Paul Dubreil

Variétés algébriques, I

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 2-3 (1948-1950), exp. n° 1, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1948-1950__2-3__A1_0>

-:-:-:-

Séminaire A. CHÂTELET et P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Années 1948-1950

Exposé n° 1

-:-:-:-

VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES, I.,

par Paul DUBREIL

A. INTRODUCTION

On a appris à connaître et à étudier, en Géométrie algébrique ou analytique élémentaire, les variétés algébriques les plus simples : droite, plan, sphère, parabole, etc. On a certainement remarqué que, d'un problème à l'autre, ces variétés étaient envisagées de façons assez différentes. En insistant d'abord sur leur mode de génération ou de définition, nous pouvons distinguer trois façons principales d'envisager une telle variété, qui, a priori, peuvent conduire à des définitions générales des variétés algébriques.

a. Nous avons d'abord les variétés (F), définies comme figures c'est-à-dire comme ensembles de points d'un certain espace (E). Exemple : sphère ensemble des points de l'espace (euclidien) situés à la distance R d'un point C.

b. Ensuite, nous avons les variétés (S) regardées comme ensemble des solutions d'un système d'équation algébriques. Soit k le plus petit corps contenant les coefficients de ces équations : dès que le système n'est pas linéaire, on est conduit à chercher ses solutions, non seulement dans k, mais dans un sur-corps approprié K de k. Or ici apparaissent immédiatement des phénomènes qui compliquent les choses. Considérons par exemple le système

(1) $$x = y = z$$

et le système

(2) $$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$$

Le corps k est ici celui des nombres rationnels, Γ. Dans un sur-corps quelconque K de k, nous avons pour (1) les solutions

$$x = y = z = \alpha$$

où α est un élément quelconque de K. Pour (2), en désignant par λ la valeur commune des rapports, il vient, pour toute solution (α, β, γ)

$$\alpha = \lambda\beta = \lambda^2\gamma = \lambda^3\alpha$$

d'où, si $\alpha \neq 0$, $\lambda^3 = 1$. Si K est contenu dans le corps P des nombres réels, nous avons la seule solution $\lambda = 1$, $\alpha = \beta = \gamma \in K$ comme pour le système (1). Mais si K est le corps des nombres complexes, nous pourvons prendre $\lambda = 1$, j ou j^2 et nous obtenons trois familles de solutions : dans l'espace cartésien (coordonnées complexes), (2) définit la droite (1) et deux droites imaginaires conjuguées ([1]).

La notion de "systèmes d'équations équivalents" demande donc à être précisée. Il y a l'équivalence relative ou équivalence sur K : identité des solutions appartenant au corps K ($\supseteq$ k) , et l'équivalence proprement dite : identité des solutions de n'importe quel sur-corps de k .

Introduisons, pour chaque corps K ($\supseteq$ k) un espace E_K (ici à 3 dimensions) dans lequel les coordonnées sont éléments de K , et considérons, pour une variété (S) regardée comme ensemble des solutions d'un système d'équations sur k , l'ensemble $\{S\}_K$ des points-solutions dans E_K . D'après l'exemple précédent, à des variétés (S) , (S') telles que (1) et (2), manifestement différentes puisque (1) et (2) ne sont pas équivalents sur K , correspondent, suivant le choix de K , des ensembles de points ou figures $\{S\}_{K'}$, $\{S\}_K$ identiques ou distincts. Il en résulte, que dans une définition générale des variétés algébriques, le point de vue (a) doit être abandonné provisoirement. On ne pourra y revenir qu'après avoir démontré que la figure $\{S\}_K$ détermine la variété (S) lorsque K est un corps algébriquement fermé (c'est-à-dire que tout polynôme f(x) à coefficients dans K se décompose en facteurs linéaires ayant eux aussi leurs coefficients dans K).

c. Nous avons enfin les variétés (L) introduites comme lieux de points variables c'est-à-dire de points dépendant algébriquement d'un certain nombre de paramètres, par exemple

(3) $$x = t\ ,\quad y = t^2\ ,\quad z = t^3$$

puisque t est une indéterminée, l'être (t , t^2 , t^3) n'est pas ici, à proprement parler, un point de l'espace cartésien, ou, plus généralement, de l'espace E_K , K étant un corps de nombres (dans le cas général, un corps contenant

---

([1]) En rendant les équations (2) entières, on obtient 3 cônes

$$xy - z^2 = 0\ ,\quad yz - x^2 = 0\ ,\quad zx - y^2 = 0$$

qui se coupent deux à deux suivant ces trois droites et un des axes de coordonnées.

les coefficients des équations qui définissent x , y , z comme fonctions algébriques des paramètres, sans contenir les paramètres eux-mêmes). Mais nous pouvons associer aux équations (3) l'ensemble $\{L\}_K$ des points ordinaires de E_K obtenus en attribuant à t une valeur $\theta \in K$: en prenant $\theta = \sqrt{2}$, par exemple, nous obtenons le point $(\sqrt{2}\ , 2\ , 2\ , \sqrt{2})$. Il est donc naturel et très commode d'envisager une extension de la notion de point ; et de dire que $(t\ , t^2\ , t^3)$ est le point générique du lieu (L) tandis que le point (fixe, particulier) $(\sqrt{2}\ , 2\ , 2\ , \sqrt{2})$ est un point du lieu. (A vrai dire, d'ailleurs, l'adjonction du ou des paramètres au corps K transforme le point générique en un point ordinaire).

Il est évident qu'une même variété (L) peut être définie par des points génériques différents. Par exemple, le lieu (3) peut aussi être défini par

$$x = \sqrt[3]{u} \quad y = \sqrt[3]{u^2} \quad z = u$$

Il faudra donc préciser à quelle condition des points génériques différents engendrent le même lieu. D'autre part, on ne dispose pas, en général d'expression explicites telles que (3) pour les coordonnées du point générique. Aussi devra-t-on utiliser les ressources de la théorie des corps abstraits. Cette méthode a été approfondie récemment par A. WEIL [4] . Nous nous en occuperons d'abord. Nous examinerons ensuite la définition qui dérive du point de vue (b), mais, dès maintenant, nous pouvons noter entre les variétés (L) définies comme lieux et les variétés (S) définies à partir d'un système d'équations, une importante différence : les phénomènes de décomposition se présentent sans restrictions pour les variétés (S) , ils sont au contraire limités pour les variétés (L) , et même un choix convenable des corps utilisés permet de les faire complètement disparaître, ce qui est une caractéristique de la méthode de WEIL.

B. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES VARIÉTÉS (L) .

1. Points et pseudo-points ; spécialisations.

Sous le nom de domaine universel Δ nous considérons un corps, choisi une fois pour toutes, de caractéristique n nulle ou différente de zéro, doué des deux propriétés suivantes : il est algébriquement fermé et d'un degré de transcendance infini sur son sous-corps premier (2). Quand on parlera de corps k, K, ... ce seront toujours des sous-corps de Δ tels que le degré de transcendance de Δ sur k, K, ... soit infini. Les éléments du domaine universel sont appelés des quantités. Une quantité non algébrique sur un corps k est dite variable sur k ; on calcule sur elle comme sur une indéterminée.

Un point P du n-espace E^n_Δ sera par définition un ensemble ordonné de n quantités, appelées coordonnées du point

$$P = (x_1 , \dots , x_n) = (x) \qquad x_i \in \Delta$$

Deux points P et P' sont regardés comme identiques (confondus) si, et seulement si $x_\nu = x'$ ($\nu = 1 , \dots , n$). Au point $P = (x)$ et à un corps k, nous associerons souvent le corps $k(P) = k(x)$, plus petite extension de k contenant les coordonnées x_ν de P.

Un point $P' = (x'_1 , \dots , x'_n)$ est une spécialisation de $P = (x_1 , \dots , x_n)$ sur k si chaque polynôme $F(X_1 , \dots , X_n)$ à coefficients dans k nul pour $X_\nu = x_\nu$ est nul également pour $X_\nu = x'_\nu$, en d'autres termes (3) si

$$\left.\begin{array}{l} F(X_1 , \dots , X_n) \in K[X_1 , \dots , X_n] = k[X] \\ \text{et} \\ F(x_1 , \dots , x_n) = 0 \end{array}\right\} \text{entraînent } F(x'_1 , \dots , x'_n) = 0$$

Si P'' est une spécialisation de P' sur k, et P' une spécialisation de P sur k, P'' est une spécialisation de P sur k.

---

(2) Le sous-corps premier d'un corps K est son sous-corps minimum, intersection de tous les sous-corps de K. Il est isomorphe au corps des rationnels Γ si K a la caractéristique 0, au corps des classes de restes module p si K a la caractéristique $p \neq 0$ (p premier). Une extension ou sur-corps K de k est de degré de transcendance fini et égal à n sur k, si n est le nombre maximum d'éléments de K algébriquement indépendants sur k (c'est-à-dire qui ne sont liés par aucune relation algébrique à coefficients dans k). Voir par exemple VAN DER WAERDEN [2], paragraphe 64, p. 209-213. Le corps Ω des nombres complexes peut, par exemple, être pris comme domaine universel car son degré de transcendance sur Γ ou sur la fermeture algébrique $\bar{\Gamma}$ de Γ ($\bar{\Gamma}$ = corps de tous les nombres algébriques) est infini : dans le cas contraire, Ω serait dénombrable comme Γ (voir par exemple DUBREIL [1], note 5, p. 447-454)

(3) On désigne par $k[X_1 , \dots , X_n]$, en abrégé par $k[X]$, l'anneau des polynômes en $X_1 , \dots , X_n$ à coefficients dans k.

EXEMPLES.

1° Supposons $n = 3$; prenons comme domaine fondamental une extension de Ω contenant des indéterminées t , u , ... et soit k un sous-corps du corps $\bar{\Gamma}$ des nombres algébriques. Le point $P'' = (\sqrt{2}\ ,\ 2\ ,\ 2\sqrt{2})$ est une <u>spécialisation sur</u> k du point $P' = (t\ ,\ t^2\ ,\ t^3)$; le point P' lui-même est une spécialisation sur k du point P : $(t\ ,\ u\ ,\ tu)$.

2° Supposons $n = 1$ et $\Delta \supseteq \Omega$, Ω désignant toujours le corps des nombres complexes. Le point $P' = (-\sqrt{2})$ est une spécialisation du point $P = (+\sqrt{2})$ sur le corps Γ des nombres rationnels, car tout polynôme $f(x) \in \Gamma[x]$ s'écrit $f(x) = a(x^2) + xb(x^2)$ avec $a(y)$ et $b(y) \in \Gamma[y]$, par conséquent $f(+\sqrt{2}) = 0$ entraîne $a(2) = b(2) = 0$, donc $f(-\sqrt{2}) = 0$. D'ailleurs $+\sqrt{2}$ est également une spécialisation de $-\sqrt{2}$. Mais si nous prenons comme corps k , au lieu de Γ , un corps de nombres algébriques contenant $\sqrt{2}$, P' <u>n'est plus une spécialisation de</u> P <u>sur</u> k .

Pour tenir compte éventuellement des "éléments à l'infini" (tout en évitant ou simplifiant les anciennes discussions de VAN DER WAERDEN sur les "valeurs régulières" n'annulant pas les dénominateurs), WEIL introduit une quantité supplémentaire, ∞ , soumise aux règles de calcul

$$\frac{1}{0} = \infty \quad , \quad \frac{1}{\infty} = 0 \ ,$$

et appelle <u>quantités généralisées</u> les quantités ordinaires (qui seront dites aussi <u>finies</u>) et la quantité ∞ . Un pseudo-point P est un ensemble de n quantités généralisées <u>non toutes finies</u> ; $k(P)$ désigne alors l'extension de k engendrée par celles des coordonnées de P qui sont <u>finies</u>. Un pseudo-point peut toujours être transformé en un point par une <u>réciprocité</u> convenable, c'est-à-dire une transformation de la forme

$$Y_k = \frac{1}{X_k} \quad \text{pour} \quad k = \nu_1 \ , \ \dots \ , \ \nu_m \quad (0 < m \leq n)$$

$$Y_k = X_k \quad \text{pour les autres valeurs de} \quad k \in (1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n)$$

Il y a lieu d'entendre la définition des spécialisations de façon qu'elle s'applique aussi bien aux quantités généralisées qu'aux quantités finies. Cette extension repose sur la remarque suivante : si une réciprocité donnée, par exemple

$$Y_k = \frac{1}{X_k} \quad (k = 1\ ,\ \dots\ ,\ m) \qquad Y_k = X_k \quad (k = m+1\ ,\ \dots\ ,\ n)$$

transforme les points (x) en (y) et (x') en (y'), pour que (x') soit une spécialisation de (x) il faut et il suffit que (y') soit une spécialisation de (y). En effet [4], proposition 1, p. 26, puisqu'il s'agit de points, c'est-à-dire d'ensembles de quantités finies, aucune des coordonnées x_ν, x'_ν, y_ν, y'_ν pour $\nu \leq m$ n'est égale à 0. Supposons que (x') soit une spécialisation de (x) sur k, et soit $F(Y) \in k[Y]$ tel que $F(y) = 0$. Il existe un entier N tel que

$$G(X) = (X_1 \dots X_m)^N F(\frac{1}{X_1}, \dots, \frac{1}{X_m}, X_{m+1}, \dots, X_n)$$

soit un polynôme en (X). $F(y) = 0$ entraîne $G(x)$ d'où $G(x') = 0$ et $F(y') = 0$ puisque $x'_1, \dots, x'_m$ sont $\neq 0$: (y') est bien une spécialisation de (y) sur k. Même raisonnement en sens inverse permutant les (x) et les (y).

Nous dirons donc, d'une façon générale, qu'un ensemble (x') de n quantités généralisées est une spécialisation d'un ensemble analogue (x) s'il existe une réciprocité $\mathcal{R}$ les transformant en deux points (y), (y') tels que (y') soit une spécialisation de (y). (Si une autre réciprocité $\mathcal{R}_1$ transforme (x), (x') en deux points (z), (z'), alors $(\mathcal{R}_1)^{-1}$ est encore une réciprocité, transformant (y) en (z), (y') en (z') : si donc (y') est une spécialisation de (y), (z') est une spécialisation de (z) et inversement). On emploiera la notation

$$\{(x) \longrightarrow (x')\} \quad \text{sur } k$$

pour écrire que (x') est spécialisation de (x) sur k.

Si une coordonnée x_ν est nulle, le polynôme $X_\nu \in k[x_1, \dots, x_n]$, nul pour $X_k = x_k$ $(k = 1, \dots, n)$ doit l'être pour $X_k = x'_k$, d'où $x'_\nu = 0$. 0 se spécialise nécessairement en lui-même, donc ∞ aussi, toute spécialisation d'un pseudo-point est un pseudo-point, ou encore : si (x) a pour spécialisation un point $P' = (x')$, (x) est lui-même un point P.

2. Extensions régulières.

La notion d'extension régulière d'un corps k joue un rôle fondamental dans la définition des variétés-lieux, au sens de WEIL. Elle-même repose sur la notion d'extension linéairement disjointes.

LEMME 1 et définition [4], prop. 3, p. 4. – Soient L_1 et L_2 deux corps ayant un sous-corps commun k : si tout ensemble d'éléments de L_1 linéairement indépendants sur k est aussi un ensemble d'éléments linéairement indépendants sur L_2 alors tout ensemble d'éléments de L_2 linéairement indépendants sur k est de même un ensemble d'éléments linéairement indépendants sur L_1. On exprimera cette propriété symétrique de L_1 et L_2 en disant que L_1 et L_2 sont linéairement disjoints sur k.

Soit (y_μ) un ensemble d'éléments de L_2 linéairement indépendants sur k (donc $\neq 0$). Supposons que l'on ait

$$(1) \qquad \sum_\mu u_\mu y_\mu = 0 \quad \text{avec} \quad u_\mu \in L_1$$

Parmi les u_μ, prenons un ensemble maximal d'éléments linéairement indépendants sur k, appelons ces éléments v. Si cet ensemble est vide, les u_μ sont dans k, donc sont nuls (d'après l'indépendance des y_μ sur k) et le lemme est établi. Dans le cas contraire, écrivons

$$(2) \qquad u_\mu = \sum_\rho c_{\mu\rho} v_\rho \quad \text{où} \quad c_{\mu\rho} \in k$$

d'où

$$(3) \qquad \sum_\rho z_\rho v_\rho = 0 \qquad \text{où} \quad z_\rho = \sum_\mu c_{\mu\rho} y_\mu \in L_2$$

Comme les v_ρ, éléments de L_1, sont linéairement indépendants sur k, ils le sont aussi par hypothèse, sur L_2 : (3) entraîne donc

$$z_\rho = \sum_\mu c_{\mu\rho} y_\mu = 0$$

d'où nécessairement

$$c_{\mu\rho} = 0 \quad \text{et} \quad u_\mu = 0$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cela posé, nous dirons qu'une extension finie

$$K = k(x_1, \ldots, x_n)$$

de k est régulière si K et la fermeture algébrique $\bar{k}$ de k sont linéairement disjoints (4).

---

(4) La fermeture algébrique $\bar{k}$ de k est le plus petit corps algébriquement fermé contenant k. Son existence, (il est d'ailleurs déterminé à un isomorphisme près) résulte d'un théorème de Steinitz (voir par exemple VAN DER WAERDEN, [2], paragraphe 62, p. 200-206, et ZORN [6]). Avec les conventions faites précédemment, $\bar{k}$ est inclus dans le domaine universel Δ en même temps que k, les x étant des quantités, K est également contenu dans Δ.

Il est évident que $L_1 = k$ et une extension L_2 quelconque de k sont linéairement disjoints sur k. Donc, si k est algébriquement fermé, $k = \bar{k}$, toute extension $K = k(x)$ de k est régulière sur k.

Egalement, toute extension purement transcendante [5], $k(X_1, \ldots, X_n) = k(X)$ d'un corps k quelconque, est régulière sur k.

Pour le montrer, établissons le lemme suivant, obtenu par WEIL [4], Corollaire I, p. 16, comme conséquence de propositions plus générales, mais dont nous donnerons ici une démonstration directe.

LEMME 2. - Si $(X_1, \ldots, X_n)$ sont des variables indépendantes sur une extension K de k, $k(X_1, \ldots, X_n)$ et K sont linéairement disjoints sur k.

Il suffit de montrer que des éléments $\omega_\lambda \in K$, linéairement dépendants sur $k(X_1, \ldots, X_n)$ sont aussi dépendants sur k.

Soit donc

$$(4) \qquad \sum_\lambda \omega_\lambda f_\lambda = 0 \begin{cases} f_\lambda \in k(X_1, \ldots, X_n) \\ f_\lambda \ \text{non tous nuls.} \end{cases}$$

En multipliant par un polynôme convenable en $X_1, \ldots, X_n$, nous mettons (4) sous la forme

$$(4') \qquad \sum_\lambda \omega_\lambda P_\lambda = 0 \qquad (\omega_\lambda \in K)$$

où les P_λ sont des polynômes de l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n]$ non tous nuls.

Puisque les X sont des variables indépendantes sur K, le premier membres de (4'), qui est un polynôme $\Pi(X)$ à coefficients dans K, doit avoir tous ses coefficients nuls. Or si $\mathfrak{M}$ est monôme figurant dans les P_λ avec des coefficients $a \in k$ non tous nuls, le coefficient de $\mathfrak{M}$ dans Π est $\sum_\lambda \omega_\lambda a_\lambda$ (4') entraîne donc

$$(5) \qquad \sum_\lambda \omega_\lambda a_\lambda = 0 \qquad \text{où} \begin{cases} a_\lambda \in k \\ a_\lambda \ \text{non tous nuls} \end{cases}$$

ce qu'il fallait démontrer.

---

(5) $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ est extension purement transcendante de k si les x_ν sont des variables indépendantes sur k, c'est-à-dire ne sont liés par aucune relation algébrique à coefficients dans k. Toute extension de degré de transcendance fini r peut s'obtenir en effectuant une extension purement transcendante de k consistant à adjoindre r variables indépendantes, puis une extension algébrique, (cf. VAN DER WAERDEN [2] paragraphe 64).

Soit alors $k(X)$ une extension purement transcendante de k : on voit qu'elle est régulière sur k en prenant, dans le lemme, $K = \overline{k}$, ce qui est légitime puisque n variables (X) algébriquement indépendantes sur k le sont aussi sur $\overline{k}$.

Enfin, on a la condition nécessaire et suffisante suivante pour qu'une extension $k(x)$ soit régulière sur k : cette condition sera appelée deuxième définition des extensions régulières.

THÉORÈME 1. - Pour qu'une extension $k(x)$ de k soit régulière sur k, il faut et il suffit que k soit algébriquement fermé dans $k(x)$, et $k(x)$ séparablement engendré sur k (6).

Nous renverrons au traité de WEIL [4] pour la démonstration qui repose sur un assez grand nombre de théorèmes rassemblés au chapitre 1. On devra notamment prendre connaissance des propositions sur l'indépendance algébrique (paragraphe 2, proposition 4, 5, 6, 7), sur la séparabilité (paragraphe 4, définitions p. 8 et 9), sur la dérivation (paragraphe 5, proposition 15 et théorème 1), enfin des propositions 17, 18, 19, du paragraphe 7. Mais il n'y a pas d'inconvénient sérieux à admettre, en première lecture, la validité du théorème précédent, dont la portée apparaîtra clairement dans l'étude des variétés algébriques. Notons dès maintenant les deux faits suivants :

1° Si la caractéristique de k est nulle, la seconde partie de la condition est toujours vérifiée : pour que $k(x)$ soit extension régulière de k, il faut et il suffit que k soit algébriquement fermé dans $k(x)$ (voir notes 5 et 6).

---

(6) [4], chapitre I, théorème 5, p. 18. - Un corps k est algébriquement fermé dans un surcorps K si tout élément de K algébrique sur k appartient à k. K est séparablement engendré sur k si K est une extension algébrique séparable d'un corps K' qui est lui-même extension purement transcendante de k (voir note 7). Rappelons en outre qu'un polynôme $f(x)$ irréductible sur un corps Σ est inséparable s'il admet au moins un zéro multiple dans une extension de Σ (ce qui peut avoir lieu que si la caractéristique p de Σ est différente de zéro) ; dans le cas contraire, $f(x)$ est séparable. Un élément α algébrique sur Σ est séparable ou inséparable sur Σ suivant que le polynôme irréductible sur Σ, dont il est un zéro, est séparable ou inséparable (dans ce cas, on montre que tous les zéros ont la même multiplicité p-ième). Une extension algébrique Σ' de Σ est séparable sur Σ si tout élément de Σ' est séparable sur Σ. (Voir DUBREIL [1], p. 363 ; VAN DER WAERDEN [2], paragraphe 41, p. 132).

2° La deuxième définition d'une extension régulière est manifestement invariante vis-à-vis des isomorphismes sur k : si $K = k(x)$ et $K' = k(x')$ sont deux extensions isomorphes sur k (c'est-à-dire s'il existe entre K et K' un isomorphisme laissant invariant tout élément de k), et si K est régulière sur k, K' l'est aussi.

3. Variétés-lieux.

Δ désignant toujours le domaine fondamental, considérons les couples formés par un corps k ($\in \Delta$) et un point $P = (x_1 , \dots , x_n) = (x)$ du n-espace E^n_Δ, tel que l'extension $k(P)$ soit régulière sur k. Dans l'ensemble des couples (k , P) ainsi définis, introduisons la relation d'équivalence suivante :

$$(k , P) \equiv (k' , P')$$

si toute spécialisation finie $M = (y)$ de P sur k est aussi spécialisation (finie) de P' sur k', et inversement. Cette relation est évidemment réflexive, symétrique et transitive.

Une classe, dans l'équivalence ainsi définie, est par définition une variété-lieu ou variété-L dans le n-espace. Cette définition a ceci de remarquable qu'elle ne présuppose pas le choix d'un corps fondamental k, et, comme le souligne ZARISKI [5], p. 673, la restriction " $k(P)$ extension régulière de k " fait qu' "il ne pourra rien arriver à la variété lorsqu'on procédera à une extension du corps fondamental k " .

Soient V une telle variété et (k , P) un des couples correspondants. On dira que :

" V est définie sur k ; k est un corps de définition de V "

" V est le lieu de P sur k "

" P est point générique de V sur k " .

En outre, tout point M, spécialisation de P sur k, est dit être un point de V. D'après la définition même d'une variété, cette propriété ne dépend que de M et de V, et non du choix du couple (k , P) utilisé pour la représenter. En particulier, P lui-même est un point de V.

Dans le n-espace E^n_Δ, l'ensemble des points M de V est un certain ensemble de points $\{V\}$ attaché à V, $\{V\}$ est ce que nous avons appelé une "variété-figure". Deux variétés V_1, V_2 pour lesquelles $\{V_1\} = \{V_2\}$, coïncident. Si en effet nous représentons V_1 par le couple (k_1, P_1), V_2 par le couple (k_2, P_2), toute spécialisation finie M de P_1 sur k_1 est un point de $\{V_1\}$, donc de $\{V_2\}$, donc est spécialisation (finie) de P_2 sur k_2, et inversement : c'est-à-dire qu'on a

$$(k_1, P_1) \equiv (k_2, P_2)$$

et par conséquent

$$V_1 = V_2$$

Donc, grâce aux précautions prises, on échappe aux difficultés signalées dans l'introduction à propos des variétés-figures.

Définissons l'inclusion des variétés-L .

Une variété W est contenue dans V, $W \subset V$ (ou $V \supset W$), si tout point de W est un point de V, (donc si $\{W\} \subset \{V\}$ au sens de l'inclusion des ensembles).

EXEMPLES et cas particuliers.

1° Prenons $n = 3$, et pour k, le corps des nombres algébriques $(k = \bar{k})$, Ω, corps des nombres complexes. Considérons la variété V, lieu du point

$$P = (u, u^2, v)$$

sur k ; cette variété (qui n'est autre qu'un "cylindre parabolique") contient les variétés $W_1, W_2, W_3, \ldots$ engendrées respectivement par les points

$$P_1 = (u, u^2, \alpha u + \beta) \qquad (\alpha, \beta \in k)$$

$$P_2 = (\lambda, \lambda^2, v) \qquad (\lambda \in k)$$

$$P_3 = (-\sqrt{2}, 2, i)$$

W_1 est une parabole tracée sur W, dépendant des constantes α, β ;

W_2 est une droite dépendant de λ .

W_3 est un point fixe ou ordinaire, c'est-à-dire que son point générique P_3 a des coordonnées qui appartiennent au corps fondamental k . Etudions ce cas particulier.

2° Si nous nous donnons un point P dont les coordonnées x_ν sont des éléments de k, $k(P) = k$ est une extension régulière de k : donc, le couple

(k, P) formé par k et un tel point définit toujours une variété, dont les points sont les spécialisations de P sur k. Or si $(x'_1, \dots, x'_n)$ est une telle spécialisation et si nous considérons le polynôme : $F(X) = X_\nu - x_\nu$, nous avons $F(X) \in k[X]$ puisque $x_\nu \in k$, et $F(x) = 0$: il vient par conséquent $F(x') = 0$, c'est-à-dire $x'_\nu = x_\nu$. Ainsi P n'a pas d'autre spécialisation que lui-même, c'est le seul point de V : on dit que V est réduite à ce point sur k : $\{V\} = \{P\}$.

Inversement, M étant, soit une variété V, lieu de P sur k, telle que $\{V\} = \{M\}$; soit k_0 le plus petit corps contenant les coordonnées de M : considérons la variété V_0 lieu de M sur k_0, réduite au point M :

$$\{V_0\} = \{M\} = \{V\} \quad ,$$

donc $V = V_0$, donc toute spécialisation finie de P sur k, en particulier P, est une spécialisation de M sur k_0, c'est-à-dire coïncide avec M : ainsi tout point générique d'une telle variété est M. D'autre part, puisque $V = V_0$ nous avons

$$(M, k_0) \equiv (P, k)$$

d'où

$$(P, k_0) \equiv (P, k)$$

V est aussi le lieu de P sur k_0 : k est un corps de définition de V.

3° A l'autre extrême, considérons un point $P = (x_1, \dots, x_n)$ dont les coordonnées x_ν sont n variables indépendantes sur k. Nous savons que $k(P)$ est une extension régulière de k (lemme 2) [7], P engendre donc une certaine variété E^n. On a

$$\{E^n\} = E^n_\Delta \quad .$$

Soit en effet $Q = (y_1, \dots, y_n)$ un point quelconque : c'est une spécialisation de P puisque $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ où $F \in k[X]$ équivaut ici à $F(X_1, \dots, X_n) = 0$ donc entraîne $F(y_1, \dots, y_n) = 0$ quels que soient les y. Cette propriété détermine uniquement cette variété E^n ; toute variété V est contenue dans E^n qui est appelée variété ambiante à n dimensions. Inversement, soit V une variété, lieu de $P = (x)$ sur k ; si $\{V\} = E^n_\Delta$, tout point $Q = (y)$ appartient à V. Un polynôme $f(X) \in k[X]$ nul pour

---

[7] C'est aussi une conséquence immédiate du théorème 1 (deuxième définition des extensions régulières).

$X = x$ est identiquement nul, puisqu'on a $f(y) = 0$, où les quantités y_ν peuvent être prises algébriquement indépendantes sur k. Le point générique P, sur k, d'une variété V telle que $\{V\} = E^n_\Delta$, a donc nécessairement des coordonnées algébriquement indépendantes sur k. Comparons les différents points génériques d'une même variété, sur un même corps k.

DÉFINITION. - Un ensemble $(x') = (x'_1, \dots, x'_n)$ de quantités généralisées, spécialisation de l'ensemble $(x_1, \dots, x_n) = (x)$ de quantités généralisées, en est <u>spécialisation générique</u> si inversement (x) est spécialisation de (x'). Cette propriété est transitive. Elle s'applique en particulier aux ensembles de quantités finies, c'est-à-dire aux points.

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> V <u>le lieu d'un point</u> P <u>sur un corps</u> k. <u>Pour qu'un point</u> P' <u>soit point générique de</u> V <u>sur</u> k, <u>il faut et il suffit que</u> P' <u>soit spécialisation générique de</u> P <u>sur</u> k.

C'est <u>nécessaire</u>, car si P' a pour lieu V sur k, P, point de V, est spécialisation de P' ; et P', point de V, est spécialisation de P.

C'est <u>suffisant</u>. En effet, si nous montrons que $k(P')$, est une extension <u>régulière</u> de k, P' aura un lieu V' sur k ; mais P' étant par hypothèse spécialisation générique de P sur k, toute spécialisation de P est spécialisation de P' et inversement, donc $\{V\} = \{V'\}$ ce qui entraîne $V = V'$. Reste donc seulement à montrer que $k(P')$ est extension <u>régulière</u> de k, comme $k(P)$. Ce point, qui est immédiat quand k est algébriquement fermé, résulte, dans le cas général, du lemme suivant, et de la remarque faite : d'après la 2e définition des extensions régulières (théorème 1), l'isomorphisme $k(P') \xrightarrow[(k)]{\nu} k(P)$ entraîne que $k(P')$ est régulière comme $k(P)$.

LEMME 3 [8]. - <u>Pour que</u> $P' = (x')$ <u>soit une spécialisation générique, sur</u> k, <u>de</u> $P = (x)$, <u>il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme sur</u> k, <u>entre les extensions</u> $k(x)$, $k(x')$ <u>appliquant les</u> x_ν <u>sur les</u> x'_ν. <u>Cet isomorphisme est d'ailleurs unique</u>.

1° <u>C'est suffisant</u>, car si $F(X) \in k[X]$ et $F(x) = 0$, on a $\alpha[F(x)] = 0$ et $\alpha[F(x)] = F(x')$ donc $F(x') = 0$. De même $F(x') = 0$ entraîne $\alpha^{-1}[F(x')] = F(x) = 0$. Donc (x') est spécialisation générique de x.

---

[8] [4], proposition 8, p. 6 (sous une forme un peu générale).

L'isomorphisme α est unique puisque, si $z = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est un élément quelconque de $k(x)$, où P, $Q \in k[x]$, on a nécessairement :

$$\alpha z = \frac{\alpha[P(x)]}{\alpha[Q(x)]} = \frac{P(x')}{Q(x')}$$

2° C'est nécessaire. Supposons (x') spécialisation générique de (x). Si $z \in k(x)$, écrivons $z = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P, $Q \in k[X]$ et considérons $z' = \frac{P(x')}{Q(x')}$. Si nous prenons une autre représentation de z,

$$z = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Nous avons

$$P(x)\, Q_1(x) - P_1(x)\, Q(x) = 0 ,$$

ce qui entraîne :

$$P(x')\, Q_1(x') - P_1(x')\, Q(x') = 0 ,$$

de sorte que z' est indépendant de la représentation adoptée pour z. L'application z, z', qui est évidemment une application de $k(x)$ sur $k(x')$, est biunivoque, car $z_1' = z_2'$ où

$$z_1 = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \quad \text{signifie} \quad P_1(x')\, Q_2(x') - P_2(x')\, Q_1(x') = 0$$

qui entraîne (puisque (x) est spécialisation de (x'))

$$P_1(x)\, Q_2(x) - P_2(x)\, Q_1(x) = 0$$

c'est-à-dire $z_1 = z_2$. Cette application est enfin, visiblement, un isomorphisme sur k.

REMARQUE. - Le lemme est intéressant en lui-même, car il montre que le corps $k(P)$, où (k, P) est un couple représentant la variété de V, est défini à un isomorphisme près sur k quand, V étant donnée, k est fixé. Le degré de transcendance de ce corps, appelé aussi dimension de P sur k, se trouve donc dans ces conditions, déterminé : tous les points génériques de V sur k ont la même dimension. On établira ultérieurement que cette dimension est en outre indépendante de k, et ce sera la dimension de V ([4], p. 72).

Montrons enfin qu'une variété-lieu V peut être regardée comme variété-S (c'est-à-dire variété solution d'un système d'équations).

Soit $P = (x)$ un point générique de V sur k.

L'ensemble des polynômes

$$F(X) \in k[X] = k[X_1, \ldots, X_n] = R_n$$

tels que $F(x) = 0$ est un <u>idéal</u> $\mathfrak{P}(x)/k$, et même un idéal <u>premier</u> (9), dans l'anneau R_n. Si $P' = (x')$ est un autre point générique de V sur k, les relations $F(x) = 0$, $F(x') = 0$ (où $F \in R_n$) sont vérifiées simultanément, d'où $\mathfrak{P}(x)/k = \mathfrak{P}(x')/k$: cet idéal $\mathfrak{P}$ ne dépend donc que de V et de k. On l'appelle <u>idéal définissant</u> V <u>sur</u> k. On dit que V est la variété définie par cet idéal $\mathfrak{P}$, sur k.

On sait que, dans un anneau de polynômes à coefficients dans un corps, tout idéal possède une <u>base finie</u> (10). Soit donc

$$\mathfrak{P} = (F_1(X), \ldots, F_\mu(X), \ldots, F_r(X))$$

Nous dirons que les équations

$$F_\mu(X) = 0 \qquad\qquad (\mu = 1, \ldots, r)$$

(à coefficients dans k), <u>définissent</u> V <u>sur</u> k. <u>Pour qu'un point</u> $Q = (y)$ <u>soit un point de</u> V, <u>il faut et il suffit que l'on ait</u>

$$F_\mu(y) = 0$$

C'est <u>nécessaire</u>, puisque $F_\mu(x) = 0$ d'après la définition de $\mathfrak{P}$ et (y) est spécialisation de (x) sur k. C'est <u>suffisant</u>, car $F_\mu(y) = 0$ pour $\mu = 1, \ldots, r$ entraîne $F(y) = 0$ pour tout $F \in \mathfrak{P}$: donc $F \in k[X]$ et $F(x) = 0$ (ce qui équivaut à $F \in \mathfrak{P}$), entraînent $F(y) = 0$: (y) est spécialisation de (x) donc Q est un point de V.

REMARQUES.

1° La propriété $F_\mu(y) = 0$ pour tout $(y) \in \{V\}$ n'est pas caractéristique pour un système d'équations définissant V, car elle appartient aussi au système $F_\mu^m = 0$, et, pour $m > 1$, $(F_1^m, \ldots, F_r^m)$ n'est plus une base de $\mathfrak{P}$.

---

(9) Voir par exemple VAN DER WAERDEN, [2], paragraphe 20, p. 63-65 ; DUBREIL [1], p. 185-186 et p. 158-199.

(10) C'est le "théorème de la base finie", de Hilbert. Voir par exemple VAN DER WAERDEN, [3], p. 18 ; DUBREIL [1], p. 331.

2° D'après ce qui précède, toute variété-lieu V peut être regardée comme une variété-S . Mais il y a évidemment des variétés-S qui ne sont pas obtenues ainsi : telles sont par exemple les variétés-S définies par un système d'équations à coefficients dans k , dont les premiers membres engendrent un idéal $\mathfrak{P}$ de l'anneau $R_n = k[X_1, \dots, X_n]$ qui n'est pas premier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUBREIL (Paul). - Algèbre, Tome I. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[2] VAN DER WAERDEN (B.L.). - Moderne Algebra, I., 3e éd. - Berlin, Springer, 1950 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 33).

[3] VAN DER WAERDEN (B.L.). - Algebra, II., 3e éd. - Berlin, Springer, 1955 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 34).

[4] WEIL (André). - Foundations of algebraic geometry. - New York, American mathematical Society, 1946 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 29).

[5] ZARISKI (O.). - Book reviews, Bull. Amer. math. Soc., t. 54, 1948, p. 671-675.

[6] ZORN (Max). - A remark on method in transfinite algebra, Bull. Amer. math Soc., t. 41, 1935, p. 667-670.