Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

GEORGES GRAS

Sur la construction des fonctions *L* *p*-adiques abéliennes

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, nº 2 (1978-1979), exp. nº 22, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_2_A1_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 22, 20 p.

19 mars 1979

SUR LA CONSTRUCTION DES FONCTIONS L p-ADIQUES ABÉLIENNES

par Georges GRAS (*)
[Université de Franche-Comté, Besançon]

Introduction

On peut dire, de façon assez schématique, que les constructions des fonctions L p-adiques abéliennes privilégient en un sens les caractères par rapport aux corps, et surtout considèrent séparément chaque caractère ψ : citons par exemple [14], [4], [1], [21], [2], où domine l'analyse p-adique (par exemple l'interpolation p-adique de nombres de Bernoulli attachés au caractère ψ), ensuite [12], [13], [3], [6], [8] (1), où les limites projectives sont dépendantes du caractère ψ , et leurs éléments interprétés en termes de séries formelles à coefficients dans l'anneau des valeurs de ψ , et enfin [15], [19], [18], [20], où les fonctions L p-adiques sont vues comme intégrales par rapport à une mesure p-adique dépendant de ψ .

Dans le même ordre d'idées, ces constructions utilisent une transformation fonctionnelle de nature très analytique, disons, pour fixer les idées, la transformation de Mellin des mesures ([15], chap. 4, § 3).

Or, grâce aux travaux bien connus d'IWASAWA, à ceux qui ont suivi, et enfin d'après les conjectures qui ont été formulées, on sait que les fonctions L_p ne sont pas seulement un analogue p-adique des fonctions L classiques mais qu'elles sont liées de façon profonde à l'arithmétique des corps abéliens, notamment au niveau de la structure des groupes de classes.

De ce fait nous avons pensé qu'il pouvait être utile d'élaborer une construction plus arithmétique des fonctions L p-adiques.

Le point de départ nous a été suggéré par les théorèmes d'annulation de certains groupes de classes réelles par $L_p(1 , \psi)$ que nous avons donnés dans [11] (et qui ont été généralisés dans [17] par B. ORIAT) : ces théorèmes d'annulation reposent essentiellement sur la possibilité de transformer, par la "Spiegelungsrelation" de LEOPOLDT [16], la propriété d'annulation de classes imaginaires par les éléments de STICKELBERGER en une propriété d'annulation de classes réelles ; on conçoit alors que c'est bien la "Spiegelungsrelation" qui fournit l'analogue arithmétique de la transformation fonctionnelle nécessaire à la construction des fonctions L_p .

Nous aurons donc essentiellement à définir cette transformation issue de la

---

(*) Texte reçu le 12 juin 1979.
Georges GRAS, E.R.A. au C.N.R.S. n° 070654, Université de Franche-Comté, 25030 BESANÇON CEDEX.

"Spiegelungsrelation" ; nous l'appellerons la transformation de Mellin arithmétique. Pour cela, nous travaillerons exclusivement dans des algèbres de groupes de Galois convenables, et non plus au niveau des caractères.

En résumé, notre résultat est le suivant : Soit K un corps abélien contenant les racines p-ièmes de l'unité (resp. 4e) si $p \neq 2$ (resp. $p = 2$) ; à partir des éléments de Stickelberger de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K nous définissons, au moyen de la transformation de Mellin arithmétique évoquée ci-dessus, un élément de la forme $\mathbb{S}^*_c(K , s)$, fonction de $s \in \mathbb{Z}_p$, appartenant à l'algèbre $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$, permettant d'engendrer toutes les fonctions $L_p(s , \psi)$ de K . Les propriétés intrinsèques de ces éléments (notamment les propriétés de projection dans une extension L/K) conduisent très naturellement, et en toute généralité, à celles des fonctions $L_p(s , \psi)$. Nous illustrons ce fait en montrant comment les propriétés connues se retrouvent, et en donnant un certain nombre de résultats (principalement ceux des chapitres IV et V) qui nous semblent nouveaux ou plus précis. Bien entendu, ces éléments $\mathbb{S}^*_c(K , s)$ sont adaptés à l'étude des groupes de classes comme $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$-modules (en $s = 0$ et en $s = 1$) et redonnent les théorèmes d'annulation évoqués plus haut.

Enfin nous montrons en maints endroits que cette méthode de construction apporte aussi des simplifications sur le plan de l'approche numérique.

I. Rappel de certains résultats

1. Eléments de Stickelberger.

Soit K une extension abélienne finie de $\mathbb{Q}$ de conducteur f_K et de groupe de Galois G_K ; on appelle élément de Stickelberger de K , l'élément de $\mathbb{Q}[G_K]$:

$$S(K) = {\sum_{a=1}^{f_K}}^{*} \left(\frac{K}{a}\right)^{-1} (a/f_K - 1/2) ,$$

où $\left(\frac{K}{a}\right)$ désigne le symbole d'Artin dans $K/\mathbb{Q}$, et où $\sum^*$ désigne la sommation restreinte aux a , $1 \leqslant a < f_K$, premiers à f_K .

Pour simplifier, nous convenons d'omettre les bornes de telles sommations ainsi que le signe * lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

Pour tout entier c premier à f_K , on pose :

$$S_c(K) = \left(\left(\frac{K}{c}\right) - c\right)S(K) ,$$

que l'on appellera encore, par abus, élément de Stickelberger de K .

Redonnons sans démonstration les propriétés des $S_c(K)$ (cf. [10], lemme II.6, p. 34 et th. II.3, p. 42) :

PROPOSITION I.1.

(i) *On a* $S_c(K)=\sum_a(\frac{K}{a})^{-1}(\lambda_c(K,a)+(c-1)/2)\in\mathbb{Z}[G_K]$, *avec* $\lambda_c(K,a)=([ac]_{f_K}-ac)/f_K$, *où* $[ac]_{f_K}$ *est le reste de la division euclidienne de* ac *par* f_K ; *le coefficient de* $(\frac{K}{a})^{-1}$ *n'est autre que* $c\zeta_{f_K}(a\ ,\ 0)-\zeta_{f_K}(ac\ ,\ 0)$, *en termes de fonctions zêta partielles de* $\mathbb{Q}$ (cf. [3], § 2.1, p. 291 et § 3.2, p. 308) ;

(ii) *Si* L *est un sur-corps de* K *abélien sur* $\mathbb{Q}$, *de conducteur* f_L *et de groupe de Galois* G_L , *et si* $\pi_{L/K}$ *désigne la projection de* G_L *sur* G_K , *on a* $\pi_{L/K}\ S_c(L)=W_{L/K}\ S_c(K)$, *où* $W_{L/K}=\prod_\ell(1-(\frac{K}{\ell})^{-1})$, *le produit portant sur les diviseurs premiers de* f_L *qui ne divisent pas* f_K ;

(iii) *On a* $S_c(K)(1+(\frac{K}{-1}))=0$, *et il existe* $T_c(K)\in\mathbb{Z}[G_K]$ *défini modulo* $(1+(\frac{K}{-1}))\mathbb{Z}[G_K]$ *tel que* $S_c(K)=T_c(K)(1-(\frac{K}{-1}))$; *on peut prendre* $T_c(K)=\sum_{a=1}^{*f_K/2}(\frac{K}{a})^{-1}(\lambda_c(K\ ,\ a)+(c-1)/2)\mod(1+(\frac{K}{-1}))$. *Pour tout corps* K *réel, on a donc* $S_c(K)=0$.

2. Fonction puissance p-adique.

Soit p un nombre premier. On pose $q=p$ lorsque $p\neq 2$, $q=4$ lorsque $p=2$. Pour tout a de $\mathbb{Z}_p^*$, on appelle $\theta(a)$ l'unique racine de l'unité de $\mathbb{Z}_p^*$ telle que $\theta(a)\equiv a \mod q$, et on pose $\langle a\rangle=a\,\theta^{-1}(a)$ (on a donc $\langle a\rangle\equiv 1 \mod q$). Si $s\in\mathbb{Z}_p$, on pose $\langle a\rangle^s=1+\sum_{k\geq 1}\binom{s}{k}(\langle a\rangle-1)^k$, avec

$$\binom{s}{k}=s(s-1)\ \dots\ (s-k+1)/k!\in\mathbb{Z}_p\ ;$$

on a alors la propriété classique suivante ([1], p. 361) :

PROPOSITION I.2. – *La série définissant* $\langle a\rangle^s$ *est convergente pour tout* $s\in\mathbb{Z}_p$ *et tout* $a\in\mathbb{Z}_p^*$; *elle définit une fonction continue de* s . *En outre, pour tout* $n\geq 0$ *et tout* $u\in\mathbb{Z}_p$, *on a* $\langle 1+qp^n u\rangle^s=1+sqp^n u+vsqp^{2n+1}$, $v\in\mathbb{Z}_p$.

3. $\mathbb{Z}_p$-extensions cyclotomiques.

Pour tout entier $\rho\geq 1$ notons μ_ρ le groupe des racines ρ-ièmes de l'unité. On appelle $\mathbb{Q}_\infty$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$ (on rappelle que $\mathbb{Q}_\infty=\cup_{n\geq 0}\mathbb{Q}_n$, où $\mathbb{Q}_n$ est l'unique sous-corps réel de $\mathbb{Q}(\mu_{qp^n})$ cyclique de degré p^n sur $\mathbb{Q}$). Si K est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois G_K et de conducteur f_K , on pose $K_n=K\mathbb{Q}_n$ $(n\geq 0)$, et on appelle $K_\infty=\cup_{n\geq 0}K_n$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K ; on pose $G_{K_n}=\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q})$ et $G_{K_\infty}=\varprojlim G_{K_n}$, on appelle f_{K_n} le conducteur de K_n , et on appelle enfin π_{K_n} la projection canonique $G_{K_\infty}\to G_{K_n}$.

Lorsque le corps considéré est implicite, on simplifie les notations en posant $G_n=G_{K_n}$, $G_\infty=G_{K_\infty}$, $f_n=f_{K_n}$, $\pi_n=\pi_{K_n}$; cependant pour $n=0$ (qui correspond à K) on conserve la référence à K $(G_K\ ,\ f_K\ ,\ \pi_K)$.

II. Génération des fonctions L_p abéliennes

1. La transformation de Mellin arithmétique.

A partir de maintenant, nous faisons l'hypothèse fondamentale que le corps K contient μ_q (on a donc $f_n \equiv 0 \mod qp^n$, pour tout $n \geqslant 0$, puisque K_n contient alors μ_{qp^n}).

On pose $A_n = \mathbb{Z}_p/qp^n\mathbb{Z}_p$, pour tout $n \geqslant 0$. Pour tout $a \in \mathbb{Z}_p^*$ et tout $s \in \mathbb{Z}_p$, l'image de $\theta(a)\langle a\rangle^s$ dans A_n ne dépend que de celle de a dans A_n (ceci résulte de la proposition I.2) ; on peut donc définir, pour tout $n \geqslant 0$, les applications $m_{K_n}(s) : A_n[G_n] \dashrightarrow A_n[G_n]$ (notées $m_n(s)$ si K est implicite) définies par $m_n(s)(\alpha\tau) = \alpha\theta(a)\langle a\rangle^s \tau^{-1} \mod qp^n$, pour tout $\alpha \in A_n$ et tout $\tau \in G_n$, où a est n'importe quel entier tel que $\tau = (\frac{K_n}{a})$ (le résultat ne dépend pas du choix de ce nombre a car K_n contient μ_{qp^n}, donc si $(\frac{K_n}{a}) = (\frac{K_n}{b})$, a et b sont congrus $\mod qp^n$, d'où le résultat).

On vérifie que les $m_n(s)$ sont des involutions de $A_n[G_n]$ qui rendent le diagramme suivant commutatif ($n \geqslant 0$, $s \in \mathbb{Z}_p$) :

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1}[G_{n+1}] \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "m_{n+1}(s)"'] & A_{n+1}[G_n] \arrow[r, "\mod qp^n"] & A_n[G_n] \arrow[d, "m_n(s)"] \\
A_{n+1}[G_{n+1}] \arrow[r, "\pi_n"] & A_{n+1}[G_n] \arrow[r, "\mod qp^n"] & A_n[G_n]
\end{tikzcd}$$

Supposons donnée une famille $(U(K_n))_{n\geqslant 0}$, avec $U(K_n) \in \mathbb{Z}_p[G_n]$ telle que $\pi_n U(K_{n+1}) = U(K_n)$ pour tout $n \geqslant 0$; ceci définit un élément U de $\varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n]$.

Nous posons $U^*(K_n, s) = m_n(s)U(K_n)$ dans $A_n[G_n]$, pour tout $s \in \mathbb{Z}_p$, et nous désignons encore par la même notation un relèvement arbitraire de $U^*(K_n, s)$ modulo qp^n dans $\mathbb{Z}_p[G_n]$; alors le diagramme commutatif ci-dessus montre que l'on a dans $\mathbb{Z}_p[G_n]$ la congruence :

$$\pi_n U^*(K_{n+1}, s) \equiv U^*(K_n, s) \mod qp^n ,$$

d'où a fortiori la congruence dans $\mathbb{Z}_p[G_K]$, par projection sur G_K :

$$\pi_K U^*(K_{n+1}, s) \equiv \pi_K U^*(K_n, s) \mod qp^n .$$

Il en résulte que la suite des $\pi_K U^*(K_n, s) \in \mathbb{Z}_p[G_K]$ a une limite p-adique $\mathcal{U}^*(K, s) \in \mathbb{Z}_p[G_K]$ qui vérifie l'approximation :

$$\mathcal{U}^*(K, s) \equiv \pi_K U^*(K_n, s) \mod qp^n \mathbb{Z}_p[G_K] .$$

<u>Définition</u> II.1. - Nous appelons <u>transformée de Mellin arithmétique</u> (pour K contenant μ_q) l'application :

$$\mathcal{M}_K : \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[G_K]^{\mathbb{Z}_p}$$

qui à $U = (U(K_n))_n \in \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n]$ associe la fonction de $s \in \mathbb{Z}_p$, $\mathcal{U}^*(K, s)$, définie par

$$s \longrightarrow \lim_n \pi_K\, m_n(s) U(K_n) .$$

Les éléments $\pi_K\, m_n(s)U(K_n) = \pi_K\, U^*(K_n, s)$, relevés mod qp^n dans $\mathbb{Z}_p[G_K]$, sont appelés des approximants de $\mathcal{U}^*(K, s)$.

PROPOSITION II.1. - <u>La transformation</u> $\mathcal{M}_K$ (K <u>contenant</u> μ_q) <u>a les propriétés suivantes</u> :

(i) $\mathcal{M}_K$ <u>est un homomorphisme de</u> $\mathbb{Z}_p$<u>-algèbres</u>.

(ii) <u>Soit</u> $U = (U(K_n))_n \in \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n]$, <u>et soit</u> $\mathcal{U}^*(K, s) = \mathcal{M}_K(U)$; <u>alors</u> $\mathcal{U}^*(K, s) \equiv \pi_K\, U^*(K_n, s) \mod qp^n$, <u>et on a</u> $\mathcal{U}^*(K, s+t) - \mathcal{U}^*(K, s) \equiv 0 \mod qt\mathbb{Z}_p[G_K]$, <u>pour tout</u> $s, t \in \mathbb{Z}_p$.

(iii) <u>Soit</u> L <u>une extension abélienne de</u> $\mathbb{Q}$ <u>contenant</u> K ; <u>la famille des projections</u> $\pi_{L_n/K_n} : G_{L_n} \longrightarrow G_{K_n}$ <u>définit un homomorphisme</u> $\tilde{\pi}_{L/K}$ <u>de</u> $\varprojlim \mathbb{Z}_p[G_{L_n}]$ <u>dans</u> $\varprojlim \mathbb{Z}_p[G_{K_n}]$; <u>on a alors la relation</u> $\mathcal{M}_K \circ \tilde{\pi}_{L/K} \circ \mathcal{M}_L$.

(iv) <u>On a</u> $\mathcal{M}_K((\frac{K_n}{-1}))_n = -(\frac{K}{-1})$.

<u>Démonstration</u>. - On rappelle que $\mathcal{U}^*(K, s) = \lim_n \pi_K\, m_n(s)U(K_n)$, et que les $m_n(s)$ sont, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $s \in \mathbb{Z}_p$, des involutions de l'algèbre $A_n[G_n]$; ceci démontre (i).

Il résulte de la définition de $m_n(s)$ que $U^*(K_n, s)$ est une combinaison linéaire (à coefficients dans $\mathbb{Z}_p[G_n]$) d'éléments de la forme $\langle a\rangle^s$, $a \in \mathbb{Z}$; donc $U^*(K_n, s+t) - U^*(K_n, s)$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme $\langle a\rangle^{s+t} - \langle a\rangle^s = \langle a\rangle^s(\langle a\rangle^t - 1)$, or, d'après la proposition I.2, $\langle a\rangle^t - 1$ est qt fois un entier p-adique ; d'où (ii) par projection sur K, puis passage à la limite sur n.

Si $U_L = (U(L_n))_n \in \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_{L_n}]$, posons $U_K = (U(K_n))_n$ avec $U(K_n) = \pi_{L_n/K_n} U(L_n)$; ceci définit $\tilde{\pi}_{L/K} U_L \in \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_{K_n}]$. On a le diagramme commutatif évident :

$$\begin{tikzcd}
A_n[G_{L_n}] \arrow[r, "m_{L_n}(s)"] \arrow[d, dashed, "\pi_{L_n/K_n}"'] & A_n[G_{L_n}] \arrow[r, dashed, "\pi_L"] \arrow[d, "\pi_{L_n/K_n}"] & A_n[G_L] \arrow[d, "\pi_{L/K}"] \\
A_n[G_{K_n}] \arrow[r, "m_{K_n}(s)"] & A_n[G_{K_n}] \arrow[r, dashed, "\pi_K"] & A_n[G_K]
\end{tikzcd} .$$

On aura donc

$$\pi_K\, m_{K_n}(s)\, U(K_n) \equiv \pi_K\, m_{K_n}(s)\, \pi_{L_n/K_n} U(L_n) \equiv \pi_{L/K}\, \pi_L\, m_{L_n}(s)\, U(L_n) \mod qp^n ,$$

d'où, à la limite sur n : $\mathcal{M}_K U_K = \pi_{L/K} \mathcal{M}_L U_L$.

Le point (iv) est évident ; il montre que $\mathfrak{M}_K$ change la "parité".

Nous allons maintenant appliquer tout ceci aux éléments de Stickelberger définis au chapitre I, § 1 ; grâce à l'hypothèse $\mu_q \subset K$, la proposition I.1 (ii), conduit à $\pi_n\, S_c(K_{n+1}) = S_c(K_n)$, pour tout $n \geqslant 0$, et $(S_c(K_n))_n \in \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n]$. On a alors le résultat suivant :

LEMME. - <u>Dans l'écriture</u> $S_c(K_n) = (1 - (\frac{K_n}{-1}))T_c(K_n)$ (Prop. I.1 (iii)) <u>on peut choisir les</u> $T_c(K_n)$ mod $(1 + (\frac{K_n}{-1}))$ <u>de telle sorte que la famille</u> $(T_c(K_n))_n$ <u>soit cohérente.</u>

La démonstration est élémentaire (Il n'y a pas unicité, mais on vérifie facilement que deux telles familles diffèrent, dans $\varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n]$, par un élément de l'idéal engendré par $1 + (\frac{K_\infty}{-1})$).

<u>Définition</u> II.2. - A partir d'une famille cohérente $(T_c(K_n))_n$, on pose : $\mathcal{T}^*_c(K\,,\,s) = \mathfrak{M}_K(T_c(K_n))_n$ (défini modulo $(1-(\frac{K}{-1}))$) , et $\mathcal{S}^*_c(K,s) = \mathfrak{M}_K(S_c(K_n))_n$; on a la relation $\mathcal{S}^*_c(K\,,\,s) = (1 + (\frac{K}{-1}))\mathcal{T}^*_c(K\,,\,s)$. On appellera respectivement $T^*_c(K_n\,,\,s)$ et $S^*_c(K_n\,,\,s)$ des approximants relatifs à $\mathcal{T}^*_c(K,s)$ et $\mathcal{S}^*_c(K,s)$.

On peut alors donner les propriétés de ces familles :

PROPOSITION II. 2. - <u>On a, pour tout</u> $n \geqslant 0$ <u>et tout</u> $s \in \mathbb{Z}_p$ (K <u>contenant</u> μ_q):

(i) $T^*_c(K_n\,,\,s) \equiv \sum_{a=1}^{f_n/2} (\frac{K_n}{a})a^{-1}\langle a\rangle^{1-s}(\lambda_c(K_n\,,\,a) + (c-1)/2) \bmod (qp^n\,,\,1-(\frac{K_n}{-1}))$;

$S^*_c(K_n,s) \equiv (1+(\frac{K_n}{-1}))T^*_c(K_n,s) \equiv \sum_{a=1}^{f_n} (\frac{K_n}{a})a^{-1}\langle a\rangle^{1-s}(\lambda_c(K_n,a)+(c-1)/2) \bmod qp^n$;

(ii) $\mathcal{T}^*_c(K\,,\,s) \equiv \pi_K\, T^*_c(K_n\,,\,s) \bmod qp^n\, \mathbb{Z}_p[G_K]$;

(iii) $\mathcal{T}^*_c(K\,,\,s+t) - \mathcal{T}^*_c(K\,,\,s) \equiv 0 \bmod qt\, \mathbb{Z}_p[G_K]$, <u>pour tout</u> $t \in \mathbb{Z}_p$;

(iv) $\pi_{L/K}\, \mathcal{S}^*_c(L\,,\,s) = W^*_{L/K}(s)\, \mathcal{S}^*_c(K\,,\,s)$, <u>où</u>

$W^*_{L/K}(s) = \prod_\ell (1 - \ell^{-1}\langle\ell\rangle^{1-s}(\frac{K}{\ell}))(\ell \mid f_L\,,\, \ell \nmid f_K)$;

$\pi_{L/K}\, \mathcal{T}^*_c(L\,,\,s) \equiv W^*_{L/K}(s)\, \mathcal{T}^*_c(K\,,\,s) \bmod (1 - (\frac{K}{-1}))\, \mathbb{Z}_p[G_K]$.

<u>Démonstration.</u> - Le point (i) résulte de la proposition I.1 (i) et (iii).

Les points (ii) et (iii) sont vrais en toute généralité (prop. II.1 (ii)). La propriété (iv) résulte de la proposition II.1 (iii) : $\pi_{L/K}\, \mathcal{S}^*_c(L,s) = \pi_{L/K}\, \mathfrak{M}_L(S_c(L_n))_n$ est donc égal à $\mathfrak{M}_K(\pi_{L_n/K_n}\, S_c(L_n))_n = \mathfrak{M}_K(W_{L_n/K_n}\, S_c(K_n))_n$ (prop. I.1 (ii)) ; on vérifie que $(W_{L_n/K_n})_n \in \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_{K_n}]$, donc, d'après le (i) de la proposition II.1, on obtient $\mathfrak{M}_K(W_{L_n/K_n})_n\, \mathfrak{M}_K(S_c(K_n))_n$, d'où le résultat après le calcul élémentaire de $\mathfrak{M}_K(W_{L_n/K_n})_n = W^*_{L/K}(s)$.

<u>Remarque</u> II.1. - La notation $*$ dans la définition II.1 est justifiée par le fait que, dans l'expression $U^*(K_n\,,\,s) \equiv m_n(s)\, U(K_n) \bmod qp^n$, aucune valeur de s ne redonne $U(K_n)$ modulo qp^n, et la notation $U(K_n\,,\,s)$ serait particulière-

ment fâcheuse. Signalons, dans le même ordre d'idées, que l'on peut définir l'involution m^* de $\varprojlim \mathbb{Q}_p[G_n]$ par

$$m^*\left(\frac{K_n}{a}\right) = \left(\frac{K_n}{a}\right)^{-1} \theta(a) ,$$

qui commute aux projections π_n , pour tout $n \geqslant 0$, puisqu'en fait sa valeur ne dépend que de $\left(\frac{K}{a}\right)$ (toujours en supposant $\mu_q \subset K$). Les "bonnes" fonctions de s, de la forme $U(K_n , s)$ et $\mathcal{U}(K , s)$, que l'on peut définir, sont alors

$$U(K_n , s) = m^* U^*(K_n , 1-s) \mod qp^n \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(K , s) = m^* \mathcal{U}^*(K , 1-s) ;$$

on a alors $\mathcal{U}(K , s) = \lim_n \pi_K U(K_n , s)$. On a enfin $\mathcal{U}(K_n , 1) = U(K_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.

Pour conclure ce § 1, nous donnons une expression des éléments $S_c^*(K_n , s)$ qui sera très utile ultérieurement :

PROPOSITION II.3. - <u>On a, pour tout</u> $s \neq 1$,

$$S_c^*(K_n,s) \equiv c\left(\left(\frac{K_n}{c}\right)^{-1} \langle c\rangle^{s-1}-1\right) \frac{1}{(1-s)f_n} \sum_a \left(\frac{K_n}{a}\right) a^{-1}(a-(1-s)f_n/2)\langle a\rangle^{1-s} \mod p^{n+1} .$$

<u>Démonstration</u>. - Le second membre se développe en la somme de trois termes :

$$\frac{c}{(1-s)f_n} \sum_a \left(\frac{K_n}{a}\right)\left(\frac{K_n}{c}\right)^{-1} \langle c\rangle^{s-1} \langle a\rangle^{1-s}$$

$$- \frac{c}{(1-s)f_n} \sum_a \left(\frac{K_n}{a}\right) \langle a\rangle^{1-s}$$

$$- \frac{c}{2}\left(\left(\frac{K_n}{c}\right)^{-1} \langle c\rangle^{s-1} - 1\right) \sum_a \left(\frac{K_n}{a}\right) a^{-1} \langle a\rangle^{1-s} ,$$

que l'on note $A + B + C$ pour simplifier. Calculons A : On pose $a = [bc]_{f_n}$ (b premier à f_n , $1 \leqslant b < f_n$) ; pour abréger posons $\lambda_c(K_n , b) = \lambda(b)$, on a donc $a = [bc]_{f_n} = bc + \lambda(b)f_n$, soit $ac^{-1} = b + \lambda(b)\, c^{-1} f_n$, et il vient

$$A = \frac{c}{(1-s)f_n} \sum_b \left(\frac{K_n}{b}\right) \langle b + \lambda(b)\, c^{-1} f_n\rangle^{1-s}$$

$$= \frac{c}{(1-s)f_n} \sum_b \left(\frac{K_n}{b}\right) \langle b\rangle^{1-s} (1 + \lambda(b)\, b^{-1} c^{-1} f_n)^{1-s} ;$$

d'après la proposition I.2, on peut écrire :

$$(1 + \lambda(b)\, b^{-1} c^{-1} f_n)^{1-s} \equiv 1 + (1-s)\lambda(b)\, b^{-1} c^{-1} f_n \mod (1-s)f_n\, p^{n+1} .$$

D'où

$$A \equiv \frac{c}{(1-s)f_n} \sum_b \left(\frac{K_n}{b}\right) \langle b\rangle^{1-s} + \sum_b \left(\frac{K_n}{b}\right) \langle b\rangle^{1-s} \lambda(b)\, b^{-1}$$

$$\equiv - B + \sum_b \left(\frac{K_n}{b}\right) \langle b\rangle^{1-s} \lambda(b)\, b^{-1} \mod p^{n+1} .$$

On calcule

$$C = - \frac{c}{2} \sum_a \left(\frac{K_n}{a}\right)\left(\frac{K_n}{c}\right)^{-1} \langle a\rangle^{1-s} \langle c\rangle^{s-1} a^{-1}$$

$$+ \frac{c}{2} \sum_a \left(\frac{K_n}{a}\right) \langle a\rangle^{1-s} a^{-1} ;$$

dans la 1re sommation, on pose encore $a = [bc]_{f_n}$, et on obtient :

$$C \equiv -\frac{c}{2}\sum_b^K \left(\frac{n}{b}\right)\langle b\rangle^{1-s}\, b^{-1}\, c^{-1} + \frac{c}{2}\sum_a^K \left(\frac{n}{a}\right)\langle a\rangle^{1-s}\, a^{-1}$$

$$\equiv \frac{c-1}{2}\sum_b^K \left(\frac{n}{b}\right)\langle b\rangle^{1-s}\, b^{-1} \mod p^{n+1} .$$

2. Génération des fonctions L p-adiques.

On se donne un caractère de Dirichlet modulo f (ψ n'est donc pas nécessairement primitif) ; ψ provient d'un unique caractère de l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ noté encore ψ par abus. On appelle f_ψ le conducteur de $\psi(f_\psi \mid f)$.

Définition II.3. - On dira qu'un corps K est p-admissible pour ψ si les conditions suivantes sont réalisées :

(i) ψ est un caractère de K ,

(ii) K contient μ_q ,

(iii) les nombres f_K et pf sont divisibles par les mêmes nombres premiers.

Par exemple, si ψ est primitif, et si K_ψ est le corps correspondant à ψ , alors $K = K_\psi(\mu_q)$ est le plus petit corps p-admissible pour ψ . Autre exemple : le composé de deux corps p-admissibles pour ψ est p-admissible pour ψ .

Désignons par ε le caractère de Dirichlet unité.

Définition II.4. - Soit ψ un caractère de Dirichlet mod f , et soit K p-admissible pour ψ . On pose :

$$L_p(s , \psi) = \frac{1}{c(1-\psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1})}\, \psi S_c^*(K , s) ,$$

avec $s \neq 1$ si $\psi = \varepsilon$, c étant choisi tel que $\psi(c) \neq 1$ lorsque $\psi \neq \varepsilon$.

Cette définition ne dépend ni du choix de c , ni du choix de K ; pour le choix de c , c'est évident d'après la proposition II.3 (pour $s \neq 1$; pour $s = 1$ et $\psi \neq \varepsilon$, on le vérifie par continuité des fonctions $\psi S_c^*(K , s)$ (prop. II.2 (iii)) et $(1-\psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1})^{-1}$; pour le choix de K , ceci résulte de la prop. II.2 (iv), associée au fait que le composé de deux corps p-admissibles est un corps p-admissible.

Remarque II.2. - En vertu de la définition II.2, on a $L_p(s , \psi) = 0$ pour tout caractère ψ impair.

Remarque II.3. - On a bien obtenu les fonctions L_p classiques : en effet, il suffit de calculer $L_p(1-k , \psi)$, pour tout $k \geqslant 1$, en utilisant l'approximation donnée par la proposition II.3 ; on a :

$$L_p(1-k\ ,\ \psi) \equiv -\frac{1}{kf_n}\sum_a \psi(a)\ a^{-1}(a-kf_n/2)\langle a\rangle^k$$
$$\equiv -\frac{1}{kf_n}\sum_a \psi(a)\theta^{-k}(a)a^k + \frac{1}{2}\sum_a \psi(a)\theta^{-k}(a)a^{k-1} \mod \frac{p^{n+1}}{1-\psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{-k}}\ ;$$

or d'après [4], p. 292, la première quantité tend vers $-\frac{1}{k}B_k(\psi\theta^{-k})$ et la seconde vers 0 ; d'où la remarque.

Remarque II.4. - La proposition II.2 (iv) et la définition II.4 montrent que si ψ est un caractère modulo f, et ψ' le même caractère modulo $f' \mid f$, alors :

$$L_p(s\ ,\ \psi) = L_p(s\ ,\ \psi')\prod_\ell(1-\psi(\ell)\ell^{-1}\langle\ell\rangle^{1-s})\ ,\quad \ell\mid f\ ,\ \ell\nmid f'\ ,\ \ell\neq p\ ;$$

cette relation permet donc de passer d'un caractère au caractère primitif. Cependant, on remarquera que si f_ψ est premier à p, et f de la forme $p^h f_\psi$, $h \geqslant 1$, alors les fonctions L_p associées aux caractères modulo f_ψ et f coïncident

PROPOSITION II.4. - Soit ε le caractère unité, et soit $K = \mathbb{Q}(\mu_q)$; alors on a l'égalité $\varepsilon\mathbb{S}_c^*(K\ ,\ 1) = (c\log c)(1-p)/p$.

Démonstration. - Comme $\mathbb{S}_c^*(K\ ,\ s)$ est uniformément continue, il suffit de calculer $\lim_{s\to 1}\varepsilon\mathbb{S}_c^*(K\ ,\ s)$ (qui existe), par l'approximation de la proposition II.3 :

$$\varepsilon\mathbb{S}_c^*(K\ ,\ s) \equiv \frac{c(\langle c\rangle^{s-1}-1)}{1-s}\sum_a\langle a\rangle^{1-s} - \frac{1-s}{2}\sum_a a^{-1}\langle a\rangle^{1-s} \mod p^{n+1}\ ;$$

on sait que $\langle a\rangle^{1-s} = 1 + (1-s)q\gamma_a(s)$, avec $\gamma_a(s) \in \mathbb{Z}_p$, d'où :

$$\varepsilon\mathbb{S}_c^*(K,s) \equiv \frac{c(\langle c\rangle^{s-1}-1)}{1-s}\Big(\frac{p-1}{p} + (1-s)\sum_a\gamma_a(s) - \frac{1-s}{2}\sum_a a^{-1}\langle a\rangle^{1-s}\Big) \mod p^{n+1}\ .$$

Si $s \longrightarrow 1$ $(s \neq 1)$, n étant fixé, la quantité entre parenthèse tend vers $\frac{p-1}{p}$, et $\frac{c(\langle c\rangle^{s-1}-1)}{1-s}$ a pour limite $-c\log c$, d'où le résultat.

3. Valuation de $L_p(s\ ,\ \psi)$.

On va montrer que la connaissance de la famille des $S_c^*(K_n\ ,\ s)$ conduit facilement au calcul de la valuation de $\frac{1}{2}L_p(s\ ,\ \psi)$.

Désignons par $\mathbb{Z}_p(\psi)$ l'anneau des valeurs de ψ sur $\mathbb{Z}_p$ et par v_ψ sa valuation.

PROPOSITION II.5. - Soit ψ un caractère pair mod f. On suppose $L_p(s,\psi) \neq 0$; alors

$$v_\psi\big(\tfrac{1}{2}L_p(s\ ,\ \psi)\big) = v_\psi\big(\tfrac{1}{2}\psi S_c^*(K_{n_0}\ ,\ s)\big) - v_\psi\big(1-\psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1}\big)\ ,$$

où n_0 est le plus petit entier $n \geqslant 0$ pour lequel on a l'inégalité

$$v_\psi(\psi S_c^*(K_n\ ,\ s)) < v_\psi(2qp^n)\ .$$

Démonstration. – Elle provient de l'approximation :

$$\mathcal{C}_c^*(K\ ,\ s) \equiv \pi_K\ T_c^*(K_n\ ,\ s) \mod qp^n\ ,$$

qui s'écrit encore dans $\mathbb{Z}_p(\psi)$:

$$\psi\mathcal{S}_c^*(K\ ,\ s) \equiv \psi S_c^*(K_n\ ,\ s) \mod 2qp^n\ .$$

On retrouve ainsi les approximations p-adiques des fonctions $L_p(s\ ,\ \psi)$ qui avaient déjà été mentionnées dans [11], puis dans [17], dans le cas particulier $s = 1$, $p \neq 2$.

En pratique n est toujours très petit ; la méthode consiste donc à partir d'un élément de Stickelberger $S_c(K_n)$ ($n = 2$ ou 3 par exemple), de calculer $\psi(m_n(s)S_c(K_n))$ mod $2qp^n$; si le test entre les valuations est négatif, on prend n plus grand (pour $p = 2$, on utilise directement $T_c(K_n)$ au lieu de $S_c(K_n)$).

III. Lien avec l'annulation de classes réelles.

Soit ψ un caractère primitif pair, $\psi \neq \varepsilon$, et soit K_ψ le corps qui lui correspond ; on pose $K = K_\psi(\mu_q)$; uniquement pour simplifier, nous supposons l'ordre de ψ non-puissance de p et $p \neq 2$ (pour le cas général, cf. [17]).

Soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}(K_\psi/\mathbb{Q})$, et soit P_ψ l'unique polynôme cyclotomique p-adique tel que $P_\psi(\psi(\sigma)) = 0$.

On appelle N la p-extension abélienne maximale de K_ψ non ramifiée en dehors de p , et on pose $\mathfrak{a} = \mathrm{Gal}(N/K_\psi)$ considéré comme module sur $\mathrm{Gal}(K_\psi/\mathbb{Q})$; on appelle N_ψ le sous-corps de N fixe par $P_\psi(\sigma)\mathfrak{a}$, et on pose $\mathfrak{a}_\psi = \mathrm{Gal}(N_\psi/K_\psi)$: on a donc $\mathfrak{a}_\psi \simeq \mathfrak{a}/P_\psi(\sigma)\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{a}_\psi$ est muni d'une structure de $\mathbb{Z}_p(\psi)$-module (par l'application $\sigma \dashrightarrow \psi(\sigma)$) ; on trouvera dans [17] la démonstration générale du fait que $\mathfrak{a}_\psi$ est fini, et que, sous l'hypothèse faite sur ψ , N_ψ/K_ψ et K_n/K_ψ sont linéairement disjointes.

Si on suppose n assez grand pour que qp^n annule $\mathfrak{a}_\psi$, alors $N_\psi K_n/K_n$ est une extension de Kummer de groupe de Galois $\mathfrak{a}_\psi$. Soit $\mathfrak{W}_\psi$ le radical de cette extension (il est annulé par qp^n) ; on sait par la théorie de Kummer élémentaire que les groupes $\mathfrak{a}_\psi$ et $\mathfrak{W}_\psi$ sont isomorphes mais que leurs structures naturelles de G_n-modules ne le sont pas : elles sont liées par la "Spiegelungsrelation" de Leopoldt [16] dans $A_n[G_n]$, relation qui n'est autre que l'involution $m_n(1)$; le lien en question peut se traduire en termes d'annulations : si un idéal $\mathfrak{A}$ de $A_n[G_n]$ annule $\mathfrak{W}_\psi$, alors $m_n(1)\mathfrak{A}$ annule $\mathfrak{a}_\psi$.

On peut alors vérifier (cf. [11] ou [17]) que $S_c(K_n)$ annule $\mathfrak{W}_\psi$, d'où $m_n(1)S_c(K_n) = S_c^*(K_n\ ,\ 1)$ annule $\mathfrak{a}_\psi$; comme $\mathfrak{a}_\psi$ est fixe par $\mathrm{Gal}(K_n/K_\psi)$, $\pi_K\ S_c^*(K_n\ ,\ 1)$ annule $\mathfrak{a}_\psi$, et par conséquent (puisque qp^n annule $\mathfrak{a}_\psi$) $\mathcal{S}_c^*(K,1)$ annule $\mathfrak{a}_\psi$; autrement dit, en termes de $\mathbb{Z}_p(\psi)$-modules, et compte tenu du fait que ici $c(1 - \psi^{-1}(c))$ est une unité (par choix convenable de c), on obtient que $L_p(1, \psi)$ annule $\mathfrak{a}_\psi$.

Nous avons déjà signalé dans [11] que ceci redonnait une démonstration des résultats de [7] et [8] (II, § 5). Ceci élucide assez bien le rôle des fonctions L_p vis-à-vis des annulations de classes d'idéaux (on aura remarqué que $\mathfrak{a}_\psi$ correspond par le corps de classes à un groupe de classes généralisées de la forme $\mathcal{H}(K_\psi)/P_\psi(\sigma)\mathcal{H}(K_\psi)$ qui est formé de classes réelles puisque K_ψ est réel).

IV. Une relation congruentielle. Applications.

Soit ψ un caractère pair modulo f , et soit $\chi = \psi^{p^r}$, $r \geqslant 0$, considéré modulo $f'|f$. Soient L et K des corps p-admissibles pour ψ et χ ; on peut supposer $K \subset L$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \underset{\sim}{Z}_p[G_L] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi_{L/K}"'] & \underset{\sim}{Z}_p(\psi) \arrow[r] & \underset{\sim}{Z}_p(\psi)/(p) \arrow[d] \\ \underset{\sim}{Z}_p[G_K] \arrow[r, "\chi"] & \underset{\sim}{Z}_p(\chi) \arrow[r] & \underset{\sim}{Z}_p(\chi)/(p) \end{tikzcd}$$

la flèche verticale de droite étant l'élévation à la puissance p^r-ième dans $\underset{\sim}{Z}_p(\psi)/(p)$.

Appliquons ce diagramme à $\mathcal{C}^*_c(L , s)$ (cf. prop. II. 2 (iv)) ; on a $\pi_{L/K}\ \mathcal{C}^*_c(L , s) \equiv W^*_{L/K}(s)\ \mathcal{C}^*_c(K , s)$ mod $(1 - (\frac{K}{-1}))$; comme ψ et χ sont pairs, on en déduit la congruence :

$$[\tfrac{1}{2}\ \psi \mathcal{S}^*_c(L , s)]^{p^r} \equiv \chi W^*_{L/K}(s)[\tfrac{1}{2}\ \chi \mathcal{S}^*_c(K , s)] \ \bmod p ,$$

qui se traduit en termes de fonctions L_p par le résultat suivant :

PROPOSITION IV.1. - Soit ψ un caractère de Dirichlet pair mod f , et soit $\chi=\psi^{p^r}$, $r\geqslant 0$, considéré mod $f'|f$. Alors, on a, pour tout $s \in \underset{\sim}{Z}_p$ (les quantités entre crochets étant entières) ,

$$[(1-\psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1})\tfrac{1}{2}L_p(s,\psi)]^{p^r} \equiv [(1-\chi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1})\tfrac{1}{2}L_p(s,\chi)]\prod_\ell(1-\frac{\chi(\ell)}{\ell}\langle \ell\rangle^{1-s}) \ \bmod p ,$$

le produit portant sur les premiers ℓ , $\ell|f$, $\ell\nmid f'$ et $\ell \neq p$.

Remarque IV.1. - Si $\chi = \varepsilon_{f'}$ (caractère unité modulo f') et $s = 1$, la quantité $(1 - \chi^{-1}(c)\langle c\rangle^0)\ \frac{1}{2}\ L_p(1 , \chi)$, qui provient de $\frac{1}{2}\ \varepsilon_{f'}\ \mathcal{S}^*_c(K , 1)$, doit être lue égale à $-\log c\ \frac{p-1}{p} \prod_{\ell'}(1 - \frac{1}{\ell'})$ $(\ell'|f' , \ \ell' \neq p)$ (ceci se déduit de la remarque II.4 et de la proposition II.4).

COROLLAIRE 1. - Si ψ mod f est d'ordre non-puissance de p , alors on a la congruence $[\frac{1}{2}\ L_p(s , \psi)]^{p^r} \equiv [\frac{1}{2}\ L_p(s , \chi)] \prod_\ell(1 - \theta^{-1}\ \chi(\ell))$ mod p .

En effet, dans ce cas, les facteurs $(1 - \psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1})p^r$ et $(1 - \chi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1})$ sont inversibles (avec un choix convenable de c), et de ce fait ils sont congrus modulo p .

Cette congruence donne une généralisation des "trivial divisibilities" de RIBET ([18], § 4) :

COROLLAIRE 2. - Soit ψ un caractère primitif pair de la forme $\psi = \psi_p \chi$, ψ_p d'ordre puissance de p , et $\chi \neq \varepsilon$ primitif pair d'ordre premier à p . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $v_\psi \frac{1}{2} L_p(s , \psi) > 0$ est que l'une au moins des conditions suivantes soit réalisée :

(i) $v_\chi \frac{1}{2} L_p(s , \chi) > 0$,

(ii) il existe un premier $\ell \neq p$, $\ell | f_\psi$, $\ell \nmid f_\chi$ tel que $\chi(\ell) = 1$.

On applique le corollaire 1 à ψ modulo $f = f_\psi$, à χ mod $f' = f_\chi$, en prenant r tel que l'on ait $\psi_p^{p^r} = \varepsilon$ et $\chi^{p^r} = \chi$; on exprime alors la non-inversibilité de $\frac{1}{2} L_p(s , \psi)$ sur le second membre de la congruence obtenue.

Le cas traité par RIBET correspond à $\chi = \theta^k$ (k pair, $\theta^k \neq \varepsilon$).

COROLLAIRE 3. - Soit ψ un caractère primitif pair de conducteur f_ψ , ψ d'ordre puissance de p . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{1}{2} L_p(s , \psi)$ soit entier est que f_ψ ne soit pas une puissance de p . Autrement dit, dans le cas primitif, $\frac{1}{2} L_p(s , \psi)$ est non entier si, et seulement si, ψ est un caractère de $\underset{\sim}{Q}_\infty$.

Supposons $\psi \neq \varepsilon$, et soit c tel que $\psi^{-1}(c)$ soit d'ordre p^r , l'ordre de ψ ; on a donc $1 - \psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1} = \varpi$ qui est de valuation 1 dans $\underset{\sim}{Z}_p(\psi)$, et $\varpi \frac{1}{2} L_p(s , \psi)$ est entier ; il en résulte que $\frac{1}{2} L_p(s , \psi)$ est non entier si, et seulement si, $\varpi \frac{1}{2} L_p(s , \psi)$ est inversible dans $\underset{\sim}{Z}_p(\psi)$. On utilise alors la congruence (Prop. IV. 1) avec $\chi = \varepsilon$ (mod q) en exprimant cette condition d'inversibilité sur le second membre : $[(1 - \langle c\rangle^{s-1})\frac{1}{2} L_p(s , \varepsilon)] \prod_\ell (1 - \ell^{-1}\langle \ell\rangle^{1-s})$ est dans $\underset{\sim}{Z}_p^*$ si, et seulement si, les deux quantités p-entières $(1-\langle c\rangle^{s-1})\frac{1}{2} L_p(s,\varepsilon)$ et $\prod_\ell (1 - \ell^{-1}\langle \ell\rangle^{1-s})$ sont inversibles.

D'après les propositions II.2 (iii) et II.4 appliquées à ε mod q , on a

$$c(1-\langle c\rangle^{s-1})\frac{1}{2}L_p(s,\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon \mathcal{S}_c^*(K,s) \equiv \frac{1}{2}\varepsilon \mathcal{S}_c^*(K,1) \equiv \frac{1}{2}\, c \log c(1-p)/p \mod q \ ;$$

il est alors clair que $\log c/(2p)$ est dans $\underset{\sim}{Z}_p^*$ si, et seulement si, $\langle c\rangle \not\equiv 1 \mod pq$.

La seconde condition équivaut à ce que f_ψ soit une puissance de p (i. e. que ψ soit un caractère de $\underset{\sim}{Q}_\infty$). Or, dans ces conditions, puisque c a été choisi tel que $\psi(c)$ soit de même ordre que ψ , c vérifie la première condition.

COROLLAIRE 4. - Soit ψ un caractère mod f , et soit $\chi = \psi^{p^r}$ considéré mod f . Alors on a, en désignant par $e(\chi , \psi)$ l'indice de ramification de v_ψ par rapport à v_χ

$$v_\psi(1 - \psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1}) + v_\psi(\tfrac{1}{2} L_p(s , \psi))$$
$$\gtreqless (e(\chi,\psi)/p^r) \min\{v_\chi(1-\chi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1}) + v_\chi(\tfrac{1}{2} L_p(s,\chi)), v_\chi(p)\} .$$

V. Séries formelles et invariants d'Iwasawa associés.

1. Série formelle attachée à ψ .

Soit H_n le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q})$; on appellera caractère générateur de $\mathbb{Q}_\infty$ toute famille $(\chi_n)_n$, χ_n caractère primitif d'ordre p^n de $\mathbb{Q}_n$, tels que $\chi_{n+1}^p = \chi_n$ pour tout $n \geq 0$.

Soit ψ un caractère de Dirichlet modulo f , et soit K p-admissible pour ψ . On définit l'application $\tilde{\psi}$:

$$\tilde{\psi} : \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n] \longrightarrow \varprojlim \mathbb{Z}_p(\psi)[H_n] ,$$

déduite des applications naturelles $(K_n/a) \longrightarrow \psi(a)(Q_n/a)$, quel que soit $n \geq 0$.

Pour chaque entier n , on peut construire $\mathcal{S}_c^*(K_n , s) \in \mathbb{Z}_p[G_n]$ en prenant " $K = K_n$ " (Déf. II.2) ; d'après la proposition II.2 (iv), des éléments définissent un élément de $\varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n]$ car ici les facteurs $W^*_{K_{n+1}/K_n}(s)$ sont égaux à 1 .

Définition V.1. - On pose $(\mathcal{S}^*_{c,\psi}(K_n , s))_n = \tilde{\psi}(\mathcal{S}^*_c(K_n , s))_n$; en identifiant comme d'habitude $\varprojlim \mathbb{Z}_p(\psi)[H_n]$ et $\Lambda_\psi = \mathbb{Z}_p(\psi)[[T]]$, il correspond à $(\mathcal{S}^*_{c,\psi}(K_n , s))_n$ une série formelle $\Sigma_{c,\psi}(T , s)$. Cette série ne dépend que de ψ et c et non du choix de K p-admissible pour ψ . On constate que tous les coefficients de ces séries sont divisibles par 2 : on a $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T , s) \in \Lambda_\psi$.

Soit τ_∞ un générateur topologique de H_∞ ($\tau_\infty = (\frac{\mathbb{Q}_\infty}{1+q})$ par exemple), et soit τ_n sa restriction à $\mathbb{Q}_n$; on retrouve $\frac{1}{2}\mathcal{S}^*_{c,\psi}(K_n , s)$ en substituant $\tau_n - 1$ à T dans $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T , s)$. En particulier, si $n = 0$, $\tau_0 - 1 = 0$, et le terme constant de $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T , s)$ n'est autre que $c(1-\psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1})\,\frac{1}{2}L_p(s,\psi)$. Si on substitue à T la valeur $\chi_n(\tau_n) - 1$, on obtient le nombre

$$c(1 - \psi^{-1}\chi_n^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1})\,\frac{1}{2}L_p(s , \psi\chi_n) .$$

Pour la terminologie classique concernant ces anneaux de séries formelles (polynômes distingués, degrés de Weierstrass, ...) se reporter à [15], 5, § 2.

Remarque V.1. - On aura remarqué que les séries $\Sigma_{c,\psi}(T , s)$ diffèrent des séries d'Iwasawa ([13], § 6.8) qui seraient associées à la construction des fonctions $L_p(s , \psi\chi_n)$; de façon grossière, on peut dire les choses suivantes : les deux séries correspondent à l'utilisation de la même limite projective $\varprojlim \underset{\sim}{Z}_p(\psi)[H_n]$; pour les séries d'Iwasawa, on retrouve les fonctions L_p en "évaluant" la série à l'aide du caractère $\chi_n\langle\ \rangle^s$ défini par $\tau_\infty \to \chi_n(\tau_n)\langle 1+q\rangle^s$ (comparer à [20], § 3.7) ; dans notre cas les coefficients des séries dépendent déjà de s , et l'évaluation a lieu à l'aide de χ_n (le passage d'un type de série à l'autre est facile). Notre point de vue consiste à transposer, en termes de séries formelles, le formalisme particulièrement simple attaché aux éléments $\mathcal{S}_c^*(K_n , s)$ qui permet d'étudier le comportement de la fonction L_p par rapport au caractère ψ .

PROPOSITION V.1. - <u>Soit</u> ψ <u>un caractère pair</u> mod f . <u>Il existe un polynôme distingué</u> $P_\lambda(T , s)$ <u>de degré</u> $\lambda \geqslant 0$, λ <u>indépendant de</u> $s \in \underset{\sim}{Z}_p$, <u>et une série inversible</u> $U(T , s)$ <u>tels que</u> $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T , s) = P_\lambda(T , s)\, U(T , s)$ <u>dans</u> Λ_ψ .

<u>Démonstration.</u>

LEMME 1. - <u>On a</u> $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T , s + t) \equiv \frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T , s)$ mod $qt\Lambda_\psi$ <u>pour tout</u> $s,t \in \underset{\sim}{Z}_p$.

D'après la proposition II.2 (iii), on a :

$$\mathcal{C}_c^*(K_n , s+t) \equiv \mathcal{C}_c^*(K_n , s) \mod qt\ \underset{\sim}{Z}_p[G_n] ,$$

d'où, par $\tilde{\psi}$,

$$\frac{1}{2}\mathcal{S}_{c,\psi}^*(K_n , s + t) \equiv \frac{1}{2}\mathcal{S}_{c,\psi}^*(K_n , s) \mod qt\ \underset{\sim}{Z}_p(\psi)[H_n] .$$

Posons $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T , s) = \sum_{i\geqslant 0} a_i(s)\, T^i$, $a_i(s) \in \underset{\sim}{Z}_p(\psi)$; comme $(\tau_n-1)^{p^n} \equiv \tau_n^{p^n}-1 \equiv 0$ mod p , on en déduit :

$$\sum_{i=0}^{p^n-1} a_i(s + t)(\tau_n - 1)^i \equiv \sum_{i=0}^{p^n-1} a_i(s)(\tau_n - 1)^i \mod qt ;$$

comme la famille $\{(\tau_n - 1)^i\ ,\ 0 \leqslant i < p^n\}$ est une base pour toute algèbre de H_n, on en déduit $a_i(s + t) \equiv a_i(s)$ mod qt , pour $0 \leqslant i < p^n$, d'où le résultat.

On peut donc écrire en particulier :

$$\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T , s) \equiv \frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T , 0) \mod q\Lambda_\psi ;$$

or la série de droite engendre les éléments $\frac{1}{2}\mathcal{S}_{c,\psi}^*(K_n , 0)$, qui donnent, par χ_n, les quantités $c(1 - \psi^{-1}\chi_n^{-1}(c)\langle c\rangle^{-1})\,\frac{1}{2}L_p(0 , \psi\chi_n)$. Or l'imprimitivité éventuelle de ψ fait que $L_p(0 , \psi\chi_n)$ est de la forme (Rem. II.4)

$$L_p(0 , \psi_1\chi_n)\prod_\ell(1 - \theta^{-1}\psi(\ell)\chi_n(\ell)) ,$$

où ψ_1 est le caractère primitif déduit de ψ ; or, pour n assez grand, $\theta^{-1}\psi\chi_n(\ell) \neq 1$, et $L_p(0 , \psi_1\chi_n)$ est un nombre de Bernoulli primitif intervenant dans la formule du nombre de classes relatives du corps $K_\psi(\mu_{qp^n})$, d'où la non-nullité de $L_p(0 , \psi\chi_n)$ pour n assez grand. On en déduit que la série $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T , 0)$ n'est pas la série nulle ; par ailleurs, si $\varpi_\psi \in \underset{\sim}{Z}_p(\psi)$ est de valuation 1 , cette série n'est pas congrue à 0 mod $\varpi_\psi\Lambda_\psi$ (dans le cas contraire, et même lorsque ψ est non primitif, ceci conduirait à avoir, pour le corps $K_\psi(\mu_q)$, un "invariant μ " d'Iwasawa non nul ; or le résultat fondamental de FERRERO et WASHINGTON contredit ce fait). Il en résulte que cette série a un degré de Weierstrass $\lambda \geqslant 0$: il existe donc dans Λ_ψ un polynôme distingué $P_\lambda(T)$ de degré λ et une série inversible $U(T)$ tels que $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T,0) = P_\lambda(T)\,U(T)$. On a donc la congruence :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T\ ,\ s) &\equiv P_\lambda(T)\,U(T) \mod q\Lambda_\psi\\ &\equiv T^\lambda\, U(T) \mod \varpi_\psi\ \Lambda_\psi\ .\end{aligned}$$

Ceci prouve que la série $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T\ ,\ s)$ n'est pas nulle, et que son degré de Weierstrass est aussi λ , ce qui démontre la proposition.

Définition V.2. - Pour tout entier a premier à p tel que $\langle a\rangle \neq 1$, on appelle $\alpha(a)$ l'élément de $\underset{\sim}{Z}_p$ tel que $\langle a\rangle = (1+q)^{\alpha(a)}$; on pose $\alpha(a)=p^{n(a)}\beta(a)$, $n(a) \geqslant 0$, $\beta(a) \in \underset{\sim}{Z}_p^*$. On remarque que $\langle a\rangle = 1 + qp^{n(a)}u$, $u \in \underset{\sim}{Z}_p^*$.

Nous aurons besoin des lemmes élémentaires suivants :

LEMME 2. - Si K et L sont cycliques sur $\underset{\sim}{Q}$, alors il existe un entier c tel que $(\frac{K}{c})$ et $(\frac{L}{c})$ engendrent respectivement G_K et G_L .

LEMME 3. - La série associée à l'élément $(1 - \psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1}(\frac{Q_n}{c}))_n$ de $\varprojlim \underset{\sim}{Z}_p(\psi)[H_n]$ est de degré de Weierstrass $p^{n(c)}$ (resp. 0) si $\psi(c)$ est une racine de l'unité d'ordre puissance de p (resp. non-puissance de p).

On peut alors énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION V.2. - Soit ψ un caractère pair mod f , et soit $(\chi_n)_n$ un caractère générateur de $\underset{\sim}{Q}_\infty$. Alors il existe un entier $\lambda_\psi \geqslant -1$, indépendant de s et de $(\chi_n)_n$, tel que l'on ait pour tout n assez grand $v_{\psi\chi_n}(\frac{1}{2}L_p(s,\psi\chi_n))=\lambda_\psi$. En outre, dans le cas primitif, on a $\lambda_\psi = -1$ si, et seulement si, ψ est un caractère de $\underset{\sim}{Q}_\infty$.

Démonstration. - Pour n assez grand, la valuation de $\frac{1}{2}L_p(s\ ,\ \psi\chi_n)$ est donnée quelque soit $(\chi_n)_n$, par la différence des degrés de Weierstrass des séries $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T\ ,\ s)$ et $1 - \psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1}(1+T)^{\alpha(c)}$: $\lambda_\psi = \lambda - \lambda'$; la proposition V.1 et le lemme 3 montrent que λ_ψ ne dépend pas de s .

D'après le lemme 2, on peut supposer que $\psi(c)$ a pour ordre celui de ψ , et que $\alpha(c) \in \underset{\sim}{Z}_p^*$; de cette façon on a, d'après le lemme 3, $\lambda' = 0$ ou 1 , d'où $\lambda_\psi \geqslant -1$. Dans le cas primitif, on a $\lambda_\psi = -1$ si, et seulement si, $\psi\chi_n$ est un caractère de $\underset{\sim}{Q}_\infty$, donc si, et seulement si, ψ a cette propriété (cf. Corol. 3 à la prop. IV.1).

Pour obtenir un critère analogue lorsque ψ n'est pas primitif, se reporter au corollaire 1 du paragraphe suivant.

2. "Translation" de l'invariant λ_ψ .

En transposant à nos séries $\frac{1}{2}\,\Sigma_{c,\psi}(T\ ,\ s)$ le formalisme établi au chapitre II, § 1, et en utilisant des congruences du type de celles de [18], p. 5, on obtient :

PROPOSITION V.3. - *Soit* ψ *un caractère pair* mod f *de la forme* $\psi = \psi_p\,\chi$; ψ_p , *d'ordre puissance de* p , *est supposé défini* modulo *un diviseur de* f , χ *est un caractère* modulo $f'|f$. *Alors on a* $\lambda_\psi = \lambda_\chi + \sum_\ell p^{n(\ell)}$, *où la somme porte sur les premiers* $\ell \neq p$, $\ell | f$, $\ell \nmid f'$ *tels que* $(\theta\chi^{-1})(\ell)$ *soit une racine de l'unité d'ordre puissance de* p .

Démonstration. - Soient L et K p-admissibles pour ψ et χ respectivement (on peut supposer $K \subset L$ puisque $f'|f$).

Introduisons χ' , le caractère de Dirichlet mod f issu de χ .

Notons ϖ un élément de valuation 1 dans l'anneau $\underset{\sim}{Z}_p(\psi\ ,\ \chi)$.

LEMME 4. - *On a* $\frac{1}{2}\,\Sigma_{c,\psi}(T\ ,\ s) \equiv \frac{1}{2}\,\Sigma_{c,\chi'}(T\ ,\ s)$ mod ϖ .

On a, par définition, par la substitution $T \to \tau_n - 1$ $(n \geqslant 0)$:

$$\frac{1}{2}\,\Sigma_{c,\psi}(\tau_n - 1\ ,\ s) = \frac{1}{2}\,\tilde{\psi}\mathbb{S}_c^*(L_n\ ,\ s)\ ,$$

$$\frac{1}{2}\,\Sigma_{c,\chi'}(\tau_n - 1\ ,\ s) = \frac{1}{2}\,\tilde{\chi}\mathbb{S}_c^*(L_n\ ,\ s)\ ;$$

comme on a de façon générale $\tilde{\psi}(\frac{L_n}{a}) = \psi(a)(\frac{Q_n}{a}) = \psi_p(a)\ \chi(a)(\frac{Q_n}{a}) \equiv \chi(a)(\frac{Q_n}{a})$ mod ϖ , il en résulte :

$$\frac{1}{2}\ \ {}_{c,\psi}(\tau_n - 1\ ,\ s) \equiv \frac{1}{2}\ \ {}_{c,\chi'}(\tau_n - 1\ ,\ s) \mod \varpi\ ,$$

et le lemme s'en déduit par un raisonnement analogue à celui du lemme 1.

Utilisons maintenant le fait que χ est un caractère de K : on a

$$\tilde{\chi}\mathbb{S}_c^*(L_n\ ,\ s) = \tilde{\chi}\pi_{L_n/K_n}\ \mathbb{S}_c^*(L_n\ ,\ s)\ ,$$

or $\pi_{L_n/K_n}\ \mathbb{S}_c^*(L_n\ ,\ s) = \mathbb{S}_c^*(K_n\ ,\ s)\ \prod_\ell(1 - \ell^{-1}\langle\ell\rangle^{1-s}(\frac{K_n}{\ell}))$ $(\ell | f_n\ ,\ \ell \nmid f'_n\ ,\ \ell \neq p)$; on vérifie que le produit porte aussi sur les ℓ , $\ell | f$, $\ell \nmid f'$, $\ell \neq p$. D'où

$$\frac{1}{2}\ \mathbb{S}_{c,\chi'}^*(L_n\ ,\ s) = \frac{1}{2}\ \mathbb{S}_{c,\chi}^*(K_n\ ,\ s)\ \prod_\ell(1 - \ell^{-1}\langle\ell\rangle^{1-s}\ \chi(\ell)(\frac{Q_n}{\ell}))\ .$$

La famille des $(1 - \ell^{-1}\langle\ell\rangle^{1-s}\ \chi(\ell)(\frac{Q_n}{\ell}))_n$ définit un élément de $\varprojlim \underset{\sim}{Z}_p(\chi)[H_n]$, dont la série associée est $1 - \ell^{-1}\langle\ell\rangle^{1-s}\ \chi(\ell)(1 + T)^{\alpha(\ell)}$, et a pour degré de Weierstrass $p^{n(\ell)}$ ou 0 selon que $\theta^{-1}\ \chi(\ell)$ est d'ordre puissance de p ou non (cf. Lemme 3) ; d'où la congruence

$$\frac{1}{2}\,\Sigma_{c,\psi}(T\ ,\ s) \equiv \frac{1}{2}\,\Sigma_{c,\chi}(T\ ,\ s)\ \prod_\ell(1 - \ell^{-1}\langle\ell\rangle^{1-s}\ \chi(\ell)(1 + T)^{\alpha(\ell)})$$

$$\equiv T^\lambda\ \prod_\ell\ T^{pn(\ell)}\ V \mod \varpi\ ,$$

V inversible, ℓ parcourant l'ensemble des premiers $\ell \neq p$, $\ell | f$, $\ell \nmid f'$, tels que $\theta\chi^{-1}(\ell)$ soit d'ordre puissance de p , λ étant le degré de Weierstrass de $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\chi}(T\ ,\ s)$.

Ceci prouve que le degré de Weierstrass de $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T\ ,\ s)$ est égal à $\Lambda = \lambda + \sum_{\ell} p^{n(\ell)}$.

On sait alors que λ_{ψ} et λ_{χ} s'obtiennent en retranchant respectivement à Λ et λ les degrés de Weierstrass des séries $1 - \psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1}(1 + T)^{\alpha(c)}$ et $1 - \chi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1}(1 + T)^{\alpha(c)}$; or d'après le lemme 3 ces degrés sont les mêmes car $\psi(c)$ et $\chi(c)$ sont, en même temps, d'odre puissance de p ou non. D'où la proposition.

COROLLAIRE 1. - *Soit* ψ *un caractère pair* mod f , *et soit* χ *le caractère* modulo $f'|f$ *déduit de* ψ ; *alors* $\lambda_{\psi} = \lambda_{\chi} + \sum_{\ell} p^{n(\ell)}$ $(\ell|f\ ,\ \ell\nmid f'\ ,\ \ell \neq p\ ,$ $\theta\chi^{-1}(\ell)$ *d'ordre puissance de* p).

COROLLAIRE 2. - *Soit* ψ *un caractère pair de conducteur* f_{ψ} *et d'ordre puissance de* p ; *alors* $\lambda_{\psi} = -1 + \sum_{\ell} p^{n(\ell)}$ $(\ell|f_{\psi}\ ,\ \ell \neq p)$.

COROLLAIRE 3. - *Si* ψ , *de conducteur* f_{ψ} , *est d'ordre puissance de* p , *une condition nécessaire et suffisante pour que* $\lambda_{\psi} = 0$ *est qu'il existe un, et un seul, nombre premier* $\ell|f_{\psi}$, $\ell \neq p$, *et que, pour cet unique* ℓ , *on ait* $\ell \equiv 1 \mod q$, $\ell \not\equiv 1 \mod qp$.

On est en mesure de donner le critère général suivant essentiellement dû à RIBET ([18], § 5) :

PROPOSITION V.4. - *Soit* ψ *un caractère primitif pair. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que* $\lambda_{\psi} > 0$ *est que* $\frac{1}{2} L_p(s,\psi) \equiv 0 \mod \varpi_{\psi}$.

Démonstration. - Si ψ est d'ordre premier à p , c'est évident (utiliser par exemple la proposition IV.1 et ses conséquences).

Si ψ est d'ordre non-puissance de p , ceci résulte de la réunion des propositions IV.1 et V.3.

Supposons donc ψ d'ordre puissance de p . On peut supposer aussi le conducteur f_{ψ} non-puissance de p sinon, dans ce cas, on a à la fois $\lambda_{\psi} = -1$ (prop. V.2) et $\frac{1}{2} L_p(s\ ,\ \psi)$ non entier (corol. 3 à la prop. IV.1).

D'après le lemme 2, on peut choisir c tel que $v_{\psi}(\psi^{-1}(c) - 1) = 1$ et tel que $\langle c\rangle \not\equiv 1 \mod qp$; dans ce cas (lemme 3), la série associée à $c(1-\psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1}(\frac{Q_n}{c})^{-1})$ est de la forme $(T + u\varpi_{\psi})V$, $u \in \mathbb{Z}_p(\psi)^*$, V série inversible. Par division euclidienne dans Λ_{ψ} de $\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T\ ,\ s)$ par $T + u\varpi_{\psi}$, on obtient (cf. [15], 5, § 2) :

$$\frac{1}{2}\Sigma_{c,\psi}(T\ ,\ s) = q_{\psi}(T\ ,\ s)(T + u\varpi_{\psi}) + r_{\psi}(s)\ ,$$

$q_\psi(T , s) \in \Lambda_\psi$, $r_\psi(s) \in \underset{\sim}{Z}_p(\psi)$, et en faisant $T = 0$ on obtient :

$$c(1 - \psi^{-1}(c)\langle c\rangle^{s-1}) \frac{1}{2} L_p(s , \psi) = q_\psi(0 , s) u\varpi_\psi + r_\psi(s) ;$$

or l'hypothèse f_ψ non-puissance de p entraîne $\frac{1}{2} L_p(s , \psi) \in \underset{\sim}{Z}_p(\psi)$, donc $r_\psi(s) = R_\psi(s) \varpi_\psi$, $R_\psi(s) \in \underset{\sim}{Z}_p(\psi)$. En posant $Q_\psi(T , s) = q_\psi(T,s) + u^{-1} R_\psi(s)$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \Sigma_{c,\psi}(T , s) = Q_\psi(T , s)(T + u\varpi_\psi) - u^{-1} R_\psi(s) T .$$

On sait que le degré de Weierstrass de $\frac{1}{2} \Sigma_{c,\psi}$ est $\Lambda = \lambda + \sum_\ell p^{n(\ell)}$; appelons $\rho \geqslant 0$ celui de $Q_\psi(T , s)$; il vient (avec U , U' inversibles) :

$$T^\Lambda U \equiv T^{\rho+1} U' - u^{-1} R_\psi(s) T \mod \varpi_\psi ,$$

soit, de façon évidente, $\rho = \Lambda - 1$; il en résulte bien que $\frac{1}{2} L_p(s , \psi)$ est non inversible si, et seulement si, $\Lambda > 1$; or ici $\lambda_\psi = \Lambda - 1$, d'où la proposition.

Ce résultat a été démontré (pour $p \neq 2$) par RIBET ([18], § 5) sous forme du critère équivalent suivant :

COROLLAIRE. - Soit ψ un caractère primitif pair d'ordre puissance de p . Une condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{1}{2} L_p(s , \psi) \in \underset{\sim}{Z}_p(\psi)^*$ est que $\sum_\ell p^{n(\ell)} = 1$ $(\ell | f_\psi , \ell \neq p)$.

On constate que le calcul de λ_ψ se ramène toujours au cas d'un caractère primitif d'ordre premier à p ; on va voir ci-dessous que dans ce cas le calcul numérique de λ_ψ est toujours effectif et élémentaire.

3. Calcul de λ_ψ (ψ d'ordre premier à p).

On suppose ψ d'ordre premier à p ; sous cette hypothèse, les caractères $\psi^p \chi_n$ et $\psi \chi_n$ sont $\underset{\sim}{Z}_p$-conjugués ($\psi^p \chi_n = (\psi\chi_n)^a$, en prenant $a \equiv 1 \mod p^n$ et $a \equiv p$ modulo l'ordre de ψ), donc les valuations de $\frac{1}{2} L_p(s , \psi\chi_n)$ et de $\frac{1}{2} L_p(s , (\psi\chi_{n+1})^p)$ sont les mêmes, et on peut utiliser le corollaire 4 à la proposition IV.1. On obtient alors sans difficultés le résultat suivant qui, joint à la méthode du chapitre II, § 3, généralise et systématise les méthodes de calcul de [9] et de [5] (nous l'avions donné dans [10] essentiellement) :

PROPOSITION V. 5. - Soit ψ un caractère primitif pair, d'ordre premier à p . Soit $(\chi_n)_n$ un caractère générateur de $\underset{\sim}{Q}_\infty$. Alors il existe un plus petit entier $m \geqslant 0$ tel que $v_{\psi\chi_m}(\frac{1}{2} L_p(s , \psi\chi_m)) < v_{\psi\chi_m}(p)$; pour cet entier m , on a $\lambda_\psi = v_{\psi\chi_m}(\frac{1}{2} L_p(s , \psi\chi_m))$.

VI. Compléments

Nous rédigerons dans un fascicule des "Publications mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon" des chapitres complémentaires consacrés aux liens qui existent entre la théorie des fonctions L_p et la théorie des genres dans les extensions abéliennes, aux propriétés analytiques des fonctions L_p , et à un certain nombre d'exemples numériques.

Les propriétés analytiques s'obtiennent tout simplement en considérant la transformée de Mellin arithmétique non plus comme application de $\varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n]$ dans $\mathbb{Z}_p[G_K]^{\mathbb{Z}_p}$, mais comme application de cette limite projective dans $\mathbb{Z}_p[G_K][[X]]$. On obtient alors avec précision les propriétés de développement en séries entières, d'études des zéros ...

Prenons par exemple, $p = 3$, et pour ψ le caractère quadratique de conducteur 3.3299 ; nous pouvons déjà voir que le "développement en série" de $\mathfrak{S}_c^*(K , s)$, noté $\mathfrak{S}_c^*(K , X)$ (avec $K = K_\psi(\sqrt{-3})$), modulo 3^5 , s'obtient à partir de $S_c(K_4)$ via la transformation de Mellin de cet élément de Stickelberger. La connaissance de $\mathfrak{S}_c^*(K , X)$ modulo 3^5 permet alors :

(i) de développer en série " $L_3(X , \psi)$ " $\equiv -18X(10 + 10X + 9X^2 + 21X^3 + 9X^5)$ mod 3^5 $\mathbb{Z}_3[[X]]$,

(ii) de calculer la valuation $v_3(L_3(s , \psi))$ pour tout s non "trop proche" des zéros de $L_3(s , \psi)$,

(iii) d'étudier ces zéros (il y en a deux ici),

(iv) de calculer $L_3(1 , \psi)$ en vue de l'annulation de $\mathfrak{a}_\psi$ (on trouve que 9 annule $\mathfrak{a}_\psi$ puis, que $|\mathfrak{a}_\psi| = 9$ en utilisant les interprétations de [7] (th. 2) ou [8] (II, § 5), et enfin que $\mathfrak{a}_\psi \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$) ,

(v) de calculer λ_ψ ($\lambda_\psi = 2$ ici).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 353-384.

[2] BARSKY (D.). - Transformation de Cauchy p-adique et algèbre d'Iwasawa, Math. Annalen, t. 232, 1978, p. 255-266.

[3] COATES (J.). - p-adic L-functions and Iwasawa's theory, "Algebraic number fields", Proceedings of a symposium [1975. Durham], Edited by A. Frohlich, p. 269-353. - London, Academic Press, 1977.

[4] FRESNEL (J.). - Nombres de Bernoulli et fonctions L p-adiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 17, 1967, fasc. 2, p. 281-333 (Thèse Sc. math., Bordeaux, 1967).

[5] GILLARD (R.). - $\mathbb{Z}_\ell$-extensions, fonctions L ℓ-adiques et unités cyclotomiques, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, 1976/77, exposé 24.

[6] GILLARD (R.). - Fonctions L p-adiques et groupe des classes dans une Γ-extension, Séminaire de théorie des nombres, Grenoble, 1973.

[7] GILLARD (R.). - Sur le groupe des classes des extensions abéliennes réelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 18e année, 1976/77, n° 10, 6 p.

[8] GREENBERG (R.). - On p-adic L-functions and cyclotomic fields, Nagoya math. J., t. 56, 1975, p. 61-77, et t. 67, 1977, p. 139-158.

[9] GOLD (R.). - Examples of Iwasawa invariants, Acta Arithm., Warszawa, t. 26, 1974-1975, p. 21-32 et 233-240.

[10] GRAS (G.). - Application de la notion de φ-objet à l'étude du groupe des classes d'idéaux des extensions abéliennes, Publications mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon, 1975/76.

[11] GRAS (G.). - Annulation du groupe des ℓ-classes généralisées d'une extension abélienne réelle de degré premier à ℓ, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 29, 1979, fasc. 1, p. 15-32.

[12] IWASAWA (K.). - On p-adic L-functions, Annals of Math., t. 89, 1969, p. 198-205.

[13] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L-functions. - Princeton, Princeton University Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 74).

[14] KUBOTA (T) und LEOPOLDT (H.-W.). - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, I, J. für reine und angew. Math., t. 214/215, 1964, p. 328-339.

[15] LANG (S.). - Cyclotomic fields. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1978 (Graduate Texts in Mathematics, 59).

[16] LEOPOLDT (H.-W.). - Zur Struktur der ℓ-Klassengruppe galoisscher Zahlkörper, J. für reine und angew. Math., t. 199, 1958, p. 165-174.

[17] ORIAT (B.). - Annulation de groupes de classes réelles (à paraître).

[18] RIBET (K.-A.). - p-adic L-functions attached to characters of p-power order, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 1977/78, n° 9, 8 p.

[19] RIBET (K.-A.). - Fonctions L p-adiques et théorie d'Iwasawa (rédigé par P. Satgé), Publications mathématiques d'Orsay, 1977/78.

[20] SERRE (J.-P.). - Sur le résidu de la fonction zêta p-adique d'un corps de nombres, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287, 1978, Série A, p. 183-188.

[21] WASHINGTON (L.-C.). - A note on p-adic L-functions, J. of Number Theory, t. 8, 1976, p. 245-250.