Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Léonce Lesieur

# Variétés algébriques, V : transformations birationnelles, espace projectif, variétés abstraites

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 2-3 (1948-1950), exp. nº 5, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1948-1950__2-3__A5_0>

-:-:-:-

Séminaire A. CHÂTELET et P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Années 1948-1950

-:-:-:-

Exposé n° 5

# VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES, V : TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES, ESPACE PROJECTIF, VARIÉTÉS ABSTRAITES

par Léonce LESIEUR

## A. Transformations birationnelles.

### 1. Transformation unirationnelle.

$V^r$ étant une variété définie dans $S^n$ par son point générique $P = (x)$ sur un corps de définition $k$ , posons

$$(1) \qquad y_j = \frac{f_j(x)}{f(x)} \; ; \quad j = 1 , 2 , \ldots , m \; ; \quad f(x) \neq 0 .$$

L'extension $k(y) \subset k(x)$ est régulière puisque $k(x)$ est régulière. Le point $Q = (y)$ décrit donc, dans $S^m$ , une variété $W$ définie dans $S^m$ sur $k$ . On dit que $W$ correspond à $V$ par une transformation unirationnelle $T$ définie sur $k$ par les équations (1). La dimension de $W$ , qui est celle de $k(y)$ sur $k$ , est inférieure ou égale à la dimension $r$ de $V$ , qui est la dimension de $k(x)$ sur $k$ . On écrit $Q = T(P)$ et $W = T(V)$ .

### 2. Variété image d'une transformation unirationnelle.

Une autre conception de la transformation unirationnelle, due à F. SEVERI, fait intervenir le produit des points $P$ et $Q$ . Soit $M = P \times Q = (x , y)$ , un produit dans l'espace $S^n \times S^m$ . Comme on a $k(M) = k(P)$ , le point $M$ décrit une variété $V_T$ , de dimension $r$ , définie sur $k$ . C'est une sous-variété du produit $V \times W$ , qui se projette dans $S^n$ suivant $V$ et dans $S^m$ suivant $W$ (exposé 4, n°2). $V_T$ s'appelle l'image de la transformation $T$ ; certains auteurs (F. SEVERI, A. WEIL) l'identifient sans inconvénient avec $T$ . Elle joue en effet un rôle essentiel dans la recherche des corps de définition de la transformation unirationnelle, ainsi que dans la définition et l'étude des points homologues de la transformation.

### 3. Corps de définition de la transformation $T$ .

Un corps $k$ est corps de définition pour $T$ s'il est un corps de définition pour $V_T$.

Pour justifier cette définition, on passe par l'intermédiaire du plus petit corps de définition $k_0$ de $V_T$. Comme on a $k \supset k_0$, le point $M = P \times Q = (x , y)$ est un point générique de $V_T$ sur $k_0$ et les corps $k$ et $k_0(x , y)$ sont linéairement disjoints (exposé 2). D'ailleurs, $k_0$ est un corps de définition de $V$, projection de $V_T$ dans $S^n$ et de $W$ projection de $V_T$ dans $S^m$ (exposé 3, n° 2). Nous allons montrer :

$k_0(y) \subset k_0(x)$. Considérons un élément $y_j = z$ et un système maximal $\xi_\lambda$ d'éléments linéairement indépendants sur $k_0$ parmi les coefficients de $f_j(X)$ et $f(X)$. Ces polynômes s'écrivent donc :

$$f_j(X) = \sum \xi_\lambda f_{j\lambda}(X) \ ; \quad f(X) = \sum \xi_\lambda \ f_\lambda(X)$$

ce qui donne

$$\sum_\lambda \xi_\lambda (f_\lambda(x) \times z - f_{j\lambda}(x)) = \sigma .$$

Le coefficient de $\xi_\lambda$ est un élément de $k_0(x , y)$, et les $\xi_\lambda$ sont des éléments indépendants sur $k_0(x , y)$ comme sur $k_0$, puisque $k$ et $k_0(x , y)$ sont linéairement disjoints. D'où

$$z\, f_\lambda(x) - f_{j\lambda}(x) = 0 \text{ pour tout } \lambda .$$

Il existe d'ailleurs un $\lambda$ pour lequel $f_\lambda(x) \neq 0$, sinon $f(x) = 0$.

On en tire

$$z = \frac{f_{j\lambda}(x)}{f_\lambda(x)} \qquad f_\lambda(x) \neq 0 .$$

Tous les $y_j$ sont des éléments de $k_0(x)$. On a bien $k_0(y) \subset k_0(x)$.

On peut donc supposer les équations (1) écrites sur $k_0$.

Considérons un point générique $(x' , y')$ de $V_T$ sur un corps de définition $k'$ quelconque de $V_T$. Ce point est aussi un point générique de $V_T$ sur $k_0$, donc une spécialisation générique de $(x , y)$ sur $k_0$. Il existe alors un isomorphisme $\sigma$, sur $k_0$, entre $k_0(x , y)$ et $k_0(x' , y')$ appliquant $(x , y)$ sur $(x' , y')$. Les relations (1), supposées écrites avec des coefficients dans $k_0$, entraînent par cet isomorphisme $\sigma$ :

$$y'_j = \frac{f_j(x')}{f(x')} \quad ; \quad f(x') \neq 0 \ ; \quad j = 1 , 2 , \dots , m .$$

On a donc pour tout point générique $(x', y')$ de $V_T$ : $k(y') \subseteq k(x')$ et les points $P' = (x')$ et $Q' = (y')$ sont deux points génériques homologues par $T$.

Un point générique $(x', y')$ de $V_T$ sur $k'$ est tel que $P(x')$ et $Q = (y')$ sont deux points génériques homologues de $V$ et $W$ par $T$.

4. Projection régulière en un point.

Soit $P' = (x')$ un point de $V$ ; $(x')$ est donc une spécialisation finie de $(x)$ sur $k$. Supposons comme au théorème 25 (exposé 4) les $y_j$ dans l'anneau de spécialisation de $(x')$ dans $k(x)$, donc

$$y_j = \frac{f_j(x)}{f(x)} \quad \text{avec} \quad f(x') \neq 0 \, , \quad j = 1 , 2 , \dots , m \, .$$

Nous allons montrer qu'il n'existe qu'une spécialisation de $(x, y)$ en $(x', y')$ sur $k$, et que celle-ci est finie avec la valeur :

$$y'_j = \frac{f_j(x')}{f(x')} \qquad j = 1 , 2 , \dots , m \, .$$

pour $(y')$. Cela signifie que les points ou pseudo-points de $V_T$ qui se projettent en $P'$ se réduisent au point unique $(P', Q')$ de coordonnées

$$x' , \quad \frac{f_j(x')}{f(x')} \, .$$

Prenons d'abord un seul $y_j$, soit $z$. Si $z = 0$, la propriété est vérifiée. Supposons $z \neq 0$, il faut d'abord montrer que la spécialisation $(x, z) \xrightarrow[k]{} (x', z')$ n'est pas infinie, donc que $(x, \frac{1}{z})$ n'admet pas $(x', 0)$ comme spécialisation sur $k$. Comme on a :

$$f(x) - \frac{1}{z} \, f_j(x) = 0$$

on en déduirait $f(x') = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Toute spécialisation $(x, z) \xrightarrow[k]{} (x', z')$ étant finie, la relation

$zf(x) - f_j(x) = 0$ entraîne $z' f(x') - f_j(x') = 0$, ou

$$z' = \frac{f_j(x')}{f(x')}$$

$z'$ est donc uniquement déterminé. Il en est de même pour tous les $y'_j$. Il reste à prouver que ces valeurs $y'_j = \frac{f_j(x')}{f(x')}$ sont bien une solution, donc que :

$$(x , y_j) \xrightarrow[k]{} (x' , y'_j) .$$

Supposons $F(X , Y) \in k [X , Y]$ et tel que $F(x , y_j) = 0$. On peut trouver un entier $d > 0$ assez grand pour que :

$$H(X) = f(X)^d \, F(X , \frac{f_j(X)}{f(x)}) \in k [X] .$$

On en tire $H(x) = 0$, d'où $H(x') = 0$, et comme $f(x') \neq 0$

$$F(x' , y'_j) = 0 .$$

$(x' , y'_j)$ est bien une spécialisation de $(x , y)$ sur $k$.

Pour exprimer que les $y_j$ sont dans l'anneau de spécialisation de $(x') = P'$ dans $k(x)$ on dit que la projection de $V_T$ sur $V$ est <u>régulière</u> ([1]) au point $P'$ ou encore que $T$ est régulière en $P'$. Le point unique $(P' , Q')$ de $V_T$ qui se projette en $P'$ dans $V$ détermine par projection sur $W$ un point unique $Q'$ de $W$ qu'on appelle le transformé de $P'$ par $T$.

Donc :

THÉORÈME 26. - <u>Lorsque la transformation</u> $T$ <u>est régulière en</u> $P' = (x')$ <u>il n'existe qu'un point</u> $Q'$ <u>transformé de</u> $P'$ <u>par</u> $T$. Ses coordonnées sont

$$(1)' \qquad y'_j = \frac{f_j(x')}{f(x')}$$

Si $P'$ décrit sur $k$ une sous-variété $V'$ de $V$, le point $Q'$ décrit sur $k$ une sous-variété $W'$ de $W$. Les formules $(1)'$ montrent que $W'$ correspondant à $V'$, est la sous-variété $V_{T'}$ de $V_T$ définie par le lieu du point $P' \times Q'$ sur $k$.

## 5. Transformation birationnelle.

Soient $V$ et $W$ deux variétés, la 1re définie dans $S^n$ sur un corps $k$, la 2e dans $S^m$ sur le même corps $k$. $P = (x)$ étant un point générique de $V$ sur $k$ et $Q = (y)$ un point générique de $W$ sur $k$, nous supposons

$$k(P) = k(Q)$$

ou, ce qui est équivalent :

$$(2) \qquad \begin{cases} y_j = \dfrac{f_j(x)}{f(x)} & ; \ j = 1 , 2 , \dots , m ; \ f(x) \neq 0 \\[2ex] x_i = \dfrac{g_i(y)}{g(y)} & ; \ i = 1 , 2 , \dots , n ; \ g(y) \neq 0 . \end{cases}$$

---

([1]) Cette propriété est indépendante du corps $k$ de définition de $T$.

On dit alors que $V$ et $W$ se correspondent birationnellement par une transformation birationnelle $T$ définie sur $k$, ayant $P$ et $Q$ comme points génériques homologues. Chacune des variétés $V$ et $W$ correspond à l'autre par une transformation unirationnelle. Les variétés $V$ et $W$ ont la même dimension $r$, qui est la dimension commune des corps $k(P)$ et $k(Q)$ sur $k$.

La transformation $T$ est également définie par sa variété-image $V_T$ définie sur $k$ par le lieu du point $P \times Q$ dans $S^{n+m}$. $V_T$ est une sous-variété de $V \times W$. Comme on a $k(P \times Q) = k(P) = k(Q)$, la variété $V_T$ correspond birationnellement à $V$ par la transformation birationnelle (monoïdale) $T'$ et à $W$ par la transformation monoïdale $T''$. On a

$$T = T''^{-1} \times T' .$$

On écrit $W = T(V)$, $V = T^{-1}(W)$ et $V\, T\, W$.

$$Q = T(P) , \quad P = T^{-1}(Q) \quad \text{et} \quad P\, T\, Q .$$

Prenons un autre point générique $P'$ de $V$ sur $k$. Nous savons d'après le lemme 3 (exposé 1) qu'il existe entre les extensions $k(P)$ et $k(P')$ un isomorphisme sur $k$ entre les extensions $k(P')$ et $k(Q)$. De même on montre l'existence d'un isomorphisme sur $k$ entre les extensions $k(P')$ et $k(Q')$, lorsque $P'$ et $Q'$ sont deux points génériques de $V$ et $W$ (respectivement) sur $k$. Inversement, supposons qu'il existe un isomorphisme $\sigma$, sur $k$, entre les extensions $k(P')$ et $k(Q)$ ; $\sigma$ applique $P'$ sur un point $P$, également générique de $V$ sur $k$, tel que $k(P) = k(Q)$. Les variétés $V$ et $W$ se correspondent alors birationnellement sur $k$, les points $P$ et $Q$ étant des points génériques homologues. Donc :

THÉORÈME 27. - Pour que deux variétés $V$ et $W$ se correspondent birationnellement il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme sur $k$ entre les corps $k(P')$ et $k(Q')$, $P'$ et $Q'$ étant deux points génériques de $V$ et $W$ sur un corps $k$ de définition commun aux deux variétés.

## 6. Points et variétés homologues.

Soit $P' = (x')$ un point de $V$ tel que la projection de $V_T$ en $P'$ soit régulière. Il existe d'après le théorème 27 un point unique $Q' = (y')$ transformé de $P'$ par $T$. Ses coordonnées sont $y_j = \frac{f_j(x')}{f(x)}$ et la spécialisation $(x , y) \xrightarrow[k]{} (x' , y')$ est la seule dans laquelle $x \xrightarrow[k]{} x'$. Supposons en outre que la projection de $V_T$ sur $W$ soit régulière au point $Q' = (y')$ c'est-à-dire que $(x)$ soit dans l'anneau de spécialisation de $(y')$ dans $k(y)$. On a donc

$$x_i = \frac{g_i(y)}{g(y)} \; ; \; i = 1, \ldots, n \; ; \; g(y') \neq 0 .$$

Il n'existe alors qu'une spécialisation $x \xrightarrow[k]{} x''$ telle que $(x, y) \xrightarrow[k]{} (x'', y')$ d'après le théorème 27 appliqué à la projection régulière de $V_T$ sur $W$ au point $Q'$. Comme on a déjà

$$(x, y) \xrightarrow[k]{} (x', y')$$

on en déduit

$$(x'_i) = (x''_i) = \frac{g_i(y')}{g(y)}$$

Le point $P'$ est le point unique transformé de $Q'$ par $T^{-1}$. On dit que la transformation $T$ <u>est birégulière en</u> $P'$ <u>et</u> $Q'$ et que ces points se correspondent <u>birégulièrement par</u> $T$ :

Si les points $P'$ et $Q'$ sont les points génériques sur $k$ de deux sous-variétés $V'$ et $W'$ de $V$ et $W$ (respectivement) on dit que $V'$ et $W'$ se correspondent birégulièrement par $T$. Les formules

$$(2)' \quad \begin{cases} y'_j = \dfrac{f_j(x')}{f(x')} \; ; \; j = 1, 2, \ldots, m \; ; \; f(x') \neq 0 \\[2ex] x'_i = \dfrac{g_i(y')}{g(y')} \; ; \; i = 1, 2, \ldots, n \; ; \; g(y') \neq 0 \; ; \end{cases}$$

montrent que $V'$ et $W'$ sont en correspondance birationnelle $T'$, l'image de cette correspondance étant la sous-variété $V'_T$ de $V_T$ définie par le lieu du point $P' \times Q'$ sur $k$. $V'$ et $W'$ ont donc la même dimension. Le théorème 25 de l'exposé 4 entraîne immédiatement le :

COROLLAIRE. - <u>Si deux variétés</u> $V'$ <u>et</u> $W'$ <u>se correspondent birégulièrement par</u> $T$ <u>et si l'une est simple sur</u> $V$ <u>l'autre est simple sur</u> $W$.

Lorsque la projection de $V_T$ dans $V$ n'est pas régulière au point $P'$, il existe cependant des points ou pseudo-points $P' \times Q'$ de $V_T$ qui se projettent dans $V$ suivant $P'$ (voir la note sur l'extension d'une spécialisation dans l'exposé 4, n° 2). Les points $Q'$ éventuels s'appellent transformés de $P'$ par $T$. Si le point $P'$ décrit sur $k$ une sous-variété $V'$ de $V$ et si un point quelconque Q' transformé de P' par T décrit sur k une sous-variété W' de W, cette variété W' s'appelle transformée de V' par T. On écrit :

$$W' = T(V')$$

V' et W' n'ont plus nécessairement la même dimension.

L'analyse des points non réguliers d'une transformation birationnelle T doit faire intervenir les pseudo-points Q' homologues de P', elle ne peut donc se traiter de façon satisfaisante que dans l'espace projectif. Disons seulement qu'on peut définir parmi les points P' non réguliers des points fondamentaux. Si P' et Q' sont deux points homologues et si T n'est pas régulière en P', ce point P' fait partie des points fondamentaux de T ; si T n'est pas régulière en Q', ce point Q' fait partie des points fondamentaux pour $T^{-1}$. L'étude des points fondamentaux et variétés fondamentales d'une correspondance birationnelle a fait l'objet de travaux de O. ZARISKI [8] et [9]. Lorsque T opère dans deux $S^3$ elle prend le nom de transformation crémonienne de l'espace (du nom de CREMONA, fondateur de la théorie) T peut alors posséder des points fondamentaux et des courbes fondamentales, sur lesquels on pourra consulter un mémoire de L. GODEAUX [3].

## 7. Exemples de transformation birationnelles.

$\alpha$) Correspondance birationnelle entre une $V^r$ dans $S^n$ et une $W^r$ dans $S^{r+1}$.

Soit $P = (x) = (x_1, \ldots, x_n)$ un point générique de $V^r$ sur k. L'extension k(x) étant régulière et de dimension r sur k, on peut choisir $x_1, x_2, \ldots, x_r$ indépendants sur k, les autres coordonnées $x_{r+1}, \ldots, x_n$ étant algébriquement séparables sur $k(x_1, \ldots, x_r)$. On a donc d'après le théorème de l'élément primitif

$$k(x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_n) = k(x_1, \ldots, x_r, \xi).$$

Le point $Q = (x_1, \ldots, x_r, \xi)$ décrit dans $S^{r+1}$ une variété $W^r$ qui est en correspondance birationnelle T avec $V^r$ ; Q et P sont deux points homologues dans la transformation. La variété $W^r$ est définie par une seule équation :

$$F(x_1, \ldots, x_r, \xi) = 0.$$

On l'appelle une hypersurface.

Toute variété $V^r$ définie sur k dans $S^n$ est donc en correspondance birationnelle avec une hypersurface $W^r$ définie sur k dans $S^r$.

$\beta$) Représentation de Cayley-Halphen d'une variété $V^r$.

On peut préciser la correspondance birationnelle précédente, moyennant une extension $K$ du corps de base $k$. Les notations étant celles de $\alpha$, choisissons des variables $t_{r+2}, \dots, t_n$ en nombre $n-r+1$, indépendantes sur $k(x)$. Posons :

$$K = k(t_{r+2}, \dots, t_n)$$

et

$$\xi = x_{r+1} + t_{r+2} x_{r+2} + \dots + t_n x_n .$$

Comme $K$ et $k(x)$ sont indépendants sur $k$, $K(x)$ est extension régulière de $K$, et $P = (x)$ est point générique de $V^r$ sur $K$ (exposé 2).

D'après le théorème de l'élément primitif :

$$K(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) = K(x_1, \dots, x_r, \xi) .$$

Le point $Q = (x_1, \dots, x_r, \xi)$

$= (y_1, \dots, y_r, y_{r+1})$

a donc un lieu $W^r$ sur $K$ qui est en correspondance birationnelle avec $V$, par les formules

$$(2) \quad \begin{aligned} & y_1 = x_1 ; \dots ; y_r = x_r ; \quad y_{r+1} = x_{r+1} + t_{r+2} x_{r+2} + \dots + t_n x_n . \\ & x_i = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad x_{r+h} = \frac{f_h(y)}{f(y)} \quad (h = 1, \dots, n-r) \end{aligned}$$

avec

$$F(y_1, y_2, \dots, y_r, y_{r+1}) = 0$$

où $F = 0$ est l'équation de l'hypersurface $W^r$ dans $S^{r+1}$, sur $K$. La correspondance birationnelle s'interprète comme une projection de $V^r$ dans la variété linéaire $X_{r+2} = \dots = X_n = 0$ parallèlement à la variété linéaire $X_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, $X_{r+1} + t_{r+2} X_{r+2} + t_n X_n = 0$.

La projection précédente a été utilisée par Cayley et Halphen dans la théorie des courbes gauches. On l'appelle la représentation de Cayley-Halphen de la variété V .

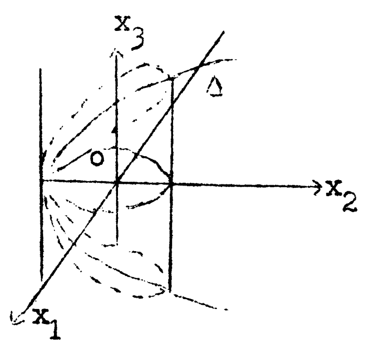
EXEMPLE. - Soit $V^1$ la courbe de $S^3$ lieu sur le corps k des nombres complexes du point $(x_1 , x_2 , x_3)$ tel que

$$x_1^2 + x_2^2 - a^2 = 0 \quad \text{et} \quad x_3^2 - 2p(x_2 + a) = 0 ,$$

C'est bien une courbe irréductible, transformée monoïdale de la courbe

$$x_1^2 + \left(\frac{x_3^2}{2p} - a\right)^2 - a^2 = 0 \quad \text{du plan} \quad (x_1 , x_3) \quad \text{par :}$$

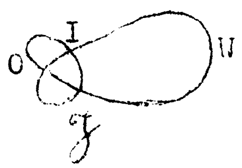
$$z_1 = x_1 , \; Z_2 = \frac{x_3^2}{2p} - a , \quad Z_3 = x_3$$




Effectuons la transformation (2) , définie sur $k(t)$

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = x_2 + t\, x_3 \quad .$$

Cela revient à faire une projection sur le plan $(x_1 , x_2)$ parallèlement à la direction $\Delta$ (suffisamment générale) définie par $X_1 = 0$ , $X_2 + tX_3 = 0$ . On obtient une courbe W en correspondance birationnelle avec V . La correspondance birationnelle entre V et W est pour tout point de V <u>régulière</u> dans le sens $V \longrightarrow W$ ; elle ne l'est pas forcément dans le sens inverse pour tout point de W , par exemple pour les deux points I et $\mathcal{J}$ tracés des deux cordes de V parallèles à $\Delta$ .




Ces points I et $\mathcal{J}$ sont fondamentaux pour la transformation $T^{-1}$ .

$\gamma$ ) <u>Transformation quadratique</u>.

Soit $(x_1 , x_2 , x_3)$ le point générique de $S^3$ sur un corps quelconque k et $(y_1 , y_2 , y_3)$ le point générique de $S'^3$ sur le même corps k . Une transformation birationnelle T est définie entre $S^3$ et $S'^3$ , sur k , par les formules

$$(3) \qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{x_1}{x_3} \quad y_2 = \dfrac{x_2}{x_3} \quad y_3 = x_3 \\[2ex] x_1 = y_1\, y_3 \quad x_2 = y_2\, y_3 \quad x_3 = y_3 \end{cases}$$

C'est une transformation quadratique (particulière) entre $S^3$ et $S'^3$ définie sur k . Elle est régulière pour tout point de $S'^3$ ; elle est régulière pour tout point de $S^3$ qui n'appartient pas au plan $X_3 = 0$ .

Elle est donc birégulière aux points homologues

$$P'(x'_1 , x'_2 , x'_3 \neq 0) \quad T \quad Q'(\frac{x'_1}{x'_3} , \frac{x'_2}{x'_3} , x'_3) \quad .$$

Le point (0 , 0 , 0) de $S_3$ est fondamental pour T , la variété transformée étant le plan de $S^3$ lieu du point $(y_1 , y_2 , 0)$ .

La transformation (3) est utilisée dans l'analyse des points singuliers d'une surface algébrique F . 0 est point double de F si l'équation de F prend la forme :

$$\varphi_2(x_1 , x_2 , x_3) + \varphi_3(x_1 , x_2 , x_3) + \dots + \varphi_n(x_1 , x_2 , x_3) = 0$$

les $\varphi$ étant des polynômes dans $k [X_1 , X_2 , X_3]$ , homogènes, le degré étant indiqué par l'indice. La surface F est une variété régulière pour la transformation T ; la surface transformée F' a pour équation :

$$\varphi_2(y_1 , y_2 , 1) + y_3 \varphi_3(y_1 , y_2 , 1) + \dots + y_3^{n-2} \varphi_n(y_1 , y_2 , 1) = 0$$

F et F' se correspondent par une transformation birationnelle T' , empreinte de T . Le point 0 est fondamental pour T' et les points homologues sont les points 0' qui vérifient :

$$y'_3 = 0 \quad \varphi_2(y'_1 , y'_2 , 1) = 0 \; .$$

Si le cône $\varphi_2(x_1 , x_2 , x_3) = 0$ est irréductible, tous les points 0' sont simples sur F' . On dit alors (par définition) qu'ils constituent les points simples de F situés dans le domaine du 1er ordre de 0 , ou infiniment voisins de 0 dans son domaine du 1er ordre. On voit ainsi l'amorce d'une analyse possible, au moyen des transformations birationnelles quadratiques, des points singuliers d'une surface algébrique dans $S^3$ . C'est la méthode qui a été suivie par Max NOETHER [4] et [5] ; elle donne des résultats simples dans le cas des courbes planes ; ils sont déjà beaucoup plus compliqués dans le cas des surfaces ; ils déviennent inextricables pour les hypersurfaces.

Les transformations quadratiques du plan jouent un rôle fondamental dans le groupe des transformations crémoniennes planes sur le corps des nombres complexes, puisque CLIFFORD, Max NOETHER et ROSANES ont démontré presque en même temps (1869-1871) qu'une transformation crenonienne est toujours le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques . Leurs démonstrations, imparfaites, ont été complétées par la suite par les géomètres italiens ( [1] , p. 260) . Aucun résultat de ce genre n'est connu jusqu'à présent pour les transformations crémoniennes de l'espace ou des hyperespaces.

δ) Variétés rationnelles.

On dit qu'une variété $V^r$ , définie sur $k$ , est rationnelle si elle est en correspondance birationnelle avec une variété linéaire $L^r$ , à $r$ dimensions, définie sur $k$ .

EXEMPLES. - Variété de Veronese.- C'est le lieu du point $(y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , y_5)$ défini dans $S^5$ par

$$y_1 = x_1^2 , \quad y_2 = x_1 x_2 , \quad y_3 = x_2^2 , \quad y_4 = x_1 , \quad y_5 = x_2$$

et qui est en correspondance birationnelle (monoïdale) avec le plan $(x_1 , x_2)$ . La correspondance est partout birégulière.

Variété de Segre.- Soient deux variétés linéaires, par exemple deux plans $(x_1 , x_2)$ et $(y_1 , y_2)$ définis par des variables $(x_1 , x_2)$ et $(y_1 , y_2)$ sur un corps $k$ quelconque. Formons les quantités

$$\begin{array}{lll} z_1 = x_1 y_1 & z_2 = x_1 y_2 & z_3 = x_1 \\ z_4 = x_2 y_1 & z_5 = x_2 y_2 & z_6 = x_2 \\ z_7 = y_1 & z_8 = y_2 & \end{array}$$

Le point $z_1 , z_2 , \ldots , z_8$ décrit dans $S^8$ une variété rationnelle $V^4$ en correspondance birationnelle (monoïdale) avec la variété linéaire lieu du point $(x_1 , x_2 , y_1 , y_2)$ . On l'appelle variété de Segré définie par les deux plans. Sa section par la variété linéaire $z_7 = z_3$ , $z_8 = z_6$ est la variété de Veronese $V^2$ .

On définit de même la variété de Segré représentant un nombre fini de variétés linéaires données.

ε) Variété unirationnelle.

On dit qu'une variété $V^r$ est unirationnelle lorsqu'elle correspond unirationnellement à une variété linéaire $L^r$ . LUROTH a démontré qu'une courbe birationnelle est aussi rationnelle ; CASTELNUOVO a démontré qu'une surface unirationnelle est encore rationnelle. Les variétés unirationnelles de dimension supérieure à 2 sont mal connues ; un exemple célèbre est l'hypersurface cubique de l'espace à 4 dimensions [2]. On sait qu'elle est unirationnelle, mais la question de son irrationalité a déjà soulevé bien des controverses.

## B. Espace projectif.

Soit $S^{n+1}$ un espace affine à $n + 1$ dimensions, et $0$ le point de coordonnées $(0, 0, \dots, 0)$. $P_0 = (x_0) \neq 0$ étant un point quelconque, et $t$ une quantité, considérons le point $P$ tel que $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OP_0}$. On écrira en abrégé $P = tP_0$. Lorsque $t$ est une variable sur un corps $k$ contenant les coordonnées de $P_0$ le point $P$ décrit une variété linéaire de dimension 1 passant par $0$ et $P_0$ ; et réciproquement, toute variété linéaire de dimension 1 passant par $0$, définie sur un corps $k$, est susceptible de cette définition (exposé 4, n° 3). Cette variété linéaire de dimension 1 s'appelle un rayon. Deux rayons distincts se coupent au seul point $0$. Pour qu'un point soit sur le rayon défini par $P_0$, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $wP_0$, $w$ étant une quantité quelconque, qu'on peut toujours considérer comme spécialisation de $t$ sur $k$. Les quantités $(x_0)$ s'appellent coordonnées homogènes du rayon $OP_0$. Un rayon étant donné, ses coordonnées homogènes sont donc définies à un facteur multiplicatif près non nul.

Un cône dans $S^{n+1}$ est une variété qui contient en même temps qu'un point $P_0 \neq (0)$ le rayon $OP_0$ passant par ce point. Il est facile de caractériser les équations d'un cône.

LEMME 1. - Un cône est caractérisé par des équations homogènes : Soit $V$ un cône défini sur $k$ dans $S^{n+1}$ et $P = (x)$ un point générique de $V$ sur $k$ ; soit $\mathfrak{p}$ l'idéal déterminé par $(x)$ sur $k$ ; $t$ étant une quantité variable sur $k(x)$ les corps $k(t)$ et $k(x)$ sont indépendants sur $k$ (et même linéairement disjoints) et $(x)$ est aussi point générique de $V$ sur $k(t)$ (exposé 2). Un système d'équations de $V$ sur $k$ est donc aussi un système d'équations de $V$ sur $K = k(t)$ (exposé 2, théorème 9). Comme $V$ est un cône, si $F(X) \in \mathfrak{p}$ dans $k[X]$ on a aussi $F(tx) = 0$ ; donc $F(tX) = \sum t^{\nu} F_{\nu}(X)$ est un polynôme de l'idéal définissant $V$ sur $K$ ; ses composantes homogènes $F_{\nu}(X)$ sont d'après le lemme 7 dans l'idéal $\mathfrak{p}$. Cet idéal est donc un idéal homogène (2) ; comme

---

(2) Un idéal est homogène dans $k[X]$ si une somme de polynômes homogènes de degré différents ne peut appartenir à l'idéal sans que chacun des polynômes homogènes en fasse partie. Pour qu'un idéal soit homogène il faut et il suffit qu'il ait au moins une base constituée par des formes.

un idéal homogène possède toujours une base constituée par des formes, un cône possède toujours un système d'équations homogènes. Réciproquement si une variété dans $S^{n+1}$ possède un système d'équations homogènes, il est clair que c'est un cône.

LEMME 2. - Une variété $V^r$ autre qu'un cône étant définie sur $k$ dans $S^{n+1}$, il existe un cône unique $W$ de dimension $r+1$ défini sur $k$ qui contient $V^r$. Tout cône contenant $V$ contient aussi $W$.

Soit $P = (x)$ un point générique de $V$ sur $k$ ; considérons une quantité $t$ variable sur $k(x)$. Nous avons déjà vu que $(x)$ est point générique de $V$ sur $k(t)$ et $k$, donc que $k(x, t)$ est extension régulière de $k$ ; le sous-corps engendré par le point $(tx)$ est donc aussi une extension régulière de $k$ ; ce point décrit par conséquent sur $k$ une variété $W$ de dimension au plus égale à $r+1$. Soit $F(X)$ un polynôme de l'idéal définissant $W$ sur $k$ ; d'où $F(tx) = \sum t^{\nu} F_{\nu}(x) = 0$. Comme les corps $k(x)$ et $k(t)$ sont linéairement disjoints, l'idéal défini par $x$ sur $K = k(t)$ a une base dans $k[X]$ ; il en résulte que $F_{\nu}(X)$ appartient à l'idéal définissant $V$ sur $k$, donc que $F_{\nu}(x) = 0$ et aussi $F_{\nu}(tx) = 0$. $F_{\nu}(X)$ appartient ainsi à l'idéal définissant $W$ sur $k$, ce qui montre que cet idéal est homogène et que $W$ est un cône. De plus, $F_{\nu}(x) = 0$ entraîne $F(x) = 0$, ce qui montre que $V \subset W$. Le cône $W$ dont la dimension est $r$ ou $r+1$, a certainement la dimension $r+1$, sans quoi il coïnciderait avec $V$ qui n'est pas un cône. Soit $W'$ un cône contenant $V$ ; il contient $P = (x)$ donc $tP$ et par suite $W$. S'il a la dimension $r+1$ il coïncide avec $W$. Le rayon générique sur $k$ dans $S^{n+1}$ peut encore être obtenu d'une autre façon.

Soit $(u) = (u_0, \dots, u_n)$ un point générique de l'espace affine $S^{n+1}$ sur $k$. Les quantités $u_0, u_1, \dots, u_n$, variables indépendantes sur $k$, sont les coordonnées homogènes du rayon générique sur $k$. Considérons les points $M_\alpha$ d'intersection de ce rayon avec la variété linéaire $L_\alpha$ d'équation $X_\alpha - 1 = 0$. Par exemple, $M_0$ a pour coordonnées :

$$\left(1, \frac{u_1}{u_0}, \dots, \frac{u_n}{u_0}\right) = (1, x_1, \dots, x_n) \quad ;$$

$M_1$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{u_0}{u_1}, 1, \frac{u_2}{u_1}, \dots, \frac{u_n}{u_1}\right) = \left(\frac{1}{x_1}, 1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right) .$$

Comme $k(M_0) = k(M_1)$ les deux points $M_0$ et $M_1$ sont homologues sur $k$ dans une transformation birationnelle $T_{01}$. Les équations de cette transformation (perspective) ont leurs coefficients dans le corps premier $k_0$. La transformation birationnelle $T_{01}$ est donc définie sur ce corps par le point générique $(M_0 , M_1)$ de $V_{T_{01}}$. Il en résulte que $T_{01}$ est indépendante du choix de $k$ et du point générique $(u)$ pris dans $S^{n+1}$. De plus $T_{01}$ est birégulière pour tout couple $P_0 P_1$ de points homologues car si $P_0 = (z)$ et $P_1 = (z')$, les quantités $(z_1 , z'_0)$ doivent être une spécialisation finie de $x_1 , \frac{1}{x_1}$ sur $k$ ; elles doivent donc vérifier $z_1 . z'_0 = 1$, et par suite $z_1 \neq 0$, et $z'_0 \neq 0$. Les projections de $V_{T_{01}}$ en $P_0$ et $P_1$ sont donc régulières. Les mêmes raisonnements s'appliquent à la transformation birationnelle $T_{\beta\alpha}$ qui fait passer de $M_\alpha$ à $M_\beta$, et de la variété linéaire $L_\alpha$ à la variété linéaire $L_\beta$.

Le rayon générique sur $k$ de l'espace affine $S^{n+1}$, peut donc être considéré comme l'ensemble de $n+1$ points $M_\alpha$, génériques sur $k$ de variétés linéaires $L_\alpha$, deux points $M_\alpha$ et $M_\beta$ se correspondant par une transformation birationnelle $T_{\beta\alpha}$ définie sur $k$. Dans cette transformation birationnelle deux points homologues quelconques se correspondent toujours birégulièrement. L'espace des rayons génériques sur $k$ dans $S^{n+1}$ est donc défini par l'ensemble de $n+1$ variétés linéaires affines à $n$ dimensions reliées par les transformations birationnelles $T_{\beta\alpha}$. Son rayon générique sur $k$ est défini par l'ensemble des points correspondants $(M_0 , M_1 , \dots , M_n)$ par les transformations $T_{\beta\alpha}$. Chacune des variétés $L_\alpha$ s'appelle un représentant de l'espace des rayons, chacun des points $M_\alpha$ est un représentant du rayon $M$.

On pourrait se contenter, pour définir le rayon générique $M$ sur $k$, d'un seul représentant, par exemple $M_n$. La considération de $n + 1$ représentants est nécessaire pour la validité du théorème suivant :

THÉORÈME 28. - Soit $(M'_0 , M'_1 , \dots , M'_n)$ une spécialisation (finie ou infinie) de $(M_0 , M_1 , \dots , M_n)$ sur $k$. Il existe au moins une valeur de $\alpha$ pour laquelle $M'_\alpha$ est une spécialisation finie de $M_\alpha$ sur $k$, c'est-à-dire est un point de $L_\alpha$.

Exposons la démonstration sur le cas $n = 2$, et plaçons les coordonnées de $M_0 M_1 M_2$ dans un tableau :

$$\begin{array}{cccc} M_0 & 1 & \frac{u_1}{u_0} & \frac{u_2}{u_0} \\ M_1 & \frac{u_0}{u_1} & 1 & \frac{u_2}{u_1} \\ M_3 & \frac{u_0}{u_2} & \frac{u_1}{u_2} & 1 \end{array} .$$

Les coordonnées symétriques par rapport à la diagonale principale sont inverses ; donc si la spécialisation de l'une sur $k$ est $\infty$ , la spécialisation de l'autre est $0$ . Pour que $M'_0$ , $M'_1$ , $M'_3$ soient $3$ spécialisations infinies, il faudrait par exemple :

$$\begin{array}{cccc} M'_0 & 1 & \infty & 0 \\ M'_1 & 0 & 1 & \infty \\ M'_3 & \infty & 0 & 1 \end{array}$$

ce qui est impossible à cause de la relation

$$\frac{u_2}{u_0} \times \frac{u_0}{u_1} \times \frac{u_1}{u_2} = 1$$

Une spécialisation $M' = (M'_0 , \dots , M'_n)$ finie ou infinie, sur $k$ , de $(M_0 , \dots , M_n)$ a toujours, d'après le théorème 28, au moins un point $M'_\alpha$ c'est-à-dire une spécialisation finie $M'_\alpha$ de $M_\alpha$ . Ce point s'appelle un <u>représentant</u> de $M'$ . Si $M'$ possède plusieurs représentants, ceux-ci sont sur un rayon ; inversement tout rayon défini par des coordonnées homogènes $x_0 , x_1 , \dots , x_r$ non toutes nulles dans un corps $k$ coupe au moins l'une des variétés $L_\alpha$ en un point $M'_\alpha$ ; la spécialisation $(M_\alpha \xrightarrow[k]{} M'_\alpha)$ peut être étendue à une spécialisation $(M_0 , M_1 , \dots , M_\alpha , M_n) \xrightarrow[k]{} (M'_0 , M'_\alpha , \dots , M'_n)$ dans laquelle $M'_\alpha$ est un représentant de la spécialisation $M'$ . Si $M'_{\alpha_1} , \dots , M'_{\alpha_\ell}$ sont <u>tous</u> les représentants d'une spécialisation de $(M_0 , \dots , M_n)$ sur $k$ , les points $M'_{\alpha_i}$ et $M'_{\alpha_j}$ sont deux points homologues réguliers de la correspondance birationnelle $T_{\alpha_j \alpha_i}$ .

Le point $(M_0 , \dots , M_n)$ s'appelle <u>point générique sur</u> $k$ <u>de l'espace projectif à $n$ dimensions ; tout système complet de représentants</u> $(M'_{\alpha_1} , \dots , M'_{\alpha_\ell})$ <u>d'une spécialisation de</u> $(M_0 , \dots , M_n)$ <u>sur</u> $k$ <u>est un point de l'espace projectif à $n$ dimensions. Les points de l'espace projectif sont en correspondance biunivoque avec les rayons de l'espace affine</u> $S^{n+1}$ .

Soit $V^r_\alpha$ une variété de dimension r décrite sur k dans $L_\alpha$ par un point générique $P_\alpha$ sur k . Considérons les correspondances birationnelles $T_{\beta_i\alpha}$ qui sont birégulières en $P_\alpha$ ; elles transforment $P_\alpha$ en $P_{\beta_i}$ dont le lieu $V^r_{\beta_i}$ est en correspondance birationnelle avec $V_\alpha$ . L'ensemble des variétés $V_\alpha$ , $V_{\beta_i}$ constitue par définition une variété $\mathcal{V}$ de l'espace projectif, définie sur k , dont un système complet de représentants est formé de $V_\alpha$ et $V_{\beta_i}$ . On écrit :

$$\mathcal{V} = (V_\alpha , V_{\beta_1} , \ldots , V_{\beta_h}) .$$

La dimension commune des $V_\alpha$ et des $V_{\beta_i}$ s'appelle la dimension r de $\mathcal{V}$. Les variétés $V_\alpha$ et $V_{\beta_i}$ ne sont pas des cônes puisqu'aucune d'elles ne contient 0 . Le cône unique W de dimension r + 1 défini sur k par la directrice $V_\alpha$ (lemme 2) contient les variétés $V_{\beta_i}$ . Inversement, soit $W^{r+1}$ un cône dans $S^{n+1}$ , défini par le point générique P = (Z) sur un corps de définition k . Ce point définit un rayon de coordonnées homogènes (z) , donc un point $\mathcal{P}$ de l'espace projectif, dont tout représentant $P_\alpha$ vérifie $P = z_\alpha P_\alpha$ . Le point $P_\alpha$ décrit donc sur k une variété $V_\alpha$ de dimension r ou r + 1 ; si sa dimension était r + 1, $V_\alpha$ coïnciderait avec W ; $V_\alpha$ est donc de dimension r , et le cône W contient tous les représentants $V_\alpha$ d'une variété $\mathcal{V}$ de dimension r dans l'espace projectif. Les variétés $\mathcal{V}$ dans l'espace projectif sont donc en correspondance biunivoque avec les cônes W de dimension r + 1 dans l'espace affine $S^{n+1}$ .

Le cas d'une variété dans l'espace projectif n'est qu'un cas particulier de la notion plus générale de variété abstraite, que nous allons présenter brièvement.

## C. Variétés abstraites.

### 1. Définition d'une variété abstraite.

Soient $V_\alpha$ $(1 \leq \alpha \leq h)$ des variétés définies sur un corps k dans h espaces affines quelconques, $M_\alpha$ un point générique de $V_\alpha$ sur k et $M_\beta$ un point générique de $V_\beta$ sur k $(1 \leq \beta \leq h)$ . Nous supposons la relation

$$k(M_\alpha) = k(M_\beta)$$

quels que soient $\alpha$ et $\beta$ . $V_\alpha$ et $V_\beta$ se correspondent par conséquent dans une transformation birationnelle T définie sur k . On dit que ces transformations birationnelles forment un groupe cohérent de transformations birationnelles.

Imaginons de plus sur chaque variété $V_\alpha$ une réunion de sous-variété $\mathcal{F}_\alpha$ (ou bunch of varieties) qui sont normalement algébriques sur $k$, c'est-à-dire définies sur $\bar{k}$ et dont les variétés composantes sont conjuguées les unes des autres sur $k$. Il en est ainsi par exemple du lieu des points multiples de $V_\alpha$. On dira que $\mathcal{F}_\alpha$ constitue une frontière de $V_\alpha$ (normalement algébrique sur $k$) et les points de $V_\alpha$ qui ne sont pas dans $V_\alpha$ constituent l'ensemble $V_\alpha - F_\alpha$. Dans le cas de l'espace projectif on prend simplement pour frontière une variété vide.

Enfin nous supposons la condition suivante :

Condition de régularité. - $P_\alpha$ et $P_\beta$ étant deux points correspondants par $T_{\beta\alpha}$ de $V_\alpha - \mathcal{F}_\alpha$ et $V_\beta - \mathcal{F}_\beta$, ces deux points se correspondent birégulièrement.

Cette condition était bien verifiée pour l'espace projectif. On dit alors que $V_\alpha$ ; $\mathcal{F}_\alpha$ ; $T_{\beta\alpha}$ définissent une variété abstraite $\mathcal{V}$ dont $k$ est un corps de définition, et on écrit :

$$\mathcal{V} = [V_\alpha \; ; \; \mathcal{F}_\alpha \; ; \; T_{\beta\alpha}] .$$

La dimension commune des $V_\alpha$ est la dimension $r$ de $\mathcal{V}$. Outre l'exemple déjà vu d'une variété abstraite de l'espace projectif on peut citer celui d'une variété $V$ quelconque de l'espace affine définie sur $k$ avec une frontière quelconque $\mathcal{F}$ (normalement algébrique sur $k$) et la transformation $T_{11}$ diagonale du produit $V \times V$. C'est ainsi que l'ensemble des points simples d'une variété $V$ peut être considéré dans ce sens comme une variété abstraite.

REMARQUE. - Tout corps contenant $k$ est aussi un corps de définition de $\mathcal{V}$.

## 2. Variété complète.

Soit $(M_1 , M_2 , \dots , M_h)$ l'ensemble des points génériques sur $k$ des variétés $V_\alpha$, correspondants par les transformations birationnelles $T_{\beta\alpha}$. Soit $(M'_1 , \dots , M'_h)$ une spécialisation sur $k$, finie ou non, de $(M_1 , M_2 , \dots , M_h)$. Si, pour un certain $\alpha$, $M'_\alpha$ est fini et non dans $\mathcal{F}_\alpha$, on dit qu'il constitue un représentant de la spécialisation précédente dans $V_\alpha$. L'ensemble $(M'_{\alpha_1} , M'_{\alpha_2} , \dots , M'_{\alpha_\ell})$ de tous les représentants de cette spécialisation constitue le système complet de ses représentants. On dit que la variété abstraite $\mathcal{V}$ est complète si toute spécialisation $(M_1 , \dots , M_h) \xrightarrow[k]{} (M'_1 , \dots , M'_h)$ admet au moins un représentant, c'est-à-dire si le système complet de ses représentants n'est pas vide.

On a vu au paragraphe B que l'espace projectif est complet (théorème 28).

3. Sous-variétés de $\mathcal{V}$.

Soit $(M'_{\alpha 1}, M'_{\alpha 2}, \ldots, M'_{\alpha \ell})$ un système complet de représentants d'une spécialisation de $(M_1, \ldots, M_\ell)$ sur $k$. Supposons que le point $M'_{\alpha i}$ de $V_{\alpha i}$ décrive une sous-variété $V'_{\alpha i}$ de $V_{\alpha i}$, sur un corps $K$ contenant $k$ : il en est de même de tous les points $M'_{\alpha 1}, \ldots, M'_{\alpha \ell}$ qui sont alors des points correspondants birégulièrement par des transformations birationnelles $T'_{\beta \alpha}$, et génériques sur $K$ de variétés $V'_{\alpha 1}, \ldots, V'_{\alpha \ell}$.

En posant $\mathcal{F}'_{\alpha i} = V'_{\alpha i} \cap \mathcal{F}_{\alpha i}$ pour chaque valeur de $i$, il existe une variété abstraite définie sur $K$ par

$$\mathcal{V}' = [V'_{\alpha i} ; \mathcal{F}'_{\alpha i} ; T'_{\alpha j \alpha i}]$$

([7], théorème 2, p. 170, pour le détail de la démonstration).

Si $\mathcal{V}$ est une variété complète, $\mathcal{V}'$ est également une variété complète, car si $\mathcal{V}'$ n'était pas complète, une spécialisation de $(M'_{\alpha 1}, \ldots, M'_{\alpha \ell})$ sur $K$ donc sur $k$, n'aurait aucun représentant ; c'est-à-dire qu'une spécialisation de $(M_1, \ldots, M_h)$ sur $k$ n'aurait aucun représentant ; cela serait contraire à l'hypothèse que $\mathcal{V}$ est complète.

La variété $\mathcal{V}'$ s'appelle une sous-variété de $\mathcal{V}$ ; on écrit $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$. Le théorème 28 entraîne alors le

COROLLAIRE : Toute variété abstraite de l'espace projectif est complète.
Cette propriété justifie la préférence qu'on accorde aux modèles projectifs par rapport aux modèles affines en géométrie algébrique classique.

La dimension de $\mathcal{V}'$ est $r' \leq r$ ; si $r' = r$, $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$.

Si $r' = 0$, on obtient un point abstrait de $\mathcal{V}'$.

Il est facile de construire une sous-variété $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$, à partir d'une sous-variété $V'_\alpha$ de $V_\alpha$ non située dans $\mathcal{F}_\alpha$ ; il suffit de prendre les transformées de $V'_\alpha$ par les transformations $T_{\alpha\beta}$ birégulières le long de $V'_\alpha$ ; la variété obtenue est définie sur un corps de définition $K$ commun à $V_\alpha$ et $V'_\alpha$ (voir théorème 3 dans [7], p. 171).

La plupart des définitions et résultats concernant les variétés s'étendent aux variétés abstraites, à l'exception de ceux qui font intervenir les idéaux et les systèmes d'équations [3] ; il suffit pour les obtenir de raisonner sur un représentant $V_\alpha$ de $\mathcal{V}$ et de vérifier que les propriétés utilisées pour ce représentant $V_\alpha$ restent aussi valables pour les autres représentants, c'est-à-dire sont des propriétés invariantes par des transformations birationnelles birégulières. Il en est ainsi par exemple de la notion de point simple ou multiple $M'_\alpha$ d'une variété $V_\alpha$, d'après le corollaire du théorème 25 vu dans cet exposé au paragraphe A. On peut alors parler d'un point abstrait simple ou multiple sur une variété abstraite $\mathcal{V}$, par exemple d'un point simple ou multiple d'une variété projective.

Il est possible également de définir le produit de deux variétés abstraites, la projection d'une variété abstraite, et la correspondance birationnelle entre deux variétés abstraites ( [7] , p. 180 à 189).

L'application la plus importante des variétés abstraites est celle qui concerne les variétés d'un espace projectif. Quand on veut les utiliser dans d'autres cas la condition de régularité imposée aux transformations birationnelles est souvent difficile à vérifier. (Cf. une observation de O. ZARISKI à propos d'une conférence de B.L. VAN DER WAERDEN [6] ) .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ENRIQUES (F.) et CHISINI (O.). - Courbes et fonctions algébriques d'une variable. - Paris, Gauthier-Villars, 1926.

[2] GODEAUX (Lucien). - Questions non résolues de géométrie algébrique. - Paris, Hermann, 1933 (Act. scient. et ind., 77 ; Exposés sur l'analyse mathématique ..., 1) .

[3] GODEAUX (Lucien). - Les transformations birationnelles de l'espace. - Paris, Gauthier-Villars, 1934 (Mémorial des Sciences mathématiques, 67).

[4] NÖTHER (M.). - Über die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve, Math. Annalen, t. 9, 1876, p. 166-182.

[5] NÖTHER (M.). - Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen, Math. Annalen, t. 23, 1884, p. 311-358.

[6] VAN DER WAERDEN (B.L.). - Les valuations de géométrie algébrique, Algèbre et théorie des nombres, Paris 1949. - Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1950 (Colloques internationaux du C.N.R.S., 24); p. 117-121.

[7] WEIL (André). - Foundations of algebraic geometry. - New-York, American mathamatical Society, 1946 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 29).

---

(3) Pour les variétés de l'espace projectif, les équations homogènes jouent le rôle des équations d'une variété dans l'espace affine. Il en est de même pour l'idéal homogène vis-à-vis de l'idéal ordinaire.

[8] ZARISKI (Oscar). - Normal varieties and birational correspondences, Bull. Amer. math. Soc., t. 48, 1942, p. 402-413.

[9] ZARISKI (Oscar). - Foundations of a general theory of birational correspondences, Trans. Amer. math. Soc., t. 53, 1943, p. 490-542.