Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean-Pierre Borel

Équirépartition modulo 1 de semi-groupes additifs de nombres réels

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, nº 2 (1978-1979), exp. nº 31, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_2_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 31, 9 p.
28 mai 1979

ÉQUIRÉPARTITION MODULO 1 DE SEMI-GROUPES ADDITIFS DE NOMBRES RÉELS

par Jean-Pierre BOREL (*)
[Univ. Limoges]

Abstract. - Let $Y = (y_k)$ an infinitely increasing sequence of positive real numbers, and $X = (x_n)$ the increasing sequence of all numbers $\sum_k m_k y_k$, with positive integer coefficients. We study the set of all positive real numbers α such that the sequence (αx_n) is uniformly distributed modulo 1 .

1. Quelques définitions.

1.1. - Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des suites croissantes au sens large $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, avec :

$$0 \leq x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty .$$

Lorsque $X \in \mathcal{Q}$, nous poserons :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $A_X(x, t) = \sum_{x_n\leq x} e^{2\pi i t x_n}$
- $A_X(x) = A_X(x, 0)$
- $B(x) = \{\alpha \in \mathbb{R}_+^*/(\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1$\}$ ensemble normal associé à X
- $F_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sx_n}$.

La série formelle $F_X(s)$ est, lorsque $\lim_{n\to+\infty} \log n/x_n = 0$, alsolument uniformément convergente sur tout demi-plan $\mathrm{Re}(x) \geq \alpha > 0$, donc définit sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$ une fonction holomorphe, telle que

$$F_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sx_n} = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dA_X(x) . \tag{1}$$

Définition. - Nous définissons dans $\mathcal{Q}$ une addition par la relation entre séries formelles

$$F_X . F_Z = F_{X+Z} .$$

Si $X = (x_n)$ et $Z = (z_m)$, il est facile de voir que $X + Z$ est la suite croissante des $x_n + z_m$, où (n, m) décrit $\mathbb{N}^2$. D'où la relation :

$$A_{X+Z}(x, t) = \sum_{z_m\leq x} A_X(x - z_m, t)\, e^{2\pi i t z_m} . \tag{2}$$

(*) Texte reçu le 11 juin 1979.
Jean-Pierre BOREL, Mathématiques, Université de Limoges, 123 rue Albert Thomas, 87060 LIMOGES CEDEX.

1.2 DEFINITION. - Nous dirons qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ est à croissance régulière, noté $f \in \mathcal{R}$, si f croît avec x vers $+\infty$ et si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x-1)}{f(x)} = 1 .$$

Il est facile de voir que si f croît avec x vers $+\infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in \mathcal{R}$,

(ii) $\exists\, y > 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x-y)}{f(x)} = 1$,

(iii) $\forall\, y > 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x-y)}{f(x)} = 1$.

D'autre part, $f \in \mathcal{R}$ si, et seulement si, la fonction qui à x associe $f(\log x)$ est une "slowly oscillating function" au sens de [6]. En utilisant un résultat obtenu par PARAMESWARAN dans [6], les fonctions de $\mathcal{R}$ sont caractérisées par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad \text{croissante}$$

(3)
$$\exists\, A > 0 ,\ \exists\, \delta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ continue t.q.} \begin{cases} f(x) \sim A \exp\left(\int_0^x \delta(u)du\right) \quad (x \to +\infty) \\ \lim_{u\to\infty} \delta(u) = 0 \\ \int_0^{+\infty} \delta(u)\, du = +\infty . \end{cases}$$

2. Ensemble normal associé à la somme de deux suites.

L'étude de l'ensemble $B(X)$ n'est intéressante que si $X \in \mathcal{D}'$, ensemble des suites de $\mathcal{D}$ telles que $A_X \in \mathcal{R}$. En effet, le théorème 1.3 de [5] entraîne facilement

(4)
$$X \notin \mathcal{D}' \Rightarrow B(X) = \emptyset$$

(voir par exemple [3] pour la démonstration de cette propriété).

PROPOSITION 1. - L'ensemble $\mathcal{D}'$ est stable par addition.

C'est une conséquence de (2), utilisée pour $t = 0$; soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors $X \in \mathcal{D}'$ entraîne

$$\exists\, y ,\ x > y \Rightarrow A_X(x) - A_X(x-1) \leq \varepsilon A_X(x) .$$

Donc

$$\begin{aligned} A_{X+Z}(x) - A_{X+Z}(x-1) &= \sum_{z_n\leq x} A_X(x-z_n) - A_X(x-z_n-1) \\ &\leq \varepsilon \sum_{z_n\leq x} A_X(x-z_n) + \sum_{x-z_n\leq y} A_X(x-z_n) - A_X(x-z_n-1) \\ &\leq \varepsilon A_{X+Z}(x) + A_X(y)(A_Z(x) - A_Z(x-y)) . \end{aligned}$$

Or $Z \in \mathcal{D}'$ entraîne $A_Z(x) - A_Z(x-y) = o(A_Z(x)) = o(A_{X+Z}(x))$. D'où le résultat.

PROPOSITION 2. - Soit $B'(X)$ l'ensemble des $\alpha > 0$ tels que

$$\lim_{x\to+\infty} A_X(x)^{-1} A_X(x , \alpha) = 0 .$$

Alors $X + Z \in \mathcal{D}'$ entraîne

$$B'(X) \cup B'(Z) \subset B'(X + Z) .$$

La démonstration est analogue à la précédente : si $\alpha \in B'(X)$, on utilise (2) avec $t = \alpha$ pour majorer $|A_{X+Z}(x , t)|$, et l'on obtient $\alpha \in B(X + Z)$. Le raisonnement est le même si $\alpha \in B'(Z)$.

Or, pour des suites croissantes au sens large, le critère de Weyl s'écrit (voir [3], théorème 1.1) :

$$B(X) = \bigcap_{q\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{q} B'(X) \tag{5}$$

d'où le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - Si $X + Z \in \mathcal{D}'$, on a $B(X) \cup B(Z) \subset B(X + Z)$.

Cette dernière inclusion peut être stricte. Elle peut être interprétée à l'aide des fonctions F . En effet, si $X \in \mathcal{D}'$, F_X est holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$ (la caractérisation (2) entraîne que $A_X(x) = O(e^{\lambda x})$ pour tout $\lambda > 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} \log n/x_n = 0$). La relation (1) est alors valide. $B'(X)$ est alors essentiellement l'ensemble des α tels que

$$\lim_{\sigma\to 0^+} F_X(\sigma)^{-1} F_X(\sigma - 2\pi i\alpha) = 0$$

(voir par exemple [8]). Si $B''(X)$ est l'ensemble de ces α , l'inclusion

$$B''(X) \cup B''(Z) \subset B''(X + Z)$$

est immédiate.

3. Spectre d'une suite.

Soit $Y = (y_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante au sens large, finie ou infinie, de nombres réels, telle que $y_1 > 0$, et y_k tend vers $+\infty$ avec k si Y est infinie. Si $y > 0$, nous noterons $\langle y\rangle$ la suite $(ny)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, dans ces conditions, la suite $\langle Y\rangle$:

$$\langle Y\rangle = +_k \langle y_k\rangle = \langle y_1\rangle + \langle y_2\rangle + \dots$$

appartient à $\mathcal{D}$. Cette suite décrit le semi-groupe additif d'ensemble de générateurs Y , chaque élément étant compté autant de fois qu'il a d'écritures différentes. La relation sur les fonctions devient :

$$F_{\langle Y\rangle} = \prod_k F_{\langle y_k\rangle} \quad \text{et} \quad F_{\langle y_k\rangle}(s) = 1/(1 - e^{-sy_k}) .$$

Nous définirons le dénominateur $d = \mathrm{den}(Y)$ de la suite Y par :
$d = \sup_{y\in Y} \mathrm{den}(y/y_1)$ où $\mathrm{den}(x) = \inf_{x=p/q}|q|$ (on pose par convention $\inf \emptyset = +\infty$).

Enfin, nous définirons le <u>spectre de la suite</u> Y :

$$\mathrm{Spec}(Y) = \underset{\sim}{R}_+^* - B(\langle Y\rangle) .$$

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> $X = \langle Y\rangle$. <u>Trois cas sont alors possibles</u> :

1° $X \notin \mathbb{Q}'$, <u>alors</u> $\mathrm{Spec}(Y) = \underset{\sim}{R}_+^*$

2° $X \in \mathbb{Q}'$ <u>et</u> $\mathrm{den}(Y) < +\infty$, <u>alors</u> $\mathrm{Spec}(Y) = y_1^{-1}\, \underset{\sim}{Q}_+^*$

3° $X \in \mathbb{Q}'$ <u>et</u> $\mathrm{den}(Y) = +\infty$, <u>alors</u> $\mathrm{Spec}(Y) = \emptyset$.

Ce résultat provient de (4), et de la proposition 2, utilisée avec

$$X = \langle Y\rangle = \langle Y^{(k)}\rangle + \langle y_k\rangle ,$$

où $Y^{(k)}$ est la suite Y privée de y_k . Alors si $\langle Y\rangle \in \mathbb{Q}'$, cela entraîne

$$\{\alpha > 0/\alpha y_k \notin \underset{\sim}{Z}\} = B'(\langle y_k\rangle) \subset B'(X) .$$

Et ceci étant vrai pour tout k , (5) entraîne

$$\{\alpha > 0/\forall\, q \in \underset{\sim}{N}^* ,\ \exists\, k ,\ q\alpha y_k \notin \underset{\sim}{Z}\} \subset B(X) .$$

L'inclusion inverse est immédiate. $\mathrm{Spec}(Y)$ s'en déduit facilement.

Si Y est donnée, étudier la répartition modulo 1 de la suite $\langle Y\rangle$ qui décrit le semi-groupe associé revient donc à déterminer :

Si $\langle Y\rangle$ appartient ou non à $\mathbb{Q}'$, donc à étudier la fonction $A_{\langle Y\rangle}$.

Si le dénominateur $d = \mathrm{den}(Y)$ est fini ou non.

Le premier problème sera l'objet des chapitres suivants, et n'est pas résolu dans tous les cas.

Le second est bien plus simple, puisque trois cas seulement sont possibles :

<u>Cas 1</u> : $\exists\, k ,\ y_k/y_1 \notin \underset{\sim}{Q}$, $d = +\infty$

<u>Cas 2</u> : $Y \subset y_1\, \underset{\sim}{Q}$ et $\overline{\lim}\, \mathrm{den}(y_k/y_1) = +\infty$, $d = +\infty$

<u>Cas 3</u> : $\exists\, n \in \underset{\sim}{N} ,\ nY \subset y_1\, \underset{\sim}{Z}$, $d < +\infty$

le cas 2 étant impossible si la suite Y est finie.

4. <u>Exemples des suites</u> Y <u>telles que</u> $\langle Y\rangle \in \mathbb{Q}'$.

4.1. - La fonction $A_{\langle Y\rangle}$ a été étudiée, pour certaines suites Y , dans le cadre de la théorie des partitions. Dans le cas particulier où Y est la suite des entiers strictement positifs, $A_{\langle Y\rangle}(x) - A_{\langle Y\rangle}(x-1)$ est le nombre de partitions $p([x])$ de l'entier $[x]$. Dans ce cas :

$$\langle Y\rangle \in \mathbb{Q}' \Longleftrightarrow p(N) = o(\textstyle\sum_{n \leq N} p(n))$$

et l'équivalent $p(n) \sim (e^{\pi\sqrt{2n/3}})/(4\sqrt{3}n)$ entraîne le résultat.

Des conditions suffisantes pour que $A_{\langle Y\rangle} \in \mathcal{R}$ ont été obtenues, pour une suite Y infinie. Citons par exemple :

$$\begin{cases} A_{\langle Y\rangle}(x) = Bx^{\beta} + R(x) \ , \quad B > 0 \ ; \quad \beta > 0 \\ \int_0^x \frac{R(u)}{u}\, du = b \log x + c + O(1) \quad (b \in \mathbb{R} \ , \quad c \in \mathbb{R}), \end{cases}$$ (INGHAM, 1941, [4])

Y est une suite strictement croissante d'entiers (BATEMAN et ERDÖS, 1956, [1])

$\overline{\lim}_{k\to+\infty}\, y_{k-1}/y_k < 1$ (W. SCHWARZ, 1969, [7]).

Ces conditions proviennent de l'étude, par des méthodes analytiques, de la fonction $(A_{\langle Y\rangle}(x) - A_{\langle Y\rangle}(x-y))/(A_{\langle Y\rangle}(x))$ dont un équivalent quand $x \to +\infty$ est obtenu, ce qui permet de montrer qu'elle tend vers 0.

La méthode de BATEMAN et ERDÖS est très différente. Nous allons utiliser une méthode analogue, pour généraliser ces résultats.

THÉORÈME 2. - Soit $Y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et ψ une application croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Supposons

(*) $\underline{\lim}_{k\to+\infty}\, \psi(y_k)(y_{k+1} - y_k) = \mu > 0$

(a) Si Y vérifie (*) avec $\psi \equiv 1$, alors $A_{\langle Y\rangle} \in \mathcal{R}$.

(b) Si Y vérifie (*) avec une fonction ψ telle que

(**) $\lim_{x\to+\infty} h(x)/(\psi(x)\log x) = +\infty$, où $h = h(x)$ est défini par

$$hy_h \leqslant x < (h+1)y_{h+1} \ ,$$

alors $A_{\langle Y\rangle} \in \mathcal{R}$.

COROLLAIRE. - Soit $Y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\underline{\lim}_{k\to+\infty}\, y_k^{\alpha}(y_{k+1} - y_k) > 0$.

(a) Si $\alpha = 0$, $A_{\langle Y\rangle} \in \mathcal{R}$.

(b) Si $\alpha \in \left]0 \ , \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$, $A_{\langle Y\rangle} \in \mathcal{R}$ dès que

$$\lim_{k\to+\infty} y_k\, k^{1-1/\alpha} \log k = 0 \ .$$

Soit $X = \langle Y\rangle$, et $\mu' = \inf_{k\in\mathbb{N}^*} \psi(y_k)(y_{k+1} - y_k)$. Nous supposerons $\mu' > 0$ (sinon, on écrit $\langle Y\rangle = \langle Y_1\rangle + \langle Y_2\rangle$, où Y_2 est finie et Y_1 vérifie $\mu_1' > 0$. Or il est aisé de montrer que $\langle Y_2\rangle \in \mathcal{D}'$, voir par exemple [3]).

Soit $x > 0$ donné, et $\lambda = \mu'/\psi(x)$. Soit x' quelconque, dans l'intervalle $]0 \ , x]$. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, soit $\Delta A_X^{(q)}(x')$ le cardinal de l'ensemble $E_q(x')$ des combinaisons linéaires $\sum_{j=1}^{q} n_j\, y_{k_j}$ à coefficients dans $\mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle $]x' - \lambda \ , x']$, et telles que $k_1 < k_2 < \dots < k_j$. Alors

$$\Delta A_X(x') = \sum_{q=1}^{\infty} \Delta A_X^{(q)}(x') = A_X(x') - A_X(x' - \lambda) \ .$$

A chaque combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{q} n_j y_{k_j}$ de $E_q(x')$, on peut associer les q combinaisons linéaires :

(6) $$1 \leqslant i \leqslant q \ , \quad \sum_{j=1}^{q} m_{i,j}\, y_{k_j} \quad \text{avec} \quad m_{i,j} = n_j - \delta_{i,j} \ .$$

On obtient ainsi des éléments de la suite X , inférieurs ou égaux à x' . Les y_k concernés sont majorés par x , donc

$$\forall\ j\ ,\quad \forall\ j'\ ,\quad j \neq j' \Rightarrow |y_{k_j} - y_{k_{j'}}| \geqslant \lambda$$

et lorsque $\sum_{j=1}^{q} n_j y_{k_j}$ décrit $E_q(x')$ et q décrit $\underset{\sim}{N}^*$, les combinaisons de (6) sont toutes différentes. Cela entraîne, pour tout $Q \in \underset{\sim}{N}^*$:

(7) $$A_X(x') \geqslant \sum_{q=1}^{\infty} q\Delta A_X^{(q)}(x') \geqslant Q\Delta A_X(x') - Q \sum_{j=1}^{Q} \Delta A_X^{(q)}(x') \ .$$

LEMME 1.

$$\Delta A_X^{(q)}(x') \leqslant (q+1)\left(\frac{x'}{\lambda}\right)^{2q} .$$

En effet, dans les conditions considérées, les entiers $m_k = [y_k/\lambda]$ sont tous différents, et on peut supposer $m_1 \neq 0$ (en enlevant au besoin les y tels que $y < \mu'\ \psi(y_1)$. Or enlever un nombre fini de y ne change rien à l'appartenance $A_{\langle Y\rangle} \in \mathcal{R}$, remarque déjà faite). Donc :

$$\Delta A_X^{(q)}(x') \leqslant \sum_{n \in](x/\lambda)-1-q,x/\lambda]} P_q(n) \ ,$$

où $P_q(n)$ est le nombre de solutions de $n = \sum_{j=1}^{q} n_j m_{k_j}$, $n \in \underset{\sim}{N}$. Or $P_q(n) \leqslant n^{2q-1}$ ([1], inégalité (8)). D'où le résultat.

Donc, (7) entraîne, si $x \geqslant \lambda$:

$$\Delta A_X(x') \leqslant \frac{1}{Q} A_X(x) + 2Q^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{2Q}$$

en additionnant ces inégalités, avec $x' = x - n\lambda$ $(0 \leqslant n \leqslant [\frac{1}{\lambda}] + 1)$, nous obtenons :

(8) $$A_X(x) - A_X(x-1) \leqslant \left(\frac{\psi(x)}{\mu'} + 1\right)\left(\frac{1}{Q} A_X(x) + 2Q^2\left(\frac{x\psi(x)}{\mu'}\right)^{2Q}\right) .$$

LEMME 2. - <u>Si</u> $Y = (y_k)_{k \in \underset{\sim}{N}^*}$, $A_X(x)$ <u>croît plus vite que toute fonction polynomiale, et</u> $A_X(x) > c(e^k/\sqrt{k})$ <u>où</u> k <u>est défini par</u> $ky_k \leqslant x < (k+1)y_{k+1}$.

La formule (2), avec $t = 0$, permet d'obtenir par récurrence sur k

$$\forall\ x > 0\ ,\quad A_{\langle Y_{(k)}\rangle}(x) \geqslant \frac{x^k}{k!\ \prod_{j \leqslant k} y_j} \quad \text{où} \quad Y_{(k)} = (y_j)_{1 \leqslant j \leqslant k} \ .$$

D'où la première assertion. Soit k quelconque tel que $y_k \leqslant x$. Alors

$$A_{\langle Y\rangle}(x) \geqslant A_{\langle Y_{(k)}\rangle}(x) \geqslant \frac{x^k}{k!\ y_k^k} > c\,\frac{x^k\ e^k}{\sqrt{k}\ k^k\ y_k^k} \geqslant c\,\frac{e^k}{\sqrt{k}} \quad \text{si} \quad ky_k \leqslant x \ .$$

Si $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = L < +\infty$, on peut supposer $\psi \equiv 1$. Alors, Q étant fixé, (8) entraîne

$$\forall\ Q \in \underset{\sim}{N}^* \ , \quad \overline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{A_X(x) - A_X(x-1)}{A_X(x)} \leq \frac{1}{Q}$$

d'où $A_X \in \mathcal{R}$.

Si $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, le lemme 2 et la majoration (8) entraînent

$$\frac{A_X(x) - A_X(x-1)}{A_X(x)} \leq \frac{2}{\mu'} \frac{\psi(x)}{Q} + \frac{4c}{\mu'} \left(\frac{x\psi(x)}{\mu'}\right)^{2Q} \frac{\sqrt{h}}{e^h} , \tag{9}$$

où $h = h(x)$ est défini par $hy_h \leq x < (h+1)y_{h+1}$.

Prenons $Q = \left[\frac{h}{4 \log x}\right]$, et supposons que Q tend vers $+\infty$ avec x . Alors

$$Q^2\left(\frac{x\psi(x)}{\mu'}\right)^{2Q} \frac{\sqrt{h}}{e^h} \leq \exp\left(2 \log h + \frac{h}{2 \log x}\left(\log x + \log \psi(x) + \log \frac{1}{\mu'}\right) + \frac{1}{2} \log h - h\right) .$$

L'hypothèse (**) entraîne $\log \psi(x) \leq \log h + \log \log x = O(\log x)$. Donc $-h$ est le terme dominant sous l'exponentielle, et le second terme du membre de droite de (9) tend vers 0 . De même, $\frac{\psi(x)}{Q}$ tend vers 0 d'après (**) . Donc $A_X \in \mathcal{R}$.

Enfin, si Q ne tend pas vers $+\infty$ avec x , la condition (**) entraîne $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$, ce qui est impossible.

La partie (a) du corollaire est évidente. Supposons $\alpha > 0$. Le théorème 2 s'applique à Y lorsque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x^\alpha \log x} = +\infty .$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Alors, si h est assez grand

$$hy_h < \varepsilon h^{1+((1-\alpha)/\alpha)} \log^{-1/\alpha} h .$$

Donc si x est assez grand : $h = h(x) \geq h_0$ où h_0 est solution de

$$\varepsilon h_0^{1/\alpha} \log^{-1/\alpha} h_0 = x .$$

Or

$$\log h_0 \sim \alpha \log x \quad \text{et} \quad h_0 \sim \varepsilon^{-\alpha} x^\alpha \log x .$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $\liminf_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x^\alpha \log x} \geq \varepsilon^{-\alpha}$.

Remarques.

1° Si Y vérifie (*) avec $\psi(x) = x^\alpha$, $y_k \gg k^{1/1+\alpha}$. Donc le (b) du corollaire, qui a priori est vrai pour $\alpha \in]0, 1[$, n'est intéressant que si $\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{\alpha} - 1$, c'est-à-dire $\alpha \in]0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}[$.

2° Le théorème 2 contient les résultats de BATEMAN et ERDÖS, ainsi que ceux de W. SCHWARZ, mais pas celui d'INGHAM. Il permet de montrer que $A_{\langle Y\rangle} \in \mathcal{R}$ lorsque $y_k = k^\alpha$, $\alpha > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (d'après INGHAM, c'est vrai pour tout $\alpha > 0$). Mais il permet des suites pas très régulières par exemple avec $\alpha = 1/3$, y_k peut osciller entre $k^{3/4}$ et $k^2/\log k$ (tout en vérifiant (**) avec $\psi(x) = x^{1/3}$).

3° Formellement, on a la relation :

(10) $$F_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sx_n} = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - e^{-sy_k})^{-1} \quad \text{si} \quad X = \langle Y \rangle .$$

Il est facile d'en déduire que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-sx_n}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-sy_k}$ ont même abscisse de convergence σ_0 . Le cas intéressant est le cas $\sigma_0 = 0$, car la propriété (3) entraîne :

$$f \in \mathcal{R} \Longrightarrow \forall\ a > 0\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)\, e^{-ax} = 0\ .$$

Alors, on a pour $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$F_X(s) = s \int_0^{\infty} e^{-sx} A_X(x)\, dx = \exp\Big(s \int_0^{\infty} \frac{e^{-sx}}{1 - e^{-sx}} A_Y(x)\, dx\Big)\ .$$

Les études analytiques de la fonction A_X reposent sur cette formule.

Cette remarque permet de construire des suites Y telles que $F_{\langle Y\rangle}$ ait une abscisse de convergence nulle, mais avec $A_{\langle Y\rangle} \notin \mathcal{R}$. Il est probable que la croissance de y_k en fonction de k , lorsque $A_{\langle Y\rangle} \in \mathcal{R}$, peut être aussi petite que l'on veut, pourvu que $y_k/\log k$ tende vers $+\infty$ (d'où F_Y a une abscisse de convergence nulle). Mais il faut alors ajouter une condition de régularité de la croissance des y_k , d'autant plus forte que cette croissance est lente.

4.2. - Le résultat précédent suppose que la suite Y croît strictement, pour k assez grand.

Dans le cas contraire, nous obtenons des conditions suffisantes pour que $A_{\langle Y\rangle} \in \mathcal{R}$, avec une méthode totalement différente : le théorème 1 entraîne :

$$A_{\langle Y\rangle} \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow B(\langle Y\rangle) \neq \emptyset\ .$$

Il reste donc à trouver des conditions suffisantes sur le nombre $\alpha > 0$ pour que

(11) $$\forall\ q \in \underset{\sim}{N}^*\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} A_{\langle Y\rangle}(x)^{-1} A_{\langle Y\rangle}(x\ ,\ q\alpha) = 0$$

c'est-à-dire $q\alpha \in B'(\langle Y\rangle)$ pour tout $q \in \underset{\sim}{N}^*$, donc $\alpha \in B(\langle Y\rangle)$.

Cette méthode repose sur l'estimation des sommes trigonométriques

$$A_{\langle Y\rangle}(x\ ,\ q\alpha) = \sum_{\Sigma n_k y_k \leq x} \exp(2\pi i t \alpha \Sigma h_k\ y_k)$$

(voir [2] et [3]).

Le résultat essentiel est la majoration suivante.

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> $Y = (y_k)_{k\in \underset{\sim}{N}^*}$, ε <u>un nombre réel positif,</u> x <u>un élément de</u> $[y_k\ ,\ y_{k+1}[$ <u>et</u> $H = \{h_1\ ,\ h_2\ ,\ \ldots\ ,\ h_p\}$ <u>une partie de</u> $\{1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ k\}$ <u>rangée de manière croissante</u>.

<u>Soit</u> $t > 0$ <u>tel que</u> $ty_h \notin \underset{\sim}{N}$ <u>pour tout</u> $h \in H$. <u>Alors</u> :

$$A_X(x)^{-1}|A_X(x\ ,\ t)| \leq \varepsilon + c^{-1}\, \Psi(k\ ,\ p)(1 + \Phi_H(t))(30p\varepsilon^{-1}\ y_{h_p}/y_k)p$$

avec

$$X = \langle Y \rangle \ ; \quad c = \inf_{p \in \mathbb{N}^*} p! \frac{e^p}{p^p} \ ; \quad \Phi_H(t) = \prod_{k \in H} |1 - e^{2\pi i t y_k}|^{-1}$$

$$\Psi(k\ ,\ p) = \begin{cases} \frac{(2p)!}{p!} \frac{k 2^{k-2p}}{2p-1} & \underline{\text{si}} \quad 2p \leqslant k+1 \\ \frac{k!}{(k-p)!} & \underline{\text{si}} \quad 2p \geqslant k+1 \ . \end{cases}$$

Il reste à appliquer ce résultat à $t = q\alpha$, en choisissant convenablement p et H . Nous en déduisons les conditions suffisantes, pour que $A_{\langle Y \rangle} \in \mathcal{R}$

1° $\lim_{k \to +\infty} k^{-1} \log y_k > 0$

2° $\begin{cases} B(Y) \neq \emptyset \\ \text{et} \\ \text{il existe } c > 0\ ,\ C \in \mathbb{R} \text{ et une fonction } f \text{ de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R} \text{ tels que :} \end{cases}$

$$\forall\ x > 0\ , \quad f(x\ e^{-2/c}) \leqslant f(x) + C$$

$$\forall\ k \in \mathbb{N}^*\ , \quad \log y_k = c \log^2 k + f(k)\ ,$$

conditions qui permettent beaucoup d'égalités sur les y .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BATEMAN (P. T.) and ERDÖS (P.). - Monotonicity of partition functions, Mathematica, t. 3, 1956, p. 1-14.

[2] BOREL (J.-P.). - Equirépartition modulo 1 et semi-groupes additifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287, 1978, série A, p. 743-745.

[3] BOREL (J.-P.). - Equirépartition modulo 1 de la suite (αx_n) où x_n décrit un semi-groupe additif de nombres réels, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, 1978/79, exp. 7.

[4] INGHAM (A. E.). - A tauberian theorem for partitions, Annals of Math., t. 42, 1941, p. 1075-1090.

[5] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). - Uniform distribution of sequences. - London, John Wiley and Sons, 1974 (Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience).

[6] PARAMESWARAN (S.). - Partition functions whose logarithms are slowly oscillating, Trans. Amer. math. Soc., t. 100, 1961, p. 217-240.

[7] SCHWARZ (W.). - Asymptotische Formeln für Partitionen, J. für reine und angew. Math., t. 234, 1969, p. 172-178.

[8] VAALER (J.). - A tauberian theorem related to Weyl's criterion, J. of Number Theory, t. 9, 1977, p. 71-78.