ainsi par exemple pour toute composante, quand elle existe dans les conditions $r + s < n$. La notion de composante propre ou excédentaire est relative á la variété ambiante S^n : un point d'intersection d'une droite et d'une courbe est composante propre dans S^2 et excédentaire dans S^n $(n > 2)$.

Pour qu'une composante d'intersection soit propre, il faut et il suffit qu'elle soit projection dans S^n d'une composante propre de $(V \times W) \cap \Lambda$.

REMARQUES. - On peut généraliser la notion de composante propre ou excédentaire au cas où la variété ambiante n'est plus l'espace affine ou projectif S^n , mais une variété quelconque U de dimension n , avec la restriction : C <u>est simple</u>

sur U . Le théorème reste vrai, et la définition d'une composante propre ou excédentaire s'en déduit ([11] , p. 146).

L'objet de cette conférence est de définir la multiplicité $j(V.W , C)$ de la composante propre C de l'intersection de V avec W dans S^n . Nous commencerons par des cas particuliers.

2. Intersection d'une V^r avec un L^{n-r} générique.

Plaçons-nous dans l'espace affine S^n . Soient

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} X_j - v_i = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

r équations linéaires dont les coefficients sont $(n+1)r$ quantités (u , v) variables indépendantes sur un corps k de définition de V^r . Ces équations définissent une variété linéaire L^{n-r} que nous appellerons (par abus de langage) variété linéaire générique sur k .

Soit (x) un point générique de V sur $k(u)$. Les corps $k(x)$ et $k(u)$ sont algébriquement indépendants sur k (et même linéairement disjoints sur k) . Il en résulte, d'après un théorème d'Emmy NOETHER (cf. [11] , p. 42) que les quantités $y_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_j$ $(i = 1 , \dots , r)$ sont des variables indépendantes sur $k(u)$ et que (x) est algébrique sur $k(u , y)$. Interprétons ce résultat géométriquement : le point (x , u) décrit sur k le produit $V \times S^m$ de la variété V par la variété linéaire S^m $(m = nr)$ lieu du point (u) sur k . Comme on a $k(x , u , y) = k(x , u)$ le point (x , u , y) décrit sur k une variété T qui se projette dans S^n suivant V et dans S^{m+r} suivant le lieu W du point (u , y) . Puisque les y sont des variables indépendantes sur $k(u)$ le lieu W est la variété linéaire entière S^{m+r} . Le point (u , v) est aussi un point générique de $W = S^{m+r}$, sur k . Nous savons qu'il existe un point générique de T de la forme (z , u , v) (exposé 4 , n° 2). Ce point est donc spécialisation générique de (x , u , y) sur k . Donc le relation $y_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_j$ entraîne $v_i = \sum u_{ij} z_j$, ce qui prouve $(z) \in L$. De plus (z) est spécialisation de (x) sur $k(u)$, et par suite est un point de V . L'intersection $V \cap L$ n'est donc pas vide.

Toute composante de l'intersection est algébrique sur $k(u , v)$.

Soit (z) un point générique sur $\overline{k(u , v)}$ d'une composante de $V \cap L$. Sa dimension $d \geqslant 0$ est celle de (z) sur $k(u, v)$. Or $k(z, u, v) = k(z, u)$. En prenant la dimension sur $k(u)$ on obtient

$$d + r = \dim_{k(u)}(z)$$

Comme (z) est point de V sa dimension sur $k(u)$ est au plus r. On en déduit $d = 0$ et $\dim_{k(u)}(z) = r$, ce qui prouve que (z) est ppint générique de V sur $k(u)$. <u>Tout point de</u> $V \cap L$ <u>est propre, algébrique sur</u> $k(u, v)$ <u>et générique de</u> V <u>sur</u> $k(u)$.

L'intersection étant normalement algébrique sur $k(u, v)$, les conjugués de (z) par rapport à $k(u, v)$ sont aussi des points propres de $V \cap L$. Il n'y en a pas d'autres, car si (z') est un point d'intersection, il est au même titre que (z) point générique de V sur $k(u)$. Le point (z, u) est donc point générique de $V \times S^m$ sur k, et par suite projection d'un point générique (z, u, v') de T sur k. Le relation $v_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} z_j$ implique $v'_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} z'_j = v_i$. Donc (z) et (z') sont spécialisation génériques l'une de l'autre sur le corps $k(u, v)$, et, d'après ([11], p. 76) leurs lieux sur $k(u, v)$ sont conjugués l'un de l'autre par rapport à $k(u, v)$. <u>Tous les points de</u> $V \cap L$ <u>sont donc conjugués de l'un d'eux par rapport à</u> $k(u, v)$.

Nous allons encore montrer qu'ils sont séparables par rapport à $k(u, v)$. Nous avons vu qu'un point z de $V \cap L$ est générique de V sur $k(u)$. Les (u) sont donc des variables indépendantes sur $k(z)$. Considérons un système de $n - r$ équations définissant la variété L^r linéaire tangente à V au point simple (z) :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_\mu}{\partial z_j}(X_j - z_j) = 0 \qquad \mu = 1, \ldots, n-r .$$

et complétons par les équations de L^{n-r}

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} X_j - v_i = 0 .$$

Chacune des n équations constituées par $F_\mu(X) = 0$ et $\sum u_{ij} X_j - v_i = 0$ est satisfaite par le point (z), algébrique sur $k(u, v)$. Le déterminant jacobien de ce système n'est pas nul, et cela prouve ([11], p. 13) que (z) <u>est séparablement algébrique sur</u> $k(u, v)$. Rassemblons :

THÉORÈME 30. - <u>L'intersection d'une</u> V^r, <u>définie sur</u> k <u>dans</u> S^n, <u>avec une</u>

variété linéaire L^{n-r} générique sur k, est formée d'un nombre fini g de points, tous propres, séparablement algébriques sur $k(u, v)$, et conjugués les uns des autres sur $k(u, v)$. Chacun d'eux est de plus générique de V sur $k(u)$.

3. Intersection d'une V^r avec un L'^{n-r} quelconque.

Avec la variété V^r, définie sur k, considérons une variété linéaire L'^{n-r} définie par les équations :

$$\sum_{j=1}^{n} u'_{ij} X_j - v'_i = 0 \quad .$$

On peut toujours la considérer comme une spécialisation sur k, de la variété générique L^{n-r} du paragraphe précédent, d'équations

$$\sum_{j=1}^{n} u'_{ij} X_j - v_i = 0$$

car (u, v) admet (u', v') comme spécialisation finie sur k.

La variété L^{n-r} coupe V^r en un nombre fini de points ; l'un quelconque d'entre eux, soit (x), est générique de V sur $k(u)$. Reprenons l'image géométrique du paragraphe 2 au moyen de la variété T qui se projette suivant V dans S^n et suivant $W = S^{m+r}$ dans S^{m+r}. Le point (u', v') de S^{m+r} est, comme on sait (exposé 4), la projection d'un point ou pseudo-point au moins de T, soit (x', u', v'), qui constitue donc une spécialisation finie ou infinie de (x, u, v) sur k. En se plaçant dans l'espace projectif on peut toujours changer d'espzce affine représentant pour obtenir une spécialisation finie (exposé 5). Restons donc dans l'espace affine et supposons la spécialisation finie. Le point (x') est spécialisation de (x) sur k, donc point de V, puisque (x) est générique de V sur $k(u)$ et par suite sur k. La relation $v_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_j$, entraîne $v'_i = \sum_{j=1}^{n} u'_{ij} x'_j$, qui montre que (x') est point de L', donc de $V \cap L'$. C'est dire que $V \cap L'$ n'est pas vide, et que toute spécialisation (x') de (x) sur $(u, v) \xrightarrow[k]{} (u', v')$ en fait partie.

Réciproquement soit (x') un point de $V \cap L'$. Comme il est sur V c'est une spécialisation de (x) sur $k(u)$; (u') est spécialisation de u sur k. Donc (x', u') est un point du produit $V \times S^m$ (exposé 4, n° 2), c'est-à-dire une spécialisation de (x, u) sur k. Or T se déduit birationnellement de ce produit par la correspondance monoïdale $v_i = \sum u_{ij} x_j$, et (v_i) admet sur la spécialisation $(x, u) \xrightarrow[k]{} (x', u')$ la seule spécialisation

$$v'_i = \sum u'_{ij} \, x'_j$$

(exposé 5). Donc $(x, u, v) \xrightarrow[k]{} (x', u', v')$ <u>et les seuls points de</u> $V \cap L'$ <u>sont les spécialisations</u> (x') <u>de</u> (x) <u>sur</u> $(u, v) \xrightarrow[k]{} (u', v')$.

C'est là un résultat important qui permet de ramener l'étude des points de $V \cap L'$ à l'étude de certaines spécialisations. On peut d'ailleurs caractériser les spécialisations qui correspondent aux points propres (x') dans $V \cap L'$; ce sont celles qui sont <u>algébriques sur</u> $k(u', v')$, et <u>isolées</u>, c'est-à-dire que si l'on a

$$(x, u, v) \xrightarrow[k]{} (x'', u', v') \xrightarrow[k]{} (x', u', v')$$

(x'') a sur $k(u', v')$ la même dimension que (x') , donc est également algébrique sur $k(u', v')$. (Voir [11], p.118). Une telle spécialisation $(x) \longrightarrow (x')$ s'appelle <u>propre</u>. Finalement :

THÉORÈME 31. - <u>Dans l'espace projectif, l'intersection</u> $\mathcal{V} \cap \mathcal{L}$ <u>n'est jamais vide. Dans l'espace affine,</u> (x') <u>est dans</u> $V \cap L'$ <u>si, et seulement si c'est une spécialisation finie de</u> (x) <u>sur</u> $(u, v) \xrightarrow[k]{} (u', v')$. <u>Pour qu'il soit propre dans l'intersection, il faut et il suffit que cette spécialisation soit elle-même une spécialisation propre.</u>

Or les spécialisations propres conduisent précisément à la notion de multiplicité.

4. <u>Multiplicité d'une spécialisation propre.</u>

Les hypothèses sont celles du paragraphe précédent dans lequel on a un point (x) algébrique sur $k(u, v)$, et même séparablement algébrique. Le système des conjugués $(x^{(1)}), \ldots, (x^{(g)})$ de $(x) = (x^{(1)})$ par rapport à $k(u, v)$ constitue l'ensemble des points de $V \cap L$. Nous avons en outre une spécialisation propre (x') de (x) sur la spécialisation finie $(u, v) \xrightarrow[k]{} (u', v')$. Le cas où le point (x) n'a qu'une coordonnée x est particulièrement simple.

<u>Cas élémentaire</u> (Cf. [11], prop. 9, p. 34). - Soient $\varphi(u, v, X) = 0$, l'équation irréductible définissant x sur $k(u, v)$, et g son degré.

On a donc

$$\varphi(u, v, X) = P(u, v) \prod_{\nu=1}^{g} (X - x^{(\nu)}) .$$

Considérons une spécialisation quelconque $(x^{(1)}, \ldots, x^{(g)} \longrightarrow x'^{(1)}, \ldots, x'^{(g)}$ sur $(u, v) \xrightarrow[k]{} (u', v')$. On peut supposer par exemple les f premières quantités $x'^{(1)}, \ldots, x'^{(f)}$ finies et les autres infinies. Posons

$$z_\rho = \frac{1}{x^{(\rho)}} \quad \text{pour} \quad f + 1 \leq \rho \leq g .$$

On a donc :

$$(1) \qquad (x^{(1)}, \ldots, x^{(g)}, u, v) \xrightarrow[k]{} (x'^{(1)}, \ldots, x'^{(f)}, \infty, \ldots, \infty, u', v')$$

Les polynômes :

$$G(X) = \prod_{\mu=1}^{f} (X - x^{(\mu)}) \prod_{\rho=f+1}^{n} (z_\rho X - 1) \; ; \qquad G'(X) = (-1)^{g-f} \prod_{\mu=1}^{f} (X - x'^{(\mu)})$$

donnent lieu aux relations :

$$\psi(u, v, X) = P(u, v)\, x^{(f+1)} \ldots x^{(n)}\, G(X) = wG(X) .$$

w admet toujours une spécialisation finie ou infinie sur la spécialisation (1). Cette spécialisation ne peut être nulle si nous supposons $\varphi(u', v', X) \neq 0$. On a donc

$$\varphi(u', v', X) = w'\, G'(X) .$$

ce qui prouve que $\psi(u', v', X)$ est de degré f en X, et que $\varphi(u', v', X) = 0$ a pour racines $x'^{(1)}, \ldots, x'^{(f)}$; ces nombres reproduisent donc les racines distinctes comptées avec leur ordre de multiplicité, et ces racines sont les spécialisations finies x' de x sur $(u, v) \longrightarrow (u', v')$. Il faut y ajouter la spécialisation infinie qui figure $g - f$ fois dans (1).

Lorsque $\varphi(u', v', X) = 0$ on peut prendre pour x'' une spécialisation transcendante sur $k(u', v')$ et aucune des spécialisations $(x, u, v) \xrightarrow[k]{} (x', u', v')$ ne peut être propre.

Donc : <u>dans le cas élémentaire d'une seule quantité</u> x, <u>une spécialisation propre</u> x' <u>de</u> x <u>sur</u> $(u, v) \xrightarrow[k]{} (u', v')$ <u>figure dans toute spécialisation telle que</u> (1) <u>un nombre de fois bien déterminé qui est la multiplicité de</u> x' <u>comme racine de l'équation</u> $\varphi(u', v', X) = 0$.

REMARQUE. - Cette propriété reste valable dans le cas d'une fonction algébrique x, séparable ou non des quantités (u, v). Les racines de $\varphi(u, v, X) = 0$ sont alors constituées par des quantités différentes dont chacune est répétée un même nombre de fois égal au facteur d'inséparabilité $[k(x , u , v) : k(u , v)]_i$. Ces g quantités contituent <u>le système complet des conjugués de</u> x <u>sur</u> $k(u , v)$. Leurs spécialisations sur $(u , v) \xrightarrow[k]{} (u' , v')$ sont bien déterminées ; chacune d'elles a comme racine de $\varphi(u' , v' , X) = 0$ une multiplicité qui est un multiple du facteur d'inséparabilité.

<u>Cas général.</u> - Dans le cas général où le point (x) , algébrique sur $k(u , v)$ n'est plus obtenu par une seule coordonnée, on sait cependant définir les conjugués $P_1 = (x^{(1)})$, ... , $P_g = x^{(g)}$ de $P = (x) = (x^{(1)})$ sur $k(u , v)$ (3) . Leur nombre g est égal au degré de l'extension $k(x , u , v)$ par rapport à $k(u , v)$, lorsque cette extension est séparable. Sinon on répétera chaque conjugué un nombre de fois égal au facteur d'inséparabilité $[k(x , u , v) : k(u , v)]_i$ pour obtenir un <u>système complet de</u> g <u>conjugués de</u> P <u>sur</u> $k(u , v)$. Le théorème suivant, que nous admettrons, et dont la démonstration fait l'objet (4) du chapitre III de [11], généralise la propriété que nous venons d'établir dans le cas élémentaire.

THÉOREME 32. - <u>Soient</u> (u , v) <u>un système de variables indépendantes sur</u> k , <u>et</u> $(x) = P$ <u>un point algébrique sur</u> $k(u , v)$. <u>Soit</u> $P' = (x')$ <u>une spécialisation propre finie de</u> P <u>sur la specialisation finie donnée</u> $(u , v) \xrightarrow[k]{} (u' , v')$. <u>Il existe un entier</u> μ <u>positif tel que</u> P' <u>figure exactement</u> μ <u>fois dans toute spécialisation, sur</u> $(u , v) \xrightarrow[k]{} (u' , v')$ <u>d'un système complet de conjugués de</u> P <u>sur</u> $k(u , v)$. <u>Ce nombre</u> μ <u>s'appelle la multiplicité de la spécialisation propre finie</u> $P \rightarrow P'$ (sur $(u , v) \xrightarrow[k]{} (u' , v')$) . <u>C'est un multiple de</u>

$$[k(x , u , v) : k(u , v)]_i \quad .$$

Dans le cas élémentaire une spécialisation $P \longrightarrow P'$ ne peut être propre sans que toutes les autres le soient puisque cette propriété est caractérisée par $\varphi(u' , v' , X) \neq 0$. Dans le cas général on peut avoir pour la spécialisation donnée $(u , v) \xrightarrow[k]{} (u' , v')$ des spécialisations $P \longrightarrow P'$ propres, en même temps que d'autres impropres.

5. <u>Multiplicité d'un point propre d'intersection de</u> V^r <u>avec</u> L'^{n-r}. <u>Degré.</u>

Soit $P' = (x')$ un point propre dans $V \cap L'$, prenons comme au paragraphe 3 ,

---

(3) Ce sont les transformés de P dans les déférents automorphismes de $k(u , v)$, relatifs à $k(u , v)$.

(4) Cette démonstration fait usage d'un anneau de séries formelles.

un point $P = (x)$ dans $V \cap L$ et ses conjugués $P_1, \dots, P_g$ sur $k(u, v)$. Le point P' est une spécialisation propre de P sur la spécialisation $(u, v) \xrightarrow[k]{} (u', v')$. Il existe donc d'après le paragraphe 4, un entier μ positif tel que P' figure exactement μ fois dans <u>toute</u> spécialisation de l'ensemble $(P_1, \dots, P_g)$ sur $(u, v) \xrightarrow[k]{} (u', v')$. Cet entier est la multiplicité de la spécialisation propre $P \longrightarrow P'$; on l'appelle <u>la multiplicité</u> j <u>de</u> P' <u>dans l'intersection de</u> V <u>avec</u> L', <u>qu'on note</u> $\mu = j(V.L', P')$. Elle semble liée non seulement à V, L' et P' mais aussi au corps k de définition de V, et à la variété linéaire générique L^{n-r} qui détermine la spécialisation $(u, v) \xrightarrow[k]{} (u', v')$. En réalité k et L^{n-r} sont sans effet ; on le démontre pour k par comparaison avec le plus petit corps de définition de V, puis pour L^{n-r} en changeant de système générique de $n - r$ équations relativement au corps k_0 ([11], p. 120) .

En particulier la multiplicité de chacun des points $P_1, \dots, P_g$ est égale à 1 dans $V \cap L$, puisque P_1 ne figure qu'une fois, à cause de la séparabilité, dans la spécialisation $(P_1, \dots, P_g, u, v) \longrightarrow (P_1, \dots, P_g, u, v)$.

D'après la définition de la multiplicité, la somme des multiplicités des points propres de $V \cap L'$ n'est pas plus grande que g. Coupons en particulier par un L'^{n-r} générique sur k, autre que L^{n-r}. On obtient g' points d'intersection distincts dont chacun a la multiplicité 1. On a donc $g' \leq g$. Pour la même raison la spécialisation $L'^{n-r} \xrightarrow[k]{} L^{n-r}$ donne $g \leq g'$. On en déduit $g' = g$.

<u>Une variété</u> V^r <u>défini sur</u> k <u>est donc coupée dans l'espace affine</u> S^n <u>suivant</u> g <u>points par toute variété linéaire</u> L^{n-r} <u>générique sur</u> k. <u>Ce nombre, appelé degré de</u> V, <u>est, indépendant du corps de définition</u> k <u>choisi pour</u> V.

6. <u>Théorème de Bezout pour l'intersection</u> $\mathcal{V}^r \cap \mathcal{L}'^{n-r}$ (espace projectif).

Plaçons-nous dans l'espace projectif, c'est-à-dire (exposé 5) considérons en même temps que V^r le système de tous ses représentants. Si $M_0 = (x) = (x_1, \dots, x_n)$ est le point générique de $V^r = V_0$ sur un corps quelconque k de définition, tout autre représentant V_α a pour point générique

$$V_\alpha = \left(\frac{1}{x_\alpha}, \frac{x_1}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha}, \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_n}{x_\alpha}\right)$$

où $x_\alpha \neq 0$. Prenons d'abord la variété L^{n-r}, générique sur k, d'équations :

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} X_j - v_i = 0 .$$

Ses autres représentants sont les variétés linéaires L_α, génériques sur k, d'équations :

$$\sum u_{ij} X_j - v_i X_0 = 0 \qquad (\text{avec } X_\alpha = 1).$$

Tout point M'_α dans $V_\alpha \cap L_\alpha$ est générique de V_α sur k ; c'est donc une spécialisation générique sur k du point M_α dont la première coordonnée $\frac{1}{x_\alpha}$ n'est pas nulle ; la première coordonnée de M'_α n'est pas nulle non plus. Par suite M'_α admet un représentant M'_0 dans V_0, qui est point générique de V_0 sur k, et point de $V_0 \cap L_0$. Donc :

<u>les points d'intersection d'une variété</u> $\mathcal{V}^r$ <u>de l'espace projectif</u> S^n <u>avec une variété linéaire</u> $\mathcal{L}^{n-r}$ <u>générique sur</u> k <u>sont en nombre</u> g <u>égal au degré d'un représentant quelconque</u> V <u>de</u> V^r. <u>Ce nombre</u> g <u>s'appelle le degré de</u> $\mathcal{V}$.

Soit maintenant $\mathcal{L}'^{n-r}$ une variété linéaire quelconque de dimension $n - r$ dans l'espace projectif S^n, définie par les équations linéaires et homogènes :

$$\sum_{j=1}^{n} u'_{ij} X_j - v'_i X_0 = 0 \qquad i = 1 , 2 , \dots , r .$$

Considérons les représentants V_α, L_α^{n-r} et L'^{n-r}_α de $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$. Nous avons vu au paragraphe 3 qu'il existe au moins une valeur de α pour laquelle $V_\alpha \cap L'_\alpha$ n'est pas vide. Supposons que pour toute valeur de α remplissant cette condition les points obtenus soient <u>propres</u>. Les g points G_β dans $V_\beta \cap L_\beta$ correspondent birégulièrement aux g points G_α dans $V_\alpha \cap L_\alpha$ par les transformations birationnelles $T_{\beta\alpha}$ (qui sont des perspectives dans S^{n+1}). Si deux points M'_α et M'_β appartenant respectivement à $V_\alpha \cap L'_\alpha$ et $V_\beta \cap L'_\beta$ se correspondent par $T_{\beta\alpha}$, ils se correspondent birégulièrement ; ils ont alors la même multiplicité $j(V_\alpha . L'_\alpha , M'_\alpha) = j(V_\beta . L'_\beta , M'_\beta) = \mu$ ([11], p. 159). Les points M'_α et M'_β sont alors deux représentants d'un point projectif de $\mathcal{V} \cap \mathcal{L}'$ auquel on affecte par définition la multiplicité μ. Dans toute spécialisation du système de g points G_α (ou G_β) sur la spécialisation $\mathcal{L} \xrightarrow[k]{} \mathcal{L}'$ figure μ fois le point M'_α (ou M'_β) ; ce raisonnement peut être fait pour les représentants de tout point dans $\mathcal{V} \cap \mathcal{L}'$. Puisque $\mathcal{V}$ est une variété <u>complète</u> (exposé 5) on épuise ainsi les g spécialisations (finies ou infinies) de G_α sur la spécialisation $\mathcal{L} \xrightarrow[k]{} \mathcal{L}'$. Autrement dit :

THÉORÈME 33. - <u>Une variété</u> $\mathcal{V}^r$, <u>de degré</u> g, <u>dont tous les points d'intersection</u>

avec une variété linéaire $\mathcal{L}'^{n-r}$ sont propres, est coupée par cette variété $\mathcal{L}'$ en g points si on convient de compter chaque point $\mathfrak{M}'$ d'intersection un nombre de fois égal à sa multiplicité $j(\mathcal{V}.\mathcal{L}', \mathfrak{M}')$.

EXEMPLES.

1) Une variété linéaire est de degré 1.

2) Une hypersurface F définie par l'équation $\Phi(X) = 0$, Φ étant une forme de degré g dans $k[X_1, \dots, X_n]$, a pour degré g . Elle est coupée par une droite D en g points sauf si D est située sur F .

3) La surface de Veronese (exposé 5) est une V^2 de degré 4 dans S^5 . Elle est coupée par un L^3 générique en 4 points.

4) La surface définie dans S^4 par les équations :

$$X_2 X_4 - X_1 = 0 \quad X_1^2 - X_3 X_4 = 0 \quad X_1 X_2 - X_3 = 0$$

est de degré 3. C'est donc une surface cubique, qui est d'ailleurs réglée et rationnelle. Elle est coupée par un plan générique en 3 points simples, mais le plan $X_1 = 0$, $X_4 = 0$ la coupe suivant la droite $X_1 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$.

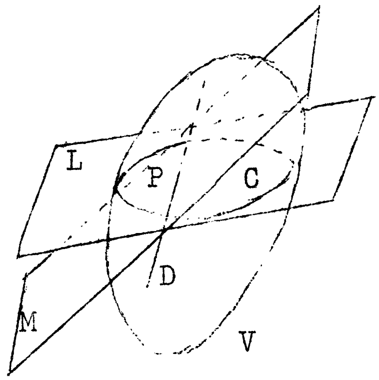
5) Dimension r et degré g sont des entiers positifs attachés à une variété V non réduite à un point dans l'espace affine ou projectif S^n . Le premier est invariant pour les transfotmations birationnelles le 2e pour les transformations projectives seulement. En supposant V dans S^n et non dans une variété linéaire de dimension plus petite, les trois entiers g , r , n vérifient l'inégalité.

$$\boxed{g \geq n - 1 + r}$$

et s'il y a égalité, la variété V est rationnelle (W. GRÖBNER [3] , p. 184 ou L. GODEAUX [2] , p. 34).

7. Multiplicité d'une composante propre C dans $V^r \cap L^{n-s}$.

Soient V^r une variété, L^{n-s} une variété linéaire dans S^n , C^{r-s} une composante propre de $V \cap L$; k étant un corps de définition commun à V et L on considère un système de $r - s$ équations linéaires génériques sur k , définissant une variété linéaire M^{n-r+s} . Celle-ci coupe C en un nombre fini de points égal au degré de C (car C est définie sur $\bar{k}$ et M est générique sur $\bar{k}$ comme sur k) . Soit P l'un de ces points ; il est générique de C sur



$\bar{k}$, et propre dans l'intersection $C \cap M$. D'autre part M est transversal à L et coupe donc L suivant une variété linéaire $D = L \cap M$. Comme

$$P \subset C \cap M \subset (V \cap L) \cap M = V \cap (L \cap M) ,$$

on a $P \subset V \cap D$. Le point P est donc dans une composante maximale Z de $V \cap D$; Z est elle-même dans $(V \cap L) \cap M$ donc dans M et dans une composante maximale X de $V \cap L$.

X est algébrique sur $\bar{k}$ et contient donc C qui est le lieu de P sur $\bar{k}$. Mais C étant maximale dans $V \cap L$ on a $C = X$. Donc $Z \subset C$ et par suite $Z \subset C \cap M$. Le point P étant propre dans $C \cap M$, il vient $Z = P$. C'est dire que P est un point propre d'intersection de C et D. Comme tel on peut lui affecter une multiplicité $j(C.D , P)$. On démontre alors ([11] , p. 129) qu'elle ne dépend que de V, L et C ; les choix de k, de la variété linéaire M générique sur k, et du point P pris parmi les points de $C \cap M$ sont sans effet. La multiplicité $j(C.D, P)$ définit alors la multiplicité d'intersection de V et L, le long de C, soit $j(V.L , C)$.

8. Multiplicité d'une composante C propre dans $V^r \cap W^s$.

V^r et W^s étant deux variétés définies sur k dans S^n, nous avons déjà remarqué au paragraphe 1 que les composantes propres de $V \cap W$ sont les projections dans S^n des composantes propres de l'intersection du produit $W \times W$ avec la variété linéaire Δ d'équations $Y_i = X_i$ $(i = 1 , 2 , \dots , n)$ dans $S^n \times S^n$. Cette projection est une correspondance birationnelle entre Δ et S^n, partout birégulière.

C étant une composante propre de $V \cap W$, on forme donc Δ_c (voir paragraphe 1), qui est une composante propre de $(V \times W) \cap \Delta$. On définit alors, comme il est expliqué au paragraphe 7 , la multiplicité $j((V \times W).\Delta , \Delta_c)$. Elle s'appelle la multiplicité $j(V.W , C)$ de l'intersection de V et W le long de C.

On s'assure alors que ce nombre ne fait pas double emploi avec celui qui a été défini au paragraphe 7 lorsque W est elle-même une variété linéaire ([11] , p. 148).

L'objet de cet exposé est donc atteint. Nous n'irons pas plus loin dans la théorie, nous bornant seulement à signaler certaines questions comme exercices ou sujets de développements possibles.

9. Questions diverses.

1.- Définir le symbole $i(V.W, C; U)$. Etudier ses propriétés (elles s'énoncent commodément dans le langage de la théorie des cycles, [11] , théorème 10, p. 202).

2.- Dans l'espace affine les points d'intersection d'une variété V^r avec une variété linéaire L^{n-r} générique pour les variétés linéaires parallèles à une variété linéaire donnée sont tous propres quand ils existent. Ils ont la même multiplicité qui est une puissance de la caractéristique p du corps premier.

3.- Une variété V^r (dans l'espace affine ou projectif S^n) est coupée par une variété linéaire L^{n-s} , générique, suivant un nombre fini de variétés toutes propres, simples et conjuguées $(s \leqslant r)$. D'après un théorème de Castelnuovo établi pour la caractéristique nulle dans le cas des surfaces $(r = 2)$ et généralisé par VAN DER WAERDEN [6] au cas $r > 2$, ce nombre est égal à 1 pour $r \geqslant 2$ et $s = 1$. C'est-à-dire : l'intersection d'une V^r avec un hyperplan générique est absolument irréductible pour $r \geqslant 2$. Nous savons d'autre part que pour l'autre valeur extrême de s , soit $s = r$, l'intersection est décomposée en g points. D'après une remarque de SAMUEL, l'irréductibilité a lieu encore pour des valeurs intermédiaires $1 < s < r$.

4.- Théorème de Bezout dans l'espace projectif S^n pour $V^r \cap W^{n-r}$ de degrés respectifs g_1 et g_2 , tous les points d'intersection étant propres. (La somme de leurs multiplicité vaut $g_1 . g_2$) .

5.- Définir l'ordre de multiplicité d'un point O sur une V^r . [C'est le minimum de la multiplicité $j(V.L, O)$ pour les variétés linéaires L^{n-r} coupant V proprement en O . Pour que O soit simple sur V , au sens de l'exposé 4, il faut et il suffit que ce minimum soit égal à ℓ ; la variété L est alors transversale à la variété linéaire tangente à V en O ([11] , p. 139)] .

6.- Le théorème suivant a été donné par O. ZARISKI : (x') étant les coordonnées de O et (x) un point générique de V sur un corps k de définition de V , si O est simple sur V l'anneau de spécialisation de (x') dans $k(x)$ est intégralement fermé dans $k(x)$.

7.- La démonstration de ce théorème (donnée dans [11] , p. 136) fait intervenir incidemment une correspondance birationnelle intéressante attachée à une variété quelconque V^r dans S^n , définie sur k , correspondance qui ne peut être rattachée à d'autres questions.

Considérons $r + 1$ hyperplans d'équations

$$\sum_{j=1}^{n} u_i X_j - v_i = 0 \quad i = 1 , 2 , \dots , r + 1 .$$

Choisissons pour les (u) des variables indépendantes sur k , en nombre $n(r+1)$ et prenons un point (x) générique de V sur $K = k(u)$. Assujettissons les hyperplans à passer par ce point (x) , ce qui donne

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} u_i x_j \quad i = 1 , \dots , r + 1 .$$

Comme on a $K(x , v) = K(x)$ le point (x , v) décrit sur K une variété T dans $S^n \times S^{r+1}$, qui se projette suivant V dans S^n , et dans S^{r+1} suivant une variété W définie sur K par le lieu du point (v) . La correspondance entre V et T est birationnelle (monoïdale) ; W se déduit donc de V par une transfotmation unirationnelle définie sur K (et partout régulière sur V) . On démontre que cette correspondance est birationnelle, c'est-à-dire $K(x) = K(v)$. W est donc de dimension r sur K ; les $r+1$ quantités (v) sont alors définies sur K par une seule équation dans $K(V)$, donc les quantités (u , v) sont définies sur k par une seule équation dans $k[U , V]$. Son premier membre est une forme $F(U , V)$ à $(n+1)(r+1)$ variables qu'on appelle la forme associée à la variété V^r , dans S^n . Ses coefficients appartiennent à k , on les appelle les coordonnées de Chow et Van der Waerden de la variété [7] , [8] et [10] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Intersection of algebraic and algebroid varieties, Trans. Amer. math. Soc., t. 57, 1945, p. 1-85.

[2] GODEAUX (Lucien). - Introduction à la géométrie projective hyperspatiale. - Liège, Bourguignon, 1939.

[3] GRÖBNER (Wolfgang). - Moderne algebraische Geometrie. - Wien und Innsbruck, Springer, 1949.

[4] KRULL (W.). - Idealtheorie. - Berlin, Springer, 1935 (Ergebnisse der Mathematik ..., Vierter Band, 3).

[5] SAMUEL (Pierre). - La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 30, 1951, p. 159-274 (Thèse Sc. math. Paris. 1949).

[6] VAN DER WAERDEN (B.L.). - Zur algebraischen Geometrie, X., Math. Annalen, t. 113, 1937, p. 705-712.

[7] VAN DER WAERDEN (B.L.). - Zur algebraischen Geometrie, XI., Math. Annalen, t. 114, 1937, p. 683-699.

[8] VAN DER WAERDEN (B.L.). - Zur algebraischen Geometrie, XII - XV., Math. Annalen t. 115, 1937, p. 330-332, 359-378, 619-642, 645-655.

[9] VAN DER WAERDEN (B.L.). - Einführung in die algebraische Geometrie. - Berlin, Springer, 1939 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 51).

[10] VAN DER WAERDEN (B.L.) und CHOW (W.L.). - Zur algebraischen Geometrie, IX., Math. Annalen, t. 113, 1937, p. 692-704.

[11] WEIL (André). - Foundations of algebraic geometry. - New York, American mathematical Society, 1946 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 29).