Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Léonce Lesieur

Variétés algébriques, IV : produit de deux variétés, projections, variétés linéaires et points simples

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 2-3 (1948-1950), exp. nº 4, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1948-1950__2-3__A4_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1948-1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES, IV. : PRODUIT DE DEUX VARIÉTÉS, PROJECTIONS, VARIÉTÉS LINÉAIRES ET POINTS SIMPLES

par Léonce LESIEUR

Cet exposé fait suite aux trois conférences de P. DUBREIL, que nous mentionnerons par I, II ou III, suivi du numéro de théorème ou de la page correspondante.

La liaison entre variétés (S) et variétés (L) a été expliquée et éclairée dans les trois conférences précédentes. Une variété (L), définie sur un corps k, au sens de A. WEIL, est une variété S qui reste irréductible dans toute extension du corps de définition ; c'est donc une variété absolument irréductible. Nous supposons dans la suite (sauf indication contraire) qu'il s'agit de variétés absolument irréductibles.

Nous allons définir deux nouvelles opérations sur les variétés : le produit et la projection, puis étudier du point de vue de la géométrie algébrique, les variétés linéaires de l'espace affine, enfin nous appliquerons certains des résultats obtenus à la définition d'un point simple d'une variété et à la démonstration de ses premières propriétés.

1. Produit de deux variétés.

Soit V^r une variété définie sur un corps k, dans un espace affine S^n. Soit W^s une deuxième variété définie sur le même [1] corps k, dans un espace affine S^m (qui peut d'ailleurs être confondu avec S^n).

$P = (x_1 , \dots , x_n)$ étant un point de S^n, $Q = (y_1 , \dots , y_m)$ un point de S^m, le système de quantités ordonnées

$$(P , Q) = (x_1 , \dots , x_n , y_1 , \dots , y_m)$$

---

[1] Si V est définie sur un corps k' autre que k, on peut toujours prendre un corps de définition commun à V et W, par exemple le corps composé de k et k'.

définit un point R ayant $n + m$ coordonnées, donc situé dans l'espace S^{n+m}. On l'appelle le produit de P par Q

$$R = P \times Q = (P , Q) .$$

Ce produit n'est pas commutatif en général ; il le devient si P et Q sont deux points confondus d'un même espace.

Lorsque P est un pseudo-point, c'est-à-dire quand l'un au moins des x coïncide avec le symbole ∞, le produit $P \times Q$ est aussi un pseudo-point dans S^{n+m}.

Par <u>équations</u> d'une variété V^r définie sur un corps k on entend les équations

$$(1) \qquad F_{\alpha}(X) = 0$$

dans lesquelles les polynômes $F_{\alpha}(X)$ constituent une base de l'idéal défini par le point générique $P = (x)$ de V sur k. Cet idéal est formé par les polynômes qui s'annulent au point (x). (Cf. I, p. 15). Considérons de même les équations

$$(2) \qquad G_{\beta}(Y) = 0$$

de la variété W^s, sur k, dans S^m. L'ensemble d'équations :

$$(3) \qquad F_{\alpha}(X) = 0 , \quad G_{\beta}(Y) = 0 ,$$

définit dans S^{n+m} une variété (S) au sens expliqué dans III.

Il est tout à fait remarquable que cette variété soit absolument irréductible, c'est-à-dire qu'elle soit une variété L au sens défini dans II, donc une variété. Cela résulte du théorème suivant ;

THÉORÈME 18. - <u>Il existe une variété de dimension</u> $r + s$ <u>définie sur</u> k <u>dans</u> S^{n+m} <u>par les équations</u> (3).

On l'appelle la variété-produit de V par W et on la note :

$$Z = V \times W .$$

La démonstration repose surtout sur le

LEMME 11([3], théorème 4, p. 16). - (x) <u>et</u> (y) <u>étant deux systèmes de quantités telles que les extensions</u> $k(x)$ <u>et</u> $k(y)$ <u>soient linéairement disjointes, une base de l'idéal défini par</u> (x) <u>dans</u> $k(X)$ <u>et une base de l'idéal défini par</u> (y) <u>dans</u> $k[Y]$, <u>constituent conjointement une base de</u>

<u>l'idéal défini par</u> (x , y) <u>sur</u> k .

Soit $\Phi(X, Y)$ un polynôme tel que $\Phi(x, y) = 0$. Posons $K = k(y)$ et considérons $\Phi(X, y)$ comme un polynôme $\in K[X]$. Prenons un système maximal de coefficients linéairement indépendants sur k , soient $A_\lambda(y)$, où $A_\lambda(Y) \in k[Y]$. On obtient alors

$$\Phi(X , y) = \sum_\lambda A_\lambda(y)\, P_\lambda(X) \quad \text{où} \quad P_\lambda(X) \in k[X] .$$

Puisque $\Phi(x , y) = 0$, le polynôme $\Phi(X , y)$ est dans l'idéal défini par x sur $K = k(y)$. Comme $k(x)$ et K sont linéairement disjoints, cet idéal a une base dans $k[X]$ (II, théorème 6), et d'après le lemme 7 (dans II) , tous les $P_\lambda(X)$ sont dans l'idéal défini par x sur k . Posons :

$$\psi(X , Y) = \Phi(X , Y) - \sum_\lambda A_\lambda(Y)\, P_\lambda(X)$$

On a :

$$\psi(X , y) = 0 .$$

Donc en écrivant $\psi(X , Y)$ comme un polynôme en X à coefficients dans $k[Y]$, ces coefficients sont tous dans l'idéal défini par (y) sur k . Par conséquent

$$\psi(X , Y) = \sum_\mu B_\mu(X)\, Q_\mu(Y) .$$

et

$$\Phi(X , Y) = \sum_\lambda A_\lambda(Y)\, P_\lambda(X) + \sum_\mu B_\mu(X)\, Q_\mu(Y)$$

En exprimant $P_\lambda(X)$ en fonction de la base $F_\alpha(X)$ de l'idéal défini par (x) sur k , et $Q_\mu(Y)$ en fonction de la base $G_\beta(Y)$ de l'idéal défini par (y) sur k , le lemme se trouve établi.

DÉMONSTRATION du théorème 18. - Soit P un point générique de V sur k : soit Q un point générique de W <u>sur</u> $k(P)$. Ce dernier corps est un corps de définition de W , Q est un point générique de W sur k , et les corps $k(P)$ et $k(Q)$ sont indépendants (et même linéairement disjoints) (théorème 8, dans II). Les mêmes résultats sont encore valables en remplaçant k par $\bar{k}$; le lemme 11 appliqué aux corps $\bar{k}(P)$ et $\bar{k}(Q)$ montre qu'une base de l'idéal défini par (x , y) sur $\bar{k}$ est constituée par une base de l'idéal défini par (x) sur $\bar{k}$ prise avec une base de l'idéal défini par (y) sur $\bar{k}$. Or ces deux bases sont précisément $F_\alpha(X)$ et $G_\beta(Y)$; l'idéal défini par (x , y) dans k a donc une base dans $k[X , Y]$. Cela montre que $k(x , y)$ est une extension régulière de k , et que les équations (3) sont celles d'une variété Z .

Quant à la dimension de Z , c'est

$$\dim_k(P , Q) = \dim_{k(P)}Q + \dim_k P = s + r \quad .$$

EXEMPLES. - Le produit de deux courbes planes Γ et Γ' (confondues ou non) est une surface dans S^4 .

Le produit de deux variétés réduites à des points P et Q dans S^n et S^m est la variété réduite au point $P \times Q$ de S^{n+m} .

Le produit des variétés S^n et S^m elles-mêmes est l'espace ambiant $S^{n+m} = S^n \times S^m$.

La démonstration du théorème 18 donne comme point générique de $V \times W$, un point de la forme $P \times Q$ où P et Q sont des points génériques indépendants sur k de V et W respectivement. Lorsque P' et Q' sont deux points quelconques de V et W , le point (P' , Q') est un point de $V \times W$, puisque ses coordonnées vérifient les équations (1) et (2) , donc (3) . Inversement si un point dans S^{n+m} a des coordonnées vérifiant (3) , on peut l'écrire $P' \times Q' = (P' , Q')$ où les points P' et Q' ont des coordonnées solutions de (1) et (2) respectivement, c'est-à-dire sont des points de V et W respectivement. On voit ainsi que l'ensemble des points de $V \times W$ est le produit de l'ensemble des points de V par l'ensemble des points de W . De plus si un point (P , Q) est générique de $V \times W$ sur k , P et Q sont des points de V et W respectivement, que nous allons montrer génériques et indépendants sur k . On a en effet

$$r + s = \dim_k(P , Q) = \dim_k P + \dim_{k(P)}Q$$

$\dim_k P \leq r$; $\dim_{k(P)}Q \leq \dim_k Q \leq s$ (corollaire du théorème 16, dans III) .

On en déduit

$$\dim_k P = r \quad \dim_{k(P)}Q = s$$

c'est-à-dire, d'après le même corollaire, que P et Q sont génériques sur leurs variétés. Ils sont indépendants puisque $\dim_{k(P)}Q = \dim_k Q = s$.

Rassemblons ces résultats :

THÉORÈME 19. - Pour qu'un point (P , Q) soit point générique de $V \times W$ sur k , il faut et il suffit que P et Q soient des points génériques indépendants sur k de V et W (respectivement). De plus, l'ensemble des points de $V \times W$ est le produit de l'ensemble des points de V par l'ensemble des points de W.

On établit sans peine la définition du produit pour plus de deux facteurs, par induction sur le nombre des facteurs. L'ensemble des points de $(U \times V) \times W$ étant le produit de l'ensemble de points

$$\{U\} \times \{V\} \times \{W\}$$

l'opération du produit des variétés est une opération associative.

REMARQUE. - Lorsque P et Q sont des points génériques de V et W respectivement, le point (P , Q) n'est pas nécessairement générique sur $V \times W$. Par exemple le produit $\Gamma \times \Gamma$ d'une courbe par elle-même est une surface S ; P étant un point générique de Γ sur k le point $P \times P$ décrit seulement une courbe Δ qu'on appelle la courbe diagonale de S. Le théorème 19 n'est pas en défaut, car il est clair que les points P et Q ne sont pas indépendants sur k.

On peut aussi se demander si le "produit de deux variétés relativement irréductibles sur k", c'est-à-dire définies par des idéaux premiers sur k, n'est pas une variété relativement irréductible sur k. En d'autres termes, si les idéaux $(F_\alpha(X))$ et $(G_\beta(Y))$ sont premiers dans $k[X]$ et $k[Y]$ respectivement, l'idéal

$$(F_\alpha(X) \, , \, G_\beta(Y))$$

est-il un idéal premier dans $k[X , Y]$?

La réponse est négative, comme le montre l'exemple suivant où l'on prend :

k = corps des rationnels
$F = X^2 + 1 \in k[X]$; $G = Y^2 + 1 \in k[Y]$
$F - G = X^2 - Y^2 \in (F , G)$ dans $k[X , Y]$.

Mais $X - Y$ et $X + Y \notin (F , G)$ ce qui montre que (F , G) n'est pas premier dans $k[X , Y]$.

On voit une fois de plus le rôle joué par la notion de variété absolument irréductible, ou ce qui revient au même d'extension régulière. Ce rôle est essentiel pour la définition du produit de deux variétés. Or le produit des variétés est considérablement utilisé en géométrie algébrique, dans la théorie des correspondances (2) algébriques entre deux variétés V et W définies et étudiées sur le produit $V \times W$, dans la théorie des courbes (3) Γ où certaines propriétés de la surface-produit $\Gamma' \times \Gamma'$ et de sa courbe diagonale Δ permettent d'obtenir des résultats sur Γ elle-même, dans la théorie des multiplicités d'intersection. ([3] , chap. V et VI).

2. Projection d'une variété.

Les notations étant celles du paragraphe 1, soient U une sous-variété du produit $V \times W$, k un corps de définition commun pour U, V et W. Soit M un point générique de U sur k. D'après le théorème 19, on peut l'écrire

$$M = (P , Q)$$

où P est un point de V et Q un point de W.

Lorsqu'un corps tel que $k(M) = k(P , Q)$, est une extension régulière de k, le théorème 1 (dans I) permet d'en déduire qu'un sous-corps, tel que $k(P)$, constitue aussi une extension régulière de k. Il en résulte que P décrit un lieu U' sur k, situé sur V, et qu'on appelle la projection de U dans le premier facteur V du produit $V \times W$. D'après cette définition la projection U' de U dans le 1er facteur ne dépend pas du produit $V \times W$ sur lequel on prend U ; elle est la même si on considère U comme une sous-variété dans $S^n \times S^m$ et si on effectue la projection de U dans le 1er facteur S^n.

Il faut bien distinguer le facteur dans lequel on projette, cette distinction devenant impérative si les deux facteurs ont le même nom.

La projection d'une variété réduite au point $P \times Q$ est la variété réduite au point P. La variété $S^{n+m} = S^n \times S^m$ a pour projection la variété S^n.

Comparons les points de U et de U'. Soit (P , Q) un point générique de U sur k ; on a vu que P est un point générique de U' sur k. Soit $(\bar{P} , \bar{Q})$ un point quelconque de U ; c'est donc une spécialisation de (P , Q) sur k ; en particulier $\bar{P}$, qui est la projection de $(\bar{P} , \bar{Q})$ dans S^n, est une spécialisation de P sur Q, donc un point de U'. Ainsi, les points de U se projettent suivant des points de U'. La réciproque n'est

---

(2) Théorie due à SEVERI.

(3) Cf. A. WEIL [4] .

pas vraie : U étant le lieu du point x, $y = \frac{1}{x}$ dans $S^1 \times S^1 = S^2$ sa projection U' dans S^1 est le lieu du point x, donc S^1 lui-même ; or le point $x = 0$ de U' n'est la projection d'aucun point de U . Cependant, la réciproque est vraie pour le point générique : soit P' un point générique de U', donc une spécialisation générique de P sur k . D'après le lemme 3 (dans I) les corps $k(P)$ et $k(P')$ sont isomorphes sur k , dans un isomorphisme σ appliquant P sur P' . Il est facile d'en déduire un isomorphisme σ' prolongeant σ, entre $k(P, Q)$ et une extension $k(P', Q')$ de $k(P')$ ([3], chap. I, paragraphe 3, prop. 9). Le point (P', Q') est alors un point générique de U sur k , qui se projette suivant le point générique P' donné dans U' .

Si l'on pose $P = (x)$, $Q = (y)$, l'idéal $\mathfrak{p}$ définissant U sur k est l'idéal déterminé par (x, y) sur k . L'idéal définissant U' sur k est l'idéal déterminé par (x) sur k ; c'est $\mathfrak{p} \cap k[X]$.

Remarquons en outre que la dimension r' de U' est celle de P sur k . La dimension r de U est la dimension de (P, Q) sur k . On a évidemment :

$$r \leq r'$$

Rassemblons ces résultats :

THÉORÈME 20. - <u>La projection</u> U' <u>d'une variété</u> U^r <u>a une dimension</u> $r' \leq r$. <u>Les points génériques se correspondent, et tout point de</u> U <u>se projette suivant un point de</u> U' .

Au sujet de la définition par idéaux on pouvait remarquer que $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap k[X]$ est évidemment un idéal premier dans $k[X]$ puisque $\mathfrak{p}$ est premier dans $k[X, Y]$. Mais on a ici une propriété supplémentaire : le fait pour $\mathfrak{p}$ d'être absolument premier (4) dans $k[X, Y]$ entraîne que $\mathfrak{p}'$ est absolument premier dans $k[X]$.

Nous allons faire intervenir maintenant les projections de U dans les deux facteurs du produit $V \times W$ qui la contient, soit U' dans V et U" dans W . On démontre aisément :

$$U \subseteq U' \times U'' \quad .$$

---

(4) C'est-à-dire de rester premier dans toute extension du corps k obtenue par l'adjonction d'un nombre fini de quantités.

En effet, le point générique de U sur k étant (P , Q) le point P est point générique de U' sur k et le point Q point générique de U'' sur k. D'après le théorème 19, le point (P , Q) est dans le produit $U' \times U''$, mais il n'en est le point générique que si les corps $k(P)$ et $k(Q')$ sont indépendants. Il en est toujours ainsi dans un cas particulier : celui où l'une des variétés U' ou U'' se réduit à un point. Si Q se réduit à un point, on a en effet $k(Q) = k$ et $k(P)$ et $k(Q)$ sont bien indépendants. D'où :

COROLLAIRE. - U _étant une sous-variété du produit_ $V \times W$, U' _et_ U'' _ses projections dans_ V _et_ W, _on a toujours_

$$U \subseteq U' \times U''$$

Si l'une des variétés U' _ou_ U'' _se réduit à un point il y a égalité._

EXEMPLE. - Prenons dans $S^2 \times S^1 = S^3$ la variété définie sur le corps k des nombres rationnels par l'équation (irréductible sur $\bar{k}$)

$$XY + YZ + ZX = 0 \quad .$$

C'est un cône qui se projette dans S^2 suivant le lieu du point (x , y) qui est S^2 lui-même, dans S^1 suivant le lieu du point (Z) qui est S^1. On a donc

$$U' \times U'' = S^3 \quad \text{et} \quad U \subset U' \times U'' \quad \text{au sens strict.}$$

De même si on prend l'hyperbole (située sur U) lieu du point (x , y , z) tel que :

$$x = 1 \qquad yz + y + z = 0$$

elle se projette dans S^2 suivant la droite lieu du point $(1 , y)$ et dans S^1 suivant la droite S^1 elle-même lieu du point z. Le produit de ces deux droites est le plan $(1 , y , z)$ ou y et z sont indépendants tandis que l'hyperbole est seulement située dans ce plan.

Par contre l'hyperbole H lieu du point (x , y , z) tel que $xy + x + y = 0$, $z = 1$ se projette dans S^2 suivant l'hyperbole H' définie par $xy + x + y = 0$ et dans S^1 suivant le point Q défini par $z = 1$. On a cette fois :

$$H = H' \times Q \; .$$

NOTE. - _Sur l'extension d'une spécialisation._

Nous avons vu que tout point d'une variété U située dans un espace produit

$S^n \times S^m$ se projette suivant un point de la projection U' de U dans S^n, mais que la réciproque n'est pas vraie ; tout point de U' n'est pas la projection d'un point de U. Nous allons montrer que la réciproque devient exacte si l'on introduit les pseudo-points de U (cf. I).

Si la variété U se projette dans S^n suivant U', tout point de U' est la projection d'un point ou pseudo-point de U.

Soit $(P, Q) = (x, y)$ un point générique de U sur k ; $P = (x)$ est donc un point générique de U' sur k. Soit $P' = (x')$ un point de U' ; c'est donc une spécialisation finie de (x) sur k. Les données sont donc

$$(x, y) \quad \text{et} \quad x \xrightarrow[k]{} x'$$

Or le problème d'extension d'une spécialisation résolu de façon très élémentaire dans [3] (page 31) donne précisément le résultat suivant :

(x) et (y) étant deux systèmes de quantités généralisées et k un corps, toute spécialisation donnée $x \xrightarrow[k]{} x'$ peut être étendue d'une façon au moins à une spécialisation $(x, y) \xrightarrow[k]{} (x', y')$. En désignant par (P', Q') le point ou pseudo-point (x', y') on obtient un point ou pseudo-point de U qui se projette suivant le point P' donne dans U'.

3. Variétés linéaires.

Nous allons voir maintenant, du point de vue de la géométrie algébrique, une famille de variétés particulières dans S^n qui est invariante par rapport aux opérations d'intersection, de produit et de projection.

k étant un corps commutatif quelconque nous supposons connues les théories des déterminants, des équations linéaires et des formes linéaires à n variables et à coefficients dans k (5).

Points et vecteurs de S^n, à coordonnées dans k, font alors de celui-ci un espace affine ordinaire sur k.

Donnons-nous $n-r$ quantités, $U_{r+1}, \dots, U_n$ supposées variables indépendantes sur k. Nous savons que l'extension $k(u_{r+1}, \dots, u_n)$ est régulière sur k. (voir I, p. 9). Le point $y = (0, 0, \dots, 0, u_{r+1}, \dots, u_n)$ a donc un lieu sur k défini par les équations $X_1 = 0, \dots, X_r = 0$.

---

(5) Voir par exemple : A. LICHNEROWICZ [2].

Or les X_i $(i = 1 , \ldots , r)$ sont des formes indépendantes linéairement sur k (et aussi sur tout autre corps). Nous avons donc deux aspects du lieu L^{n-r} obtenu :

1°) C'est le lieu du point Q tel que

$$\overrightarrow{OQ} = u_{r+1} \overrightarrow{OA}_{r+1} + \ldots + u_n \overrightarrow{OA}_n$$

le point A_j étant le point dont la j-ième coordonnée est seule non nulle et vaut 1 ; les u_j $(j = r+1 , \ldots , n)$ étant des variables indépendantes sur k .

2°) Ce lieu est encore défini par les équations <u>linéaires</u>

$$X_1 = 0 , \ldots , X_r = 0$$

les X_i $(i = 1 , \ldots , r)$ étant des formes linéaires indépendantes.

Nous allons ramener à ce cas particulier le problème suivant plus général.

a. Les points $P_0 , P_{r+1} , \ldots , P_n$ étant des points à coordonnées dans k et les u_j $(j = r+1 , \ldots , n)$ des variables indépendantes sur k , le point P défini par

$$\overrightarrow{P_0 P} = u_r \overrightarrow{P_0 P_{r+1}} + \ldots + u_n \overrightarrow{P_0 P_n} \tag{4}$$

décrit-il une variété algébrique définie sur k ?

b. Les formes $F_1(X) , \ldots , F_r(X)$ étant à coefficient dans k , et (x^0) étant un point P à coordonnées dans k , les équations linéaires

$$F_i(X - x^0) = 0 \qquad i = 1 , 2 , \ldots , r , \tag{5}$$

sont-elles les équations d'une variété algebrique définie sur k ?

On remarque d'abord qu'il suffit de se borner pour l'étude de ces problèmes au cas où les vecteurs $\overrightarrow{P_0 P_{r+1}} , \ldots , \overrightarrow{P_0 P_n}$ sont <u>indépendants sur</u> k , et au cas où les formes linéaires $F_i(X)$ sont <u>linéairement indépendantes sur</u> k . De plus, si des équations linéaires quelconques à coefficients dans k admettent une solution (dans un sur-corps de k) elles admettent aussi une solution x^0 dans k et peuvent donc se mettre sous la forme (5).

Le problème posé peut se ramener au problème particulier au moyen du lemme suivant sur les <u>transformations linéaires</u>.

LEMME 12. - <u>Soit</u> $Y_i = \sum c_{ij} X_j - d_i = T(X)$ <u>une transformation linéaire à coefficients dans</u> k <u>et à déterminant non nul. Si le point</u> (x) <u>décrit une variété</u> V^r <u>sur</u> k , <u>le point</u> $(y) = T(x)$ <u>décrit une variété</u> W^r <u>sur</u> k . <u>Un système d'équations pour</u> W <u>s'obtient en remplaçant dans les équations de</u> V , <u>les</u> X <u>par les expressions</u> $T^{-1}(X)$. (Cf. [3] , prop. 13, page 90).

En effet, les corps $k(x)$ et $k(y)$ étant les mêmes $k(y)$ est une extension régulière de k , au même titre que $k(x)$, et leurs dimensions sur k sont les mêmes. Soient $F_\alpha(X) = 0$ un système d'equations pour V sur k ; les $F_\alpha(X)$ constituent donc une base de l'idéal $\mathfrak{p}$ défini par (x) sur k . Un polynôme $G(X)$ appartient à l'idéal $\mathfrak{p}'$ défini par (y) sur k si et seulement si on a $G(y) = 0$, donc $G(c_{ij} x_j - d_i) = 0$, et par suite $G(c_{ij} X_j - d_i) \in \mathfrak{p}$. En remplaçant les X par $T^{-1}(X)$ on voit que $G(X) \in (F_\alpha(T^{-1}(X)))$. D'où $\mathfrak{p}' \subset (F_\alpha(T^{-1}(X)))$. L'inclusion inverse, qui est immédiate, démontre le lemme.

THÉORÈME 21. - <u>Le lieu du point</u> P <u>défini dans</u> (4) <u>est une variété</u> L <u>à</u> $n-r$ <u>dimensions, définie sur</u> k , <u>dont un système d'équations peut se mettre sous le forme</u> (5). <u>Un système d'équations linéaires de la forme</u> (5) <u>constitue les équations d'une variété</u> L <u>à</u> $n-r$ <u>dimensions, définie sur</u> k <u>comme lieu d'un point</u> P <u>vérifiant</u> (4).

Démontrons d'abord la deuxième partie. On peut compléter les r formes linéaires $F_i(X)$ indépendantes sur k par $n-r$ autres formes $F_{r+1}(X)$, ... , $F_n(X)$ pour obtenir un système de formes linéairement indépendantes sur k . Effectuons la transformation linéaire

$$Y_i = F_i(X - x^0) \quad i = 1 , 2 , \dots , r , \dots , n$$

à laquelle nous appliquons le lemme en considérant le lieu du point $(0 , 0 , \dots , 0 , u_{r+1} , \dots , u_n) = (y)$ à coordonnées u indépendantes sur k , défini par les équations $Y_1 = 0 , \dots , Y_r = 0$. Le point transformé de (y) par T^{-1} est un point (x) qui décrit une variété L^{n-r} d'équations :

$$F_i(X - x^0) = 0$$

Comme on a :

$$(y) = u_{r+1} \overrightarrow{OA}_{r+1} + \dots + u_n \overrightarrow{OA}_n$$

la transformation linéaire donne pour lieu de $P = (x)$, en prenant les transformés $P_{r+1} , \dots , P_n$ de $A_{r+1} , \dots , A_n$ par T^{-1}

$$\overrightarrow{P_0 P} = u_{r+1} \overrightarrow{P_0 P_{r+1}} + \dots + u_n \overrightarrow{P_0 P_n}$$

les vecteurs $\overrightarrow{P_0 P_{r+1}}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}$ étant linéairement indépendants.

Partons maintenant du lieu de P défini par la relation (4).

On peut compléter les vecteurs $\overrightarrow{P_0 P_{r+1}}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}$ qui sont indépendants sur k par r vecteurs $\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_r}$ formant avec les précédents un système de n vecteurs indépendants. La transformation $P \longleftrightarrow Q$ définie par :

$$\overrightarrow{P_0 P} = X_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + X_n \overrightarrow{P_0 P_n} \text{ --- } \overrightarrow{OQ} = X_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + X_n \overrightarrow{OA_n}$$

est une transformation linéaire qui fait passer du point P vérifiant (4) au point Q tel que $\overrightarrow{OQ} = u_{r+1} \overrightarrow{OA_{r+1}} + \dots + u_n \overrightarrow{OA_n}$.

Comme ce point Q décrit une variété d'équations $X_1 = \dots = X_r = 0$ le lemme 12 montre que le point P décrit une variété L^{n-r} dont les équations peuvent se mettre sous la forme $F_i(X - x^0) = 0$, c'est-à-dire sous la forme (5). Le théorème est démontré.

Ainsi, des équations linéaires étant données, ou bien elles n'ont aucune solution, ou bien elles peuvent se mettre sous la forme (5) et, si $n - r$ est le nombre des formes linéairement indépendantes parmi les $F_i(X)$, elles définissent une variété L^{n-r} sur k. Nous dirons que la variété L^{n-r} est une variété linéaire, d'après la définition suivante : on appelle <u>variété linéaire</u> une variété dont les équations peuvent se mettre sous la forme d'équations linéaires. Cette définition est justifiée par le

LEMME 13. - <u>Si une variété</u> L <u>possède des équations linéaires sur un de ses corps de définition; par exemple</u> k_0, <u>elle a aussi des équations linéaires sur toute autre corps</u> k <u>de définition</u> (Cf. [3], th. 10, p. 92).

Soit $\Phi_\mu(X)$ un système d'équations linéaires pour L sur k_0 ; soit k' un corps contenant k et k_0. D'après le théorème 9 (dans II), les $\Phi_\mu(X)$ constituent une base de l'idéal $\mathfrak{p}'$ définissant L sur k' ; soient ω_λ un système maximal d'éléments linéairement indépendants sur k parmi les coefficients des $\Phi_\mu(X)$. On obtient alors

$$\Phi_\mu(X) = \sum_\lambda \omega_\lambda F_{\mu\lambda}(X)$$

où les $F_{\mu\lambda}(X)$ sont des polynômes linéaires de $k[X]$. Or l'idéal définissant L sur k' admet une base dans $k[X]$ puisque $k \subset k'$ est un corps de définition pour L . On en déduit d'après le lemme 7 (dans II) que les $F_{\mu\lambda}(X)$ sont dans $\mathfrak{p}'$. Comme les $\Phi_\mu(X)$ sont une base de $\mathfrak{p}'$, les $F_{\mu\lambda}(X)$ constituent aussi une base de $\mathfrak{p}'$ donc de l'idéal $\mathfrak{p}'$ définissant L sur k .

Le lemme 13 permet d'affirmer que L possède des équations linéaires sur k dès qu'elle a des équations linéaires sur k_0, mais il n'est pas impossible qu'une autre base de l'idéal $\mathfrak{p}$ définissant L sur k ne soit pas constituée par des équations linéaires. Par exemple, dans S^3 la variété linéaire $X = 0$, $Y = 0$, sur le corps des rationnels par exemple, est aussi définie par la base

$$F_1 = X^2 + Y \ , \quad F_2 = X^2 - Y \ , \quad F_3 = X^2 + X + Y$$

car $(F_1 , F_2 , F_3) \subset (X , Y)$ et $X = F_3 - F_1$, $Y = \frac{1}{2}(F_1 - F_2)$ d'où

$$(X , Y) \subset (F_1 , F_2 , F_3)$$

Par suite

$$(X , Y) = (X^2 + Y \ , \ X^2 - Y \ , \ X^2 + X + Y) \ .$$

EXEMPLES. - Un point est une variété linéaire à 0 dimension ; un hyperplan est une variété linéaire à $n - 1$ dimensions. L'espace ambiant est une variété linéaire à n dimensions.

REMARQUE. - Nous avons vu qu'une variété linéaire (non vide), définie sur k , possède toujours au moins un point à coordonnées dans k .

Cette propriété n'est pas vraie pour toutes les autres variétés puisque le cercle $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ défini sur le corps k des nombres réels ne possède aucun point dans k .

Opérations sur les variétés linéaires. - Les variétés linéaires étant maintenant connues, on peut leur appliquer les notions déjà définies.

L'intersection de 2 variétés linéaires L^r et M^s est une variété linéaire de dimension au moins égale à $r + s - n$.

Prenons le mode de définition, sur un corps commun k , par des équations linéaires telles que (5). On obtient pour l'intersection une variété définie par des équations linéaires en nombre $d = 2n(r+s)$. Cette intersection, si elle n'est pas vide, est donc une variété linéaire de dimension au plus égale à $n - d$, c'est-à-dire $r + s - n$.

Lorsque la dimension de l'intersection est exactement $r + s - n$ supposé $\geqslant 0$, on dit que les variétés linéaires L et M sont transversales. Dans S^4 deux plans ou S^2 qui ont un seul point commun sont transversaux ; il en est de même pour une droite et un hyperplan S^3 . La notion de transversalité dépend de l'espace ambiant considéré puisque deux plans dans S^3 sont transversaux s'ils ont une droite commune. Deux variétés linéaires sont <u>parallèles</u> si elles se déduisent l'une de l'autre par <u>translation</u>, ou transformation linéaire particulière

$$Y_i = X_i + x_i^0 .$$

Elles ont alors même dimension (lemme 12). Par un point donné passe une variété linéaire et une seule parallèle à une variété linéaire donnée. Si deux variétés linéaires L et M sont transversales et si L' est parallèle à L , M' parallèle à M , alors L' et M' sont egalement transversales.

<u>Produit de deux variétés linéaires.</u> - Soit L^{n-r} une variété linéaire définie sur k dans S^n par r équations $F_\alpha(X - x^0) = 0$ linéaires, les formes $F_\alpha(X)$ étant linéairement indépendantes. Soit M^{m-s} une variété linéaire définie sur k dans S^m par s équations linéaires $G_\beta(Y - Y^0) = 0$, les formes $G_\beta(Y)$ étant linéairement indépendantes. D'après le théorème 18 la variété produit est définie dans $S^n \times S^m$ par les équations

$$F_\alpha(X - x^0) = 0 , \quad G_\beta(Y - y^0) = 0$$

Comme les formes $F_\alpha(X)$ et $G_\beta(Y)$ constituent $r + s$ formes linéaires indépendantes dans $k[X , Y]$, la variété $L^{n-r} M^{m-s}$ est une variété linéaire à $n+m-(r + s)$ dimensions. <u>Le produit de deux variétés linéaires est une variété linéaire.</u>

<u>Projection d'une variété linéaire.</u> - Soit L^{n-r} une variété linéaire, définie sur k , dans un espace $S^n \times S^m$. Son point générique P sur k vérifie des relations de la forme (4). Il se met sous la forme

$$P = (P' , Q')$$

et le projection L' de L dans S^n est le lieu du point P' : Or la relation (4) donne en considérant les projections P'_0 , P'_{r+1} , ... P'_n dans S^n , des points P_0 , P_{r+1} ... P_n ;

$$\overrightarrow{P'_0\,P'} = u_{r+1}\,\overrightarrow{P'_0\,P'_{r+1}} + \dots + u_n\,\overrightarrow{P'_0\,P'_n}\ ;$$

le théorème 21 montre alors que le point P' décrit une variété linéaire L', sa dimension est $r' = r$ si les vecteurs $\overrightarrow{P'_0\,P'_{r+1}}, \dots, \overrightarrow{P'_0\,P'_n}$ sont linéairement indépendants ; elle est inférieure à r si ces vecteurs sont linéairement dépendants.

La projection d'une variété linéaire L est donc une variété linéaire L' dont la dimension est au plus celle de L.

La réunion de deux variétés linéaires d'un même espace, définie dans III (page 7) ne donne pas une variété linéaire. Mais on peut définir pour deux variétés linéaires une nouvelle opération qu'on appelle l'union ou le joint et qui donne une variété linéaire. Soient L^r définie par $r+1$ points indépendants $P_0, P_1, \dots, P_r$ sur k, et $L'^{r'}$ définie par $r'+1$ points indépendants $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ dans le même espace S^n. La variété linéaire définie par les $r + r' + 2$ points P et Q s'appelle le joint de L et L' ; elle est de dimension au plus égale à $r + r' + 1$. L'intersection et le joint font alors de l'ensemble des variétés linéaires un treillis (6) (ou lattice) avec variété linéaire vide, et variété linéaire maximale S^n.

Spécialisation d'une variété linéaire. - Soient deux systèmes d'équations linéaires

$$(S) \quad \sum u_{\mu j} X_j - v_\mu = 0 \quad 1 \leqslant \mu \leqslant r$$

$$(S') \quad \sum u'_{\mu j} X_j - v'_\mu = 0$$

contenant le même nombre d'équations et définissant, le 1er une variété linéaire L, le 2e une variété linéaire L'. On dit que S' est spécialisation du système S sur k, ou encore que L' est spécialisation de L sur k, si les quantités $(u'_{\mu j}, v'_\mu)$ constituent une spécialisation des quantités $(u_{\mu j}, v_\mu)$ sur k. On écrit

$$L \xrightarrow[k]{} L' \quad \text{ou} \quad (S) \xrightarrow[k]{} (S')$$

(6) Cf. G. BIRKHOFF [1]. Ce treillis n'est pas modulaire en géométrie affine. En notant par $+$ et $.$ les opérations de joint et d'intersection il ne vérifie pas la condition de Dedekind $A \supsetneq B \longrightarrow A.(B + C) = B + AC$.

Il la vérifie cependant lorsque C est un point (axiome d'échange de Steinitz et Mac Lane, p. 106).

En particulier si on prend pour $u_{\mu j}$, v_μ un système de $n(r+1)$ quantités indépendantes sur k (avec $r \leq n$), le système G obtenu s'appelle système générique de r équations sur k, et il définit une variété linéaire générique L^{n-r} sur k. Tout système ayant le même nombre d'équations est une spécialisation de G sur k. Les propriétés suivantes résultent immédiatement de ces définitions et des résultats sur l'indépendance des formes linéaires.

THÉORÈME 22. - Toute variété L'^{n-r} est une spécialisation sur k de la variété L^{n-r} générique sur k.

Si $L \xrightarrow[k]{} L'$, on a : $\dim L' \geqslant \dim L$.

Soit L^{n-r} une variété définie sur k et M^s une variété générique sur k de dim $s \geqslant r$. M est transversale à L.

4. Point simple.

Variété linéaire tangente. - Soient V^r une variété définie sur un corps k ; $F_\alpha(X) = 0$ ses équations ; $P = (x)$ un point de V.

Considérons les équations linéaires

$$(6) \quad (L) \qquad \sum_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j}(X_j - x_j) = 0 .$$

Elles définissent une variété linéaire L passant par P, admettant $k(x)$ comme corps de définition. On l'appelle la variété linéaire tangente à V en P. Pour justifier cette définition, il faut montrer qu'elle ne dépend, V et P étant donnés, ni du système d'équations pris pour $F_\alpha(X) = 0$, ni du corps k de definition choisi pour V.

Soit $P(X)$ un polynôme quelconque de l'idéal $\mathfrak{p}$ défini par (x) sur k. On a

$$P(X) = \sum_\alpha A_\alpha(X) \quad F_\alpha(X)$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial x_j} = \sum_\alpha A_\alpha(X) \quad \frac{\partial F_\alpha(X)}{\partial x_j}$$

et

$$\sum_j \frac{\partial P}{\partial x_j}(X_j - x_j) = \sum_j \quad A_\alpha(X) \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} \quad (X_j - x_j) .$$

Cette relation montre que la variété L est également définie sur $k(x)$ par une autre base de l'idéal $\mathfrak{P}$ sur k. On peut en particulier choisir une base dans $k_0[X]$, k_0 étant le plus petit corps de définition de V (théorème 9, dans III). Les équations ainsi obtenues pour L, avec coefficients dans $k_0(x)$, sont valables quel que soit k et quelle que soit la base choisie pour l'idéal.

La dimension de L est $n - \rho$, si ρ est le nombre maximum des formes linéairement indépendantes prises parmi les $\sum_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(X_j)$ (ou $\sum_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(X_j)$).

Soit $P = (x)$ un point de V^r, définie sur k, soit $P' = (x')$ une spécialisation de (P) sur k. P' est un point de V. La variété linéaire L' tangente à V en P' a pour équations :

$$(L') \qquad \sum_j \frac{\partial F}{\partial x'_j}(X_j - x'_j) = 0 \quad .$$

Elle se déduit évidemment de la variété linéaire L tangente à V en P par spécialisation sur k. On en déduit que la dimension de L' est au moins égale à celle de L (théorème 22). En particulier la dimension de la variété linéaire tangente en un point P' est au moins égale à la dimension de la variété tangente au point générique P. Or celle-ci est égale à r, car la dimension de L est $n - \rho$ si ρ est le rang de la matrice $\left\|\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j}\right\|$ et ce rang vaut $n - d$ lorsque $d = \dim_k x$ et $k(x)$ extension régulière de k (7).

Comme $d = r$, la propriété annoncée en résulte, c'est-à-dire

THÉORÈME 23. - <u>La variété linéaire tangente au point générique sur</u> k <u>a la dimension</u> r. <u>Toute autre variété linéaire tangente en un point</u> P' <u>à une dimension</u> $r' \geqslant r$.

EXEMPLES : droite tangente au point générique d'une courbe, plan tangent au point générique d'une surface, hyperplan tangent au point générique d'une hypersurface.

<u>Point simple, point multiple</u>. - Lorsque la variété linéaire tangente à V en un point P' a exactement la dimension $r' = r$ on dit que P' est <u>simple</u>

---

(7) Propriété utilisée dans l'équivalence des deux définitions des extensions régulières citées dans I (Théorème 1) mais non démontrée.

sur V. Si $r' > r$ on dit qu'il est <u>multiple</u> sur V. Par exemple le point P générique sur k est simple sur V (théorème 23). Une sous-variété U de V est dite simple ou multiple sur V selon que son point générique (sur un corps k) est simple ou multiple sur V. Si U est multiple sur V tous ses points sont multiples sur V (théorème 22) ; mais si U est simple sur V certains points de U peuvent être multiples sur V.

Les points multiples d'une variété V annulent tous les déterminants d'ordre $n - r$ de la matrice $\left\|\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j}\right\|$ Ce sont donc les points d'une variété (S) définie par un système d'équations ; ils forment donc d'après le théorème 17 (dans III) la réunion d'un nombre fini de variétés (absolument irréductibles) situées sur V et de dimension au plus égale à $r - 1$ puisque le point générique de V est simple sur V.

Par exemple : une courbe dans S^n n'admet qu'un nombre fini de points multiples. Une surface n'admet qu'un nombre fini de lignes et de points multiples. Une variété linéaire L a tous ses points simples et la variété linéaire tangente à L en un point P' de L coïncide avec L.

Une première propriété des points simples apparaît dans le produit des variétés.

THÉORÈME 24. - <u>Soit</u> P <u>un point d'une variété</u> V^r <u>dans</u> S^n <u>et</u> Q <u>un point d'une variété</u> W^s <u>dans</u> S^m. <u>Pour que le point</u> $P \times Q$ <u>soit simple sur</u> $V \times W$ <u>il faut et il suffit que</u> P <u>soit simple sur</u> V <u>et</u> Q <u>simple sur</u> W.

Soient $F_\alpha(X) = 0$ un système d'équations pour V^r dans S^n et $G_\beta(Y) = 0$ un système d'équations pour W^S dans S^m. Les équations de la variété linéaire tangente en $P \times W$ à $V \times W$ sont :

$$\sum_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} (X_j - x_j) = 0 \qquad \sum \frac{\partial G_\beta}{\partial y_j} (Y_j - y_j) = 0 .$$

Pour que $P \times Q$ soit simple il faut et il suffit que le rang des formes à $n + m$ variables X et Y

$$\sum_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_j} (X_j) \qquad \sum_j \frac{\partial G_\beta}{\partial y_j} (Y_j)$$

soit $n + m - (r + s)$. Il faut et il suffit pour cela que le rang des premières (formes en X) soit $n - r$ et que le rang des autres (formes en Y) soit $m - s$, c'est-à-dire que P soit simple sur V et que Q soit simple sur W.

On rencontre aussi une propriété des points simples dans la projection des variétés.

THÉORÈME 25. - Soit V^r une variété définie sur k dans un espace-produit $S^n \times S^m$. Soit (x, y) un point générique de V sur k, $(x) = P \in S^n$ et $(y) = Q \in S_m$. Supposons que tous les y soient dans $k(x)$. Soit $(P', Q') = (x', y')$ un point de V, tel que les y soient dans l'anneau de spécialisation [8] de x' dans $k(x)$. Pour que le point (P', Q') soit simple sur V il faut et il suffit que sa projection P' dans S^n soit simple sur la projection V' de V dans S^n. De plus la variété linéaire L' tangente à V' en P' est la projection dans S^n de la variété linéaire L tangente à V en (P', Q').

Comme $k(x, y) = k(x)$ la projection V' de V dans S^n, lieu du point $P = (x)$ sur k, à la même dimension r que V. On a :

$$y_j = \frac{F_j(x)}{G(x)} \qquad (j' = 1, 2, \dots, m) \qquad G(x') \neq 0 .$$

Donc les polynômes $Q_j(X, Y) = G(X).Y_j - F_j(X)$ sont dans l'idéal définissant V sur k. Supposons que $(x') = P'$ soit simple sur V' ; cela signifie qu'il existe $n - r$ polynômes $P_\rho(X) \in k[X]$ dans l'ideal définissant V' sur k, donc défini par (x) sur k, tels que les formes linéaires $\sum_j \frac{\partial P_\rho}{x'_j} X_j$ soient linéairement indépendantes.

Les $n + m - r$ formes linéaires en X et Y

$$f_\rho = \sum_i \frac{\partial P_\rho}{\partial x'_j} X_j \quad \text{et} \quad g_j = G(x')\, Y_j + \sum_i \left(y'_j \frac{\partial G}{\partial x'_i} - \frac{\partial F_j}{\partial x'_i}\right) X_i$$

$\rho = 1, 2, \dots, n-r \qquad j = 1, 2, \dots, m$

sont indépendantes car $G(x') \neq 0$. Cela prouve que (P', Q') est simple sur V. De plus les équations linéaires $\sum_i \frac{\partial P}{\partial x'_j}(X_j - x'_j) = 0$ définissent à la fois la projection de L dans S^n et la variété linéaire L' tangente à V' en P'.

Inversement, supposons (P', Q') simple sur V ; nous allons montrer que P' est obligatoirement simple sur V'. Les formes g_j sont déjà m formes

---

[8] c'est-à-dire qu'on a $y_j = \frac{F_j(x)}{G(x)}$ avec $G(x') \neq 0$. $(j : 1, 2, \dots, m)$.

linéaires indépendantes, on peut donc trouver parmi les polynômes $Q(X , Y)$ de l'idéal définissant V sur K , $n - r$ polynômes tels que les formes $\sum_i \frac{\partial Q}{\partial x'_i} X_i + \sum_j \frac{\partial Q}{\partial y'_j} Y_j$ constituent avec les formes g_j , $m + n - r$ formes linéaires indépendantes.

Désignons ces $n - r$ polynômes Q par $Q_{m+1} , \ldots , Q_{m+n-r}$ ou $Q_{m+\rho}(X , Y)$ avec $\rho = 1 , \ldots , n-r$. On peut toujours trouver un entier d assez grand pour que

$$H_\rho(X) = G(X)^d \quad Q_{m+\rho}\left[X , \frac{F_j(X)}{G(X)}\right] \in k[X] .$$

Comme $H_\rho(x) = 0$, $H_\rho(X)$ appartient à l'idéal définissant V' sur k .

Formons (calcul facile) :

$$\sum_i X_i \frac{\partial H_\rho}{\partial x'_i} = G^d(x')\left(\sum_i \frac{\partial Q_{m+\rho}}{\partial x'_i} X_i + \sum_j \frac{\partial Q_{m+\rho}}{\partial y'_j} Y_j\right) - G^{d-1}(x') \sum_j \frac{\partial Q_{m+\rho}}{\partial y'_j} g_j(X, Y)$$

$$= G^d(x') L_\rho(X , Y) - G^{d-1}(x') \sum_j \frac{\partial Q_{m+\rho}}{\partial y'_j} g_j(X , Y) .$$

L'indépendance linéaire des formes $L_\rho(X , Y)$, $g_j(X , Y)$ entraîne l'indépendance linéaire des $n - r$ formes du 1er membre. Le point P' est donc simple sur V' .

La correspondance par projection qui intervient dans le théorème 25 entre V et V' est une transformation birationnelle particulière entre V et V' . Nous reviendrons dans la prochaine conférence sur les transformations birationnelles entre deux variétés. Pour obtenir des propriétés plus profondes des points simples et multiples sur une variété algébrique, il faut faire appel à la théorie des multiplicités d'intersection, qui sera étudiée ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF (Garrett). - Lattice theory. - New York, American mathematical Society, 1948 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 25).

[2] LICHNEROWICZ (André). - Algèbre et analyse linéaires. - Paris, Masson, 1947.

[3] WEIL (André). - Foundations of algebraic geometry. - New York, Amarican mathematical Society, 1946 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 29).

[4] WEIL (André). - Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. - Paris, Hermann, 1948 (Act. scient. et ind., 1041 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 7).