Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jacques Vélu

Le groupe cuspidal des courbes de Fermat

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, n° 2 (1978-1979), exp. n° 28, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_2_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 28, 11 p.

14 mai 1979

LE GROUPE CUSPIDAL DES COURBES DE FERMAT

par Jacques VÉLU ([1])
[Université de Caen]

I. Introduction.

Soit N un entier impair ≥ 1. La courbe F_N de genre $((N-1)(N-2))/2$ définie sur $\underset{\sim}{Q}$ par l'équation projective non singulière

$$X^N + Y^N + Z^N = 0$$

possède sur le corps $\underset{\sim}{Q}(\mu_N)$ les $3N$ points suivants :

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= (\ 0 : -\zeta^\alpha : 1\ ) \\ B(\beta) &= (\ 1 : 0 : -\zeta^\beta\ ) \\ C(\gamma) &= (-\zeta^\gamma : 1 : 0\ ) \end{aligned} \tag{1}$$

où $\zeta = e^{2\pi i/N}$ et α, β, γ parcourrent $\underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z}$. Nous nommerons ces points les "pointes" de F_N ([2]) et, dans la suite, les lettres α, β et γ désigneront toujours des éléments de $\underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z}$.

Les fonctions

$$x = \frac{Y}{Z}, \quad y = \frac{Z}{X}, \quad z = \frac{X}{Y} \tag{2}$$

ont pour diviseurs

$$\begin{aligned} \operatorname{div} x &= \textstyle\sum_\beta B(\beta) - \sum_\gamma C(\gamma) \\ \operatorname{div} y &= \textstyle\sum_\gamma C(\gamma) - \sum_\alpha A(\alpha) \\ \operatorname{div} z &= \textstyle\sum_\alpha A(\alpha) - \sum_\beta B(\beta)\ . \end{aligned} \tag{3}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x + \zeta^\alpha) &= NA(\alpha) - \textstyle\sum_\gamma C(\gamma) \\ \operatorname{div}(y + \zeta^\beta) &= NB(\beta) - \textstyle\sum_\alpha A(\alpha) \\ \operatorname{div}(z + \zeta^\gamma) &= NC(\gamma) - \textstyle\sum_\beta B(\beta)\ . \end{aligned} \tag{4}$$

Soit J la jacobienne de F_N. Appelons groupe cuspidal le sous-groupe C_N de $J(\underset{\sim}{Q}(\mu_N))$ engendré par les diviseurs de degré 0 de F_N dont le support est formé

([1]) Texte reçu le 3 janvier 1980.
Jacques VÉLU, Mathématiques pures, Université de Caen, Esplanade de la Paix, 14032 CAEN CEDEX.

([2]) Dans [1] la surface de Riemann $F_N(\underset{\sim}{C})$ est décrite comme quotient du demi-plan de Poincaré par un sous-groupe de $SL(2, \underset{\sim}{Z})$ et les pointes de F_N sont les pointes au sens modulaire.

de pointes, c'est-à-dire l'ensemble des expressions

$$R = \sum_\alpha \lambda(\alpha)\, A(\alpha) + \sum_\beta \mu(\beta)\, B(\beta) + \sum_\gamma \nu(\gamma)\, C(\gamma) , \tag{5}$$

où $\lambda(\alpha)$, $\mu(\beta)$, $\nu(\gamma)$ désignent des entiers tels que

$$\sum_\alpha \lambda(\alpha) + \sum_\beta \mu(\beta) + \sum_\gamma \nu(\gamma) = 0 .$$

Les relations (4) montrent que

$$\begin{aligned} NR &= \operatorname{div} \prod_{\alpha,\beta,\gamma} (x+\zeta^\alpha)^{\lambda(\alpha)} (y+\zeta^\beta)^{\mu(\beta)} (z+\zeta^\gamma)^{\nu(\gamma)}\ x^{\sum_\gamma \nu(\gamma)}\ y^{-\sum_\beta \mu(\beta)} , \\ &= \prod_{\alpha,\beta,\gamma} (Y+\zeta^\alpha Z)^{\lambda(\alpha)} (Z + \zeta^\beta X)^{\mu(\beta)} (X + \zeta^\gamma Y)^{\nu(\gamma)} , \end{aligned} \tag{6}$$

et par conséquent C_N est un groupe abélien fini annulé par N .

Dans [2], ROHRLICH a démontré ([3]), après des calculs effrayants, le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - *Si* $N > 1$, *le groupe* C_N *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{3N-7}$.

Nous nous proposons d'en donner ici une démonstration moins pénible, et d'apporter quelques compléments, par exemple, l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_N)/\mathbb{Q})$ sur C_N .

THÉORÈME 2. - *En tant que* $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_N)/\mathbb{Q})$*-module,* C_N *est isomorphe à* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mu_3$ *si* $N = 3$, *et à* $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \times (\mu_N^{\otimes N-2}) \times (\mu_N^{\otimes N-3})^2 \times (\prod_{k=1}^{N-4} \mu_N^{\otimes k})^3$ *si* N *est premier impair différent de* 3 .

La démonstration du théorème 1 consiste à calculer $e(R , D)$, le symbole de Weil d'un élément R de C_N et d'un point D d'ordre N de $J(\overline{\mathbb{Q}})$, ce qui permet grâce à la non dégénerescence de ce symbole de déterminer toutes les relations liant les éléments de C_N .

II. L'homologie entière de F_N .

1. Automorphismes de F_N .

Notons π le morphisme de F_N dans F_1 défini par $\pi(X:Y:Z) = (X^N:Y^N:Z^N)$. Posons

$$A = \pi(A(\alpha)) , \quad B = \pi(B(\beta)) , \quad C = \pi(C(\gamma)) .$$

Alors F_N est un revêtement de F_1 , ramifié seulement en A , B et C , de degré N^2 , et F_1 est le quotient de F_N par l'action du groupe d'automorphismes Λ_N de F_N , isomorphe à μ_N^2 , engendré par

$$\begin{aligned} a &: (X : Y : Z) \longmapsto (\zeta X : Y : Z) \\ b &: (X : Y : Z) \longmapsto (X : \zeta Y : Z) \\ c &: (X : Y : Z) \longmapsto (X : Y : \zeta Z) . \end{aligned}$$

([3]) ROHRLICH étudie la courbe $X^N + Y^N = Z^N$ sans restriction de parité sur N ; notre méthode s'étend sans difficulté au cas où N est pair.

Tout élément de Λ_N est de la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, et $a^\alpha b^\beta c^\gamma = 1$ si, et seulement si, $\alpha = \beta = \gamma$.

L'action de a, b, c sur les pointes est donnée par

(7)

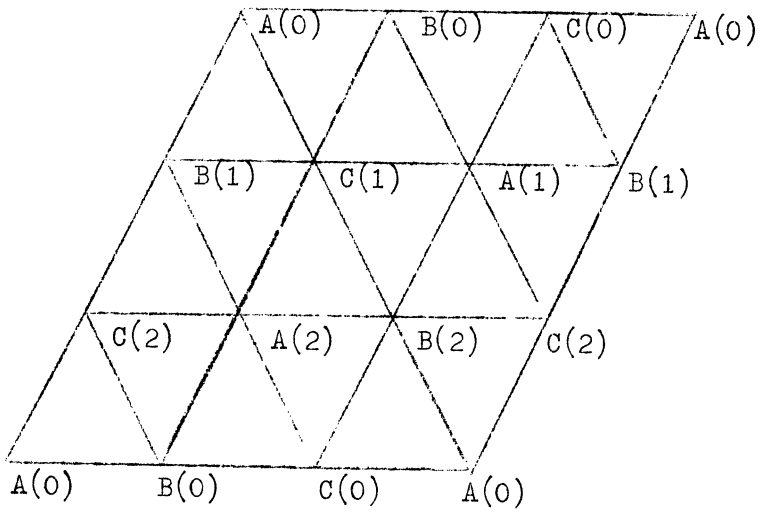
	$A(\alpha)$	$B(\beta)$	$C(\gamma)$
a	$A(\alpha)$	$B(\beta - 1)$	$C(\gamma + 1)$
b	$A(\alpha + 1)$	$B(\beta)$	$C(\gamma - 1)$
c	$A(\alpha - 1)$	$B(\beta + 1)$	$C(\gamma)$

Enfin, le groupe $\mathfrak{S}_3$ opère sur F_N par échange des coordonnées X, Y et Z, et nous donnerons toujours les résultats sous une forme symétrique pour cette action.

2. La triangulation cuspidale de F_N.

Le lieu $F_1(\mathbb{R}) \subset F_1(\mathbb{C})$ est un cercle passant par A, B, C qui partage la sphère $F_1(\mathbb{C})$ en deux triangles T^+ et T^- dont il porte les 3 côtés communs $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Dans $F_N(\mathbb{C})$, l'ensemble $\pi^{-1}(F_1(\mathbb{R}))$ est la réunion des arêtes d'une triangulation τ que nous appellerons la triangulation cuspidale de F_N. Elle a pour sommets les $3N$ pointes de F_N ; ses arêtes sont les $3N^2$ relèvements $[A(\alpha)\ B(\beta)]$, $[B(\beta)\ C(\gamma)]$ et $[C(\gamma)\ A(\alpha)]$ de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$; quant à ses $2N^2$ faces ce sont les triangles $[A(\alpha)\ B(\beta)\ C(\gamma)]$, avec $\alpha+\beta+\gamma = \pm \frac{1}{2}$ selon que $\pi[A(\alpha)\ B(\beta)\ C(\gamma)] = T^+$ ou T^-.

Remarque. - Par relèvement, nous pouvons déduire de τ une triangulation d'un revêtement universel U de $F_N(\mathbb{C})$, et un domaine fondamental dans U représentant $F_N(\mathbb{C})$. Quand $N = 3$, U est isomorphe à $\mathbb{C}$, et nous obtenons



pour domaine fondamental, retrouvant ainsi le réseau des périodes de la courbe elliptique $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$.

3. Les différentielles holomorphes de F_N .

L'espace vectoriel des différentielles holomorphes de F_N admet pour base les $((N-1)(N-2))/2$ différentielles

$$w(\lambda\mu\nu) = X^\lambda Y^\mu Z^\nu\left[\frac{1}{Z^N}\left(\frac{dX}{X} - \frac{dY}{Y}\right)\right] = z^{\lambda-1} x^{N-\nu} dz ,$$

où $\lambda + \mu + \nu = N$ et $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$. On remarquera que $(1/Z^N)\left(\frac{dX}{X} - \frac{dY}{Y}\right)$ est invariante par permutation circulaire sur X , Y , Z et que

$$(8) \qquad \operatorname{div} w(\lambda\mu\nu) = (\lambda - 1)\sum_\alpha A(\alpha) + (\mu - 1)\sum_\beta B(\beta) + (\nu - 1)\sum_\gamma C(\gamma) .$$

L'action de Λ_N sur ces différentielles est donnée par

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma w(\lambda\mu\nu) = \zeta^{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma} w(\lambda\mu\nu) .$$

Le groupe $H_1(F_N(\underset{\sim}{C}) , \underset{\sim}{Z})$ est un module sous l'action de $\underset{\sim}{Z}[\Lambda_N]$. Si

$$t \longmapsto (z(t) , x(t) , y(t))$$

est un chemin g dans $F_N(\underset{\sim}{C})$, alors $a^\alpha b^\beta c^\gamma g$ est le chemin

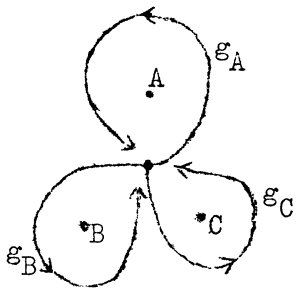
$$t \longmapsto (\zeta^{\alpha-\beta} z(t) , \zeta^{\beta-\gamma} x(t) , \zeta^{\gamma-\alpha} y(t)) ,$$

et nous avons

$$(10) \qquad \int_{a^\alpha b^\beta c^\gamma g} w(\lambda\mu\nu) = \zeta^{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma} \int_g w(\lambda\mu\nu) .$$

4. Le $\underset{\sim}{Z}[\Lambda_N]$-module $H_1(F_N(\underset{\sim}{C}) , \underset{\sim}{Z})$.

Soit $F_1' = F_1(\underset{\sim}{C}) - \{A , B , C\}$. Alors $F_N' = \pi^{-1}(F_1')$ est un revêtement non ramifié de F_1' , et F_1' est le quotient de F_N' par Λ_N . Fixons un point u_N F_N' , et posons $u_1 = \pi(u_N)$. Par la projection π , le groupe $G_N = \pi_1(F_N(\underset{\sim}{C}) , u_N)$ s'injecte dans $G_1 = \pi_1(F_1' , u_1)$ de sorte que son image H_N s'identifie avec les classes de lacets dont les indices, par rapport à A , B et C , sont divisibles par N . Le quotient G_1/H_N est isomorphe à Λ_N , donc à $(\underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z})^2$. Or G_1 est engendré par g_A , g_B et g_C



qui sont liés par la relation $g_C\, g_B\, g_A = 1$; comme c'est un groupe libre à deux générateurs, g_A et g_B par exemple, nous obtenons immédiatement que H_N est le sous-groupe de G_1 engendré par g_A^N , g_B^N , g_C^N et les éléments de la forme $g^{-1}(g_B\, g_C\, g_A)\, g$ avec g dans G_1 .

Dans F_N' les relèvements de g_A^N , g_B^N et g_C^N consistent chacun en un tour

autour d'une pointe et sont donc homologues à zéro dans $F_N(\mathbb{C})$. D'autre part, si g est un lacet de F_1' dont le relèvement dans F_N' a pour extrémités u_N et u_N', il existe $\lambda \in \Lambda_N$ tel que $\lambda(u_N) = u_N'$, et pour tout lacet h de F_N' , le relèvement dans F_N' du lacet $g^{-1}(\pi h)\, g$ de F_1' est homologue à $\lambda(h)$. D'où le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Le $\mathbb{Z}[\Lambda_N]$-module $H_1(F_N(\mathbb{C}) , \mathbb{Z})$ est engendré par un relèvement h quelconque dans F_N' de $g_B\, g_C\, g_A$.

Nous allons donner maintenant une amélioration quantitative de ce résultat en calculant $N[A(\alpha)\ C(\gamma)]$, $N[C(\gamma)\ B(\beta)]$ et $N[B(\beta)\ A(\alpha)]$ en fonction de h .

5. Calcul d'intégrales.

Soient α , β , γ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. L'image de $[0 , 1]$ dans $F_N(\mathbb{C})$ par l'application

$$t \longmapsto (z(t) , x(t) , y(t)) = (-\zeta^{\gamma} t , -\zeta^{\alpha}(1 - t^N)^{-1/N} , \zeta^{\beta} t^{-1}(1 - t^N)^{1/N})$$

est l'arête $[A(\alpha)\ C(\gamma)]$ de la triangulation cuspidale. Par conséquent,

$$\int_{A(\alpha)}^{C(\gamma)} w(\lambda\mu\nu) = (-1)^{\mu}\, \zeta^{\lambda\gamma - \nu\alpha} \int_0^1 t^{\lambda-1}(1 - t^N)^{(\nu-N)/N}\, dt ,$$

ce qui donne, en posant $t = u^{1/N}$,

$$\int_{A(\alpha)}^{C(\gamma)} w(\lambda\mu\nu) = (-1)^{\mu}\, \frac{\zeta^{\lambda\gamma-\nu\alpha}}{N} \int_0^1 u^{(\lambda/N)-1}(1 - u)^{(\nu/N)-1}\, du .$$

Or, l'intégrale du membre de droite vaut $(\Gamma(\lambda/N)\ \Gamma(\nu/N))/\Gamma((\lambda + \nu)/N)$.

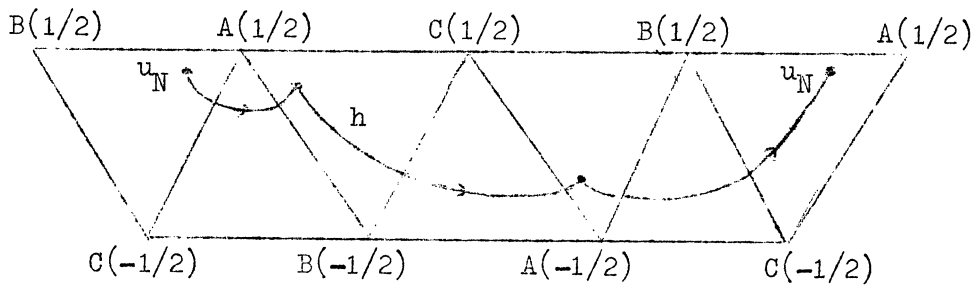
La formule des compléments de la fonction Γ et la symétrie des formules sous l'action de $\mathfrak{S}_3$ donnent

$$\int_{A(\alpha)}^{C(\gamma)} w(\lambda\mu\nu) = (-1)^{\mu} \sin\frac{\pi\mu}{N}\, \zeta^{\lambda\gamma-\nu\alpha}\, \frac{\Gamma(\lambda/N)\ \Gamma(\mu/N)\ \Gamma(\nu/N)}{\pi N}$$

$$\int_{C(\gamma)}^{B(\beta)} w(\lambda\mu\nu) = (-1)^{\lambda} \sin\frac{\pi\lambda}{N}\, \zeta^{\nu\beta-\mu\gamma}\, \frac{\Gamma(\lambda/N)\ \Gamma(\mu/N)\ \Gamma(\nu/N)}{\pi N} \qquad (11)$$

$$\int_{B(\beta)}^{A(\alpha)} w(\lambda\mu\nu) = (-1)^{\nu} \sin\frac{\pi\nu}{N}\, \zeta^{\mu\alpha-\lambda\beta}\, \frac{\Gamma(\lambda/N)\ \Gamma(\mu/N)\ \Gamma(\nu/N)}{\pi N}$$

Nous choisissons maintenant un relèvement de h de $g_B\, g_C\, g_A$ dans F_N' en prenant pour u_N un point du triangle $[A(1/2)\ B(1/2)\ C(-1/2)]$. Alors h est homologue dans F_N au lacet réunion des arêtes $[A(1/2)\ C(1/2]$, $[C(1/2)\ B(1/2)]$ et $[B(1/2)\ A(1/2)]$.



On remarquera que la classe de h dans $H_1(F_N(\underset{\sim}{C}), \underset{\sim}{Z})$ est stable par conjugaison complexe.

Si G est un groupe cyclique d'ordre N écrit multiplicativement, et si $g \in G$, nous notons $g^{1/2} = g^{(N+1)/2}$; c'est l'unique élément g' de G tel que $g'^2 = g$. Avec cette notation nous avons

$$(-1)^{\lambda} \sin \frac{\pi\lambda}{N} = \frac{\zeta^{\lambda/2} - \zeta^{-\lambda/2}}{2i},$$

et des formules analogues pour μ et ν, de sorte que

$$(12) \qquad \int_h w(\lambda\mu\nu) = \frac{\Gamma(\lambda/N)\Gamma(\mu/N)\Gamma(\nu/N)}{2\pi i N}(\zeta^{-\lambda/2}-\zeta^{\lambda/2})(\zeta^{-\mu/2}-\zeta^{\mu/2})(\zeta^{-\nu/2}-\zeta^{\nu/2})$$

ou encore

$$(13) \qquad \int_h w(\lambda\mu\nu) = \frac{4\Gamma(\lambda/N)\ \Gamma(\mu/N)\ \Gamma(\nu/N)}{\pi N} \sin\frac{\pi\lambda}{N} \sin\frac{\pi\mu}{N} \sin\frac{\pi\nu}{N}.$$

Il résulte des formules (11) et (12) que

$$(14) \qquad \int_{A(\alpha)}^{C(\gamma)} w(\lambda\mu\nu) = \frac{\zeta^{\lambda\gamma-\nu\alpha}}{(\zeta^{\lambda/2} - \zeta^{-\lambda/2})(\zeta^{\nu/2} - \zeta^{-\nu/2})} \int_h w(\lambda\mu\nu).$$

Or $H_1(F_N(\underset{\sim}{C}), \underset{\sim}{Q}) = H_1(F_N(\underset{\sim}{C}), \underset{\sim}{Z}) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \underset{\sim}{Q}$ est un $\underset{\sim}{Q}[\Lambda_N]$-module et dans $\underset{\sim}{Q}[\Lambda_N]$ les éléments $a^{1/2} - a^{-1/2}$, $b^{1/2} - b^{-1/2}$ et $c^{1/2} - c^{-1/2}$ sont inversibles, de sorte que nous pouvons réécrire (14) comme les égalités suivantes dans le $\underset{\sim}{Q}[\Lambda_N]$-$H_1(F_N(\underset{\sim}{C}), \underset{\sim}{Q})$:

$$(15) \qquad \begin{aligned} [A(\alpha)\ C(\gamma)] &= \frac{a^{\gamma} c^{-\alpha}}{(a^{1/2} - a^{-1/2})(c^{1/2} - c^{-1/2})}.h \\ [C(\gamma)\ B(\beta)] &= \frac{c^{\beta} b^{-\gamma}}{(c^{1/2} - c^{-1/2})(b^{1/2} - b^{-1/2})}.h \\ [B(\beta)\ A(\alpha)] &= \frac{b^{\alpha} a^{-\beta}}{(b^{1/2} - b^{-1/2})(a^{1/2} - a^{-1/2})}.h. \end{aligned}$$

Enfin, grâce à l'identité

$$\sum_{k=1}^{N-1}(a^k - 1)(c^k - 1) = N,$$

nous pouvons réécrire (15) sous la forme

$$(16) \qquad \begin{aligned} [A(\alpha)\ C(\gamma)] &= \frac{a^{\gamma+1/2} c^{-\alpha+1/2}}{N} \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{a^k - 1}{a - 1}\right)\left(\frac{c^k - 1}{c - 1}\right).h \\ [C(\gamma)\ B(\beta)] &= \frac{c^{\beta+1/2} b^{-\gamma+1/2}}{N} \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{c^k - 1}{c - 1}\right)\left(\frac{b^k - 1}{b - 1}\right).h \\ [B(\beta)\ A(\alpha)] &= \frac{b^{\alpha+1/2} a^{-\beta+1/2}}{N} \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{b^k - 1}{b - 1}\right)\left(\frac{a^k - 1}{a - 1}\right).h. \end{aligned}$$

III. Le symbole de Weil

1. Rappel.

Soient C une courbe projective non singulière définie sur $\underset{\sim}{C}$, N un entier

≥ 1 , D un diviseur de $\mathcal{C}$, et f une fonction sur $\mathcal{C}$ telle que

$$\operatorname{div} f = ND \ .$$

En adjoignant au corps des fonctions de $\mathcal{C}$, g telle que $g^N = f$, on obtient le corps des fonctions d'un revêtement non ramifié $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ possèdant un groupe d'automorphismes G isomorphe à μ_N , et $\mathcal{C}$ est le quotient de $\mathcal{C}'$ par l'action de G . Si $\sigma : (0 , 1) \to \mathcal{C}(\underset{\sim}{C})$ est un lacet tel que $\sigma(0) = \sigma(1) = u$ n'appartient pas au support de D , et si σ' est un relèvement de σ à $\mathcal{C}'(\underset{\sim}{C})$ tel que $\sigma'(0) = u'_1$, et $\sigma'(1) = u'_2$, alors u'_2 et u'_1 ont pour image u dans $\mathcal{C}$ et

$$\left[\frac{g(u'_2)}{g(u'_1)}\right]^N = \frac{f(u)}{f(u)} = 1 \ .$$

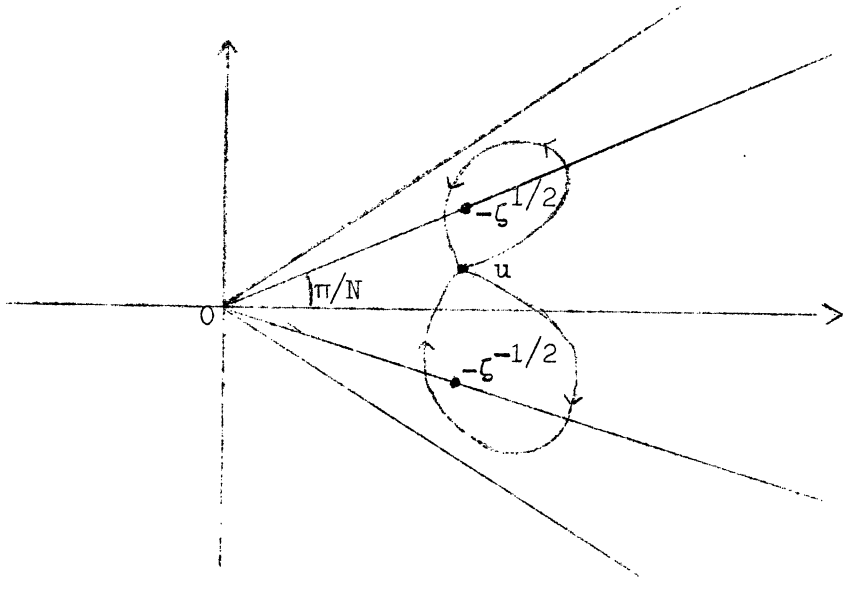
L'application qui associe $(g(u'_2)/g(u'_1))$ à σ' ne dépend que de la classe de σ dans $\Omega = H_1(\mathcal{C}(\underset{\sim}{C}) , \underset{\sim}{Z})$ qui n'est autre que le réseau des périodes de la jacobienne J de $\mathcal{C}$. On construit ainsi un homomorphisme de $\Omega/N\Omega$ dans μ_N , qui ne dépend en fait que de l'image de D dans J . D'où un accouplement entre le groupe J_N des points d'ordre N de J et $\Omega/N\Omega$ qui est isomorphe à $\frac{1}{N}\Omega/\Omega$ et à J_N ; c'est le symbole de Weil. Enfin, si a est un automorphisme de $\mathcal{C}$, l'accouplement $e(D , a\sigma)$ peut être calculé par la méthode précédente soit à l'aide du lacet $a\sigma$ et de la fonction f , soit à l'aide du lacet σ et de la fonction $f \circ a$ dont le diviseur est $a^{-1} D$, ce qui donne

$$e(D , a\sigma) = e(a^{-1} D , \sigma) \ . \tag{17}$$

2. Le calcul des symboles de Weil.

Nous allons appliquer ce qui vient d'être écrit aux diviseurs D de F_N ayant pour support des pointes de F_N . Il résulte du théorème 3 et de (17) qu'il suffit de calculer $e(R , h)$ pour un élément quelconque R de C_N afin de connaître complètement l'accouplement entre C_N et $H_1(F_N(\underset{\sim}{C}) , \underset{\sim}{Z})$.

Il est facile de suivre les valeurs prises par la fonction x quand on parcourt le lacet h .



Elles décrivent successivement deux boucles autour de $-\zeta^{1/2}$ et $-\zeta^{-1/2}$, la première dans le sens positif, la seconde dans le sens négatif. Par conséquent, l'indice de 0 est nul par rapport au lacet décrit par y, mais, par rapport au lacet décrit par $x+\zeta^{\alpha}$, il est égal à $+1$ si $\alpha = 1/2$, à -1 si $\alpha = -1/2$, et est nul dans les autres cas. Posons

$$\varepsilon(\alpha) = \begin{cases} \zeta & \text{si } \alpha = 1/2 \\ \zeta^{-1} & \text{si } \alpha = -1/2 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors entre l'extrémité et l'origine de h la fonction $\sqrt[N]{x+\zeta^{\alpha}}$ est multipliée par $\varepsilon(\alpha)$ tandis que $\sqrt[N]{x}$ est invariante. On montre de même que $\sqrt[N]{y+\zeta^{\beta}}$ est multipliée par $\varepsilon(\beta)$, que $\sqrt[N]{z+\zeta^{\gamma}}$ est multipliée par $\varepsilon(\gamma)$, et que $\sqrt[N]{y}$ et $\sqrt[N]{z}$ sont invariantes.

Nous sommes en mesure d'énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION. - Soit R l'élément de C_N défini par (5). Alors

$$e(R\ ,\ a^{\ell}\ b^{m}\ c^{n}\ h) = \zeta^{P}$$

avec

$$P = \lambda(1/2+m-n) - \lambda(-1/2+m-n) + \mu(1/2+n-\ell) - \mu(-1/2+n-\ell) + \nu(1/2+\ell-m) - \nu(-1/2+\ell-m)\ . \tag{18}$$

En effet, $e(R\ ,\ a^{\ell}\ b^{m}\ c^{n}\ h) = e(a^{-\ell}\ b^{-m}\ c^{-n}\ R\ ,\ h)$ d'après (17) et

$$a^{-\ell}\ b^{-m}\ c^{-n}\ R = \sum_{\alpha} \lambda(\alpha+m-n)\ A(\alpha) + \sum_{\beta} \mu(\beta+n-\ell)\ B(\beta) + \sum_{\gamma} \nu(\gamma+\ell-m)\ C(\gamma)\ .$$

La formule (6) permet d'écrire une fonction dont le diviseur est $a^{-\ell}\ b^{-m}\ c^{-n}\ R$. Elle est le produit, avec des puissances convenables de x, y, z, $x+\zeta^{\alpha}$, $y+\zeta^{\beta}$, $z+\zeta^{\gamma}$, et l'étude qui vient d'être faite montre qu'entre l'extrémité et l'origine de h elle est multipliée par

$$\prod_{\alpha,\beta,\gamma} \varepsilon(\alpha)^{\lambda(\alpha+m-n)}\ \varepsilon(\beta)^{\mu(\beta+n-\ell)}\ \varepsilon(\gamma)^{\nu(\gamma+\ell-m)}$$

ce qui, compte tenu de la définition de ε, donne le résultat énoncé dans la proposition.

3. Les relations dans C_N.

Pour que R défini par (5) soit nul, il faut et il suffit que $e(R, a^{\ell}\ b^{m}\ c^{n}\ h)=1$ pour tous ℓ, m et n car le symbole de Weil est non dégénéré. Par conséquent, il faut et il suffit que P, défini par (18), soit nul modulo N.

PROPOSITION. - Soient λ, μ, ν trois fonctions de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans lui-même

telles que

$$\lambda(1/2+m-n) - \lambda(-1/2+m-n) + \mu(1/2+n-\ell) - \mu(-1/2+n-\ell) + \nu(1/2+\ell-m) - \nu(-1/2+\ell-m) = 0 . \tag{19}$$

identiquement. Alors il existe u, v, w, u', v', w' et M dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= u + u' t + Mt^2 \\ \mu(t) &= v + v' t + Mt^2 \\ \nu(t) &= w + w' t + Mt^2 \end{aligned} \tag{20}$$

et ces nombres sont liés par la seule relation

$$u' + v' + w' = 0 . \tag{21}$$

Preuve. - On a

$$\nu(t) - \nu(t-1) = \mu(-t) - \mu(1-t) + \lambda(-1/2) - \lambda(1/2)$$

en faisant $m = n = 0$ et $\ell = t - 1/2$ dans (19), et par récurrence sur t

$$\nu(t) = \nu(0) - \mu(0) + \mu(-t) + t[\lambda(-1/2) - \lambda(1/2)] . \tag{22}$$

De même, en faisant $\ell = m = 0$ et $n = 1/2 - t$ dans (19), on obtient successivement

$$\lambda(t) - \lambda(t-1) = \mu(-t) - \mu(1-t) + \nu(-1/2) - \nu(1/2)$$

et par récurrence sur t

$$\lambda(t) = \lambda(0) - \mu(0) + \mu(-t) + t[\nu(-1/2) - \nu(1/2)] . \tag{23}$$

Enfin, en faisant $\ell = m = n = 0$ dans (19), il vient

$$\lambda(-1/2) - \lambda(1/2) + \mu(-1/2) - \mu(1/2) + \nu(1/2) - \nu(1/2) = 0 . \tag{24}$$

On reporte (22), (23) et (24) dans (19) afin d'obtenir

$$\mu(-1/2-m+n) + \mu(-1/2-\ell+m) + \mu(1/2+n-\ell) + \mu(1/2) = \mu(1/2-m+n) + \mu(1/2-\ell+m) + \mu(-1/2+n-\ell) + \mu(-1/2) .$$

Ensuite, on écrit cette égalité, d'abord avec $m - \ell = 1/2$ et $n - m = t - 1/2$, puis avec $m - \ell = 1/2$ et $n - m = t$, et on ajoute membre à membre pour trouver

$$\mu(t+1) - 2\mu(t) + \mu(t-1) = 2[\mu(1) - \mu(0) + \mu(-1/2) - \mu(1/2)] .$$

Cette équation fonctionnelle montre que les différences secondes de la fonction μ sont constantes. Par conséquent, il existe v, v' et M tels que

$$\mu(t) = v + v' t + Mt^2 .$$

En conduisant le calcul de façon semblable pour les fonctions λ et ν on montre qu'elles aussi sont des polynômes du second degré en t. Enfin, en repor-

tant ce résultat dans (19) on voit que le coefficient de t^2 est le même pour λ, μ et ν et que (21) doit être vérifié. On peut d'ailleurs calculer les coefficients des trinômes définissant λ, μ, ν en fonction de leurs valeurs en 0 et $\pm 1/2$ ce que donne

$$\lambda(t) = \lambda(0) + t[\lambda(1/2) - \lambda(-1/2)] + 2t^2[\lambda(1/2) - 2\lambda(0) + \lambda(-1/2)]$$

$$\mu(t) = \mu(0) + t[\mu(1/2) - \mu(-1/2)] + 2t^2[\mu(1/2) - 2\mu(0) + \mu(-1/2)]$$

$$\nu(t) = \nu(0) + t[\nu(1/2) - \nu(-1/2)] + 2t^2[\nu(1/2) - 2\nu(0) + \nu(-1/2)]$$

et (21) n'est autre que (24).

A présent nous pouvons terminer la démonstration du théorème 1. D'après la proposition précédente, les solutions (λ, μ, ν) de (19) sont combinaisons linéaires modulo N des 7 solutions particulières.

$\lambda(t)$	$\mu(t)$	$\nu(t)$
1	0	0
0	1	0
0	0	1
t	-t	0
0	t	-t
-t	0	t
t^2	t^2	t^2

ce qui montre que les éléments de C_N sont liés par les relations suivantes, où P désigne une pointe quelconque,

$$\sum_\alpha [A(\alpha) - P] = 0 \quad , \quad \sum_\beta [B(\beta) - P] = 0 \quad , \quad \sum_\gamma [C(\gamma) - P] = 0$$

$$\sum_k k[A(k) - B(k)] = 0 \ , \ \sum_k k[B(k) - C(k)] = 0 \ , \ \sum_k k[C(k) - A(k)] = 0$$

$$\sum_k k^2[A(k) + B(k) + C(k) - 3P] = 0$$

et que toute relation liant les pointes dans C_N est combinaison de celles-ci et de (4).

Pour démontrer le théorème 2, supposons N premier > 3, le cas $N = 3$ se traitant directement du fait que F_3 est une courbe elliptique.

Les diviseurs $B(0) - A(0)$ et $C(0) - A(0)$ engendrent un groupe isomorphe à $(\underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z})^2$ car il n'existe pas dans C_N, quand $N > 3$, de relation de la forme $\lambda A(0) + \mu B(0) + \nu C(0) = 0$ avec $\lambda + \mu + \nu = 0$. Ensuite,

$$\sum_{k=1}^{N-1} k^r[A(k) - A(0)] \ , \ \sum_{k=1}^{N-1} k^r[B(k) - A(0)] \ ,$$

et

$$\sum_{k=1}^{N-1} k^r[C(k) - A(0)]$$

engendrent dans C_N des groupes isomorphes à $\underline{\mu}^{\otimes N-r-1}$ et la connaissance des relations liant les éléments de C_N permet de déterminer quels sont parmi ces éléments ceux qui forment une base de C_N, donnant ainsi le théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FRICKE (R.). - Ueber die Substitutionsgruppen welche zu den aus dem Legendre'schen Integralmodul $k^2(w)$ gezogenen Wurzeln gehören, Math. Annalen, t. 28, 1887, p. 99-118.

[2] ROHRLICH (D. E.). - Points at infinity on the Fermat curves, Invent. Math., Berlin, t. 39, 1977, p. 95-127.