Khyra Gérardin

Un résultat sur le quotient de Hadamard des séries rationnelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, nº 1 (1978-1979), exp. nº 12, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (Théorie des nombres) 20e année, 1978/79, n° 12, 14 p.

8 janvier 1979

UN RÉSULTAT SUR LE QUOTIENT DE HADAMARD DES SÉRIES RATIONNELLES

par Khyra GÉRARDIN (*)
[Université Paris-VIII]

Rappels. - Soient X un ensemble fini, et X^* le monoïde libre qu'il engendre ; A étant l'anneau des entiers algébriques, $A^{rat}\langle\langle X\rangle\rangle$ désigne l'algèbre des séries rationnelles sur X à coefficients dans A [8].

Rappelons qu'une série formelle $a = \sum_{f\in X^*}(a , f)f$ est rationnelle si, et seulement si, il existe un entier $p \geqslant 1$, une représentation μ de X^* dans $M_p(A)$, une matrice R de $M_p(A)$ telle que, pour tout mot f de X^*, on ait :

$$(a , f) = \operatorname{Tr} R\mu f \quad [8].$$

On peut toujours se ramener au cas où la matrice R est la matrice E_{p1} dont le seul coefficient non nul est le coefficient $(p , 1)$.

Il est facile de voir que l'algèbre $A^{rat}\langle\langle X\rangle\rangle$ est stable pour le produit de Hadamard où, rappelons-le, le produit de Hadamard $a \odot b$ de deux séries a et b est défini de la manière suivante :

si $a = \sum_f (a , f)f$ et $b = \sum_f (b , f)f$, alors $a \odot b = \sum_f [(a , f) \times (b , f)]f$.

On s'intéresse ici au problème inverse : Etant données deux séries rationnelles a et b, à coefficients entiers algébriques, à quelles conditions la série $c = \sum_f (c , f)f$, définie de la manière suivante :

$$(c , f) = \begin{cases} = \dfrac{(a , f)}{(b , f)} & \text{si } (b , f) \neq 0 \\ = 0 & \text{sinon ,} \end{cases}$$

est-elle rationnelle ?

Rappelons quelques résultats obtenus dans le cas où l'alphabet X est réduit à une lettre, le monoïde libre X^* étant le monoïde additif $\underline{N}$.

THÉORÈME 1 [7]. - Si la série b a deux pôles, et si la série c est à coefficients entiers algébriques, alors la série c est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques.

(*) Texte reçu le 31 mai 1979.
Khyra GÉRARDIN, 12 rue Beccaria, 75012 PARIS.

THÉORÈME 2 [1]. - Si la série b a un pôle de module strictement supérieur aux modules des autres pôles et si la série c est à coefficients entiers algébriques, alors elle est rationnelle.

Ces deux résultats restent valables lorsque l'alphabet X a au moins deux lettres [3]. Par contre, le théorème suivant

THÉORÈME 2' [1]. - Si la série b a trois pôles, et si la série c est à coefficients entiers algébriques, alors elle est rationnelle.

n'est plus valable lorsque l'alphabet X a au moins deux lettres. En effet, la démonstration de D. G. CANTOR, à une variable, utilise le résultat de MALHER concernant la répartition des zéros d'une série rationnelle à une variable. Il est connu que les zéros d'une série rationnelle à une variable forment un sous-ensemble rationnel de $\underset{\sim}{N}$ [6]. Ce résultat n'est plus valable lorsque l'alphabet X a au moins deux lettres. Donnons un contre-exemple.

Soit $X = (x , y)$ un alphabet à deux lettres, et soit $a = \sum_f (a , f)f$ la série rationnelle sur X^*, définie par la représentation μ et la matrice R, où

$$\mu x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mu y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Pour tout mot f de X^*, nous avons :

$$(a , f) = \mathrm{Tr}\, R\mu f = (|f|_x - |f|_y) ,$$

où $|f|_x$ (resp. $|f|_y$) désigne le nombre d'occurences de la lettre x (resp. y) dans le mot f. Les coefficients de la série a sont nuls pour tous les mots f qui ont autant d'occurences de la lettre x que de la lettre y.

Or cet ensemble n'est pas un sous-ensemble rationnel du monoïde libre X^*.

Au lieu de considérer l'anneau des entiers algébriques nous pouvons travailler sur un anneau qui est un $\underset{\sim}{Z}$-module libre de type fini [10].

Supposons l'alphabet $X = (x , y)$.

CONJECTURE. - Si la série $b = \sum_f (b , f)f$ admet une représentation μ de X^* dans $M_p(\underset{\sim}{N})$, et si la série c est à coefficients entiers algébriques, alors elle est rationnelle.

Le cas où $\mu x = \lambda \mu y$, λ étant un entier, la matrice μx, admettant une valeur propre de module strictement supérieur aux modules des autres valeurs propres, se traite comme le cas du théorème [3].

Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Si la représentation μ associée à la série b est une repré-

<u>sentation de</u> X^* <u>dans</u> $M_2(\underset{\sim}{N}^*)$, <u>alors la série</u> c <u>est rationnelle sur l'anneau</u> A .

<u>Démonstration du théorème 3</u>. - La démonstration du théorème 3 se fait en examinant les différents cas.

Il est facile de voir que toute matrice de $M_2(\underset{\sim}{N}^*)$ est diagonalisable sur $\underset{\sim}{R}$.

Il existe un cas qui se traite exactement comme le cas où les matrices μx et μy sont proportionnelles c'est le cas où l'algèbre, engendrée par les matrices μx , μy et R , est une algèbre triangulisable sur $\underset{\sim}{C}$. Esquissons rapidement la démonstration.

Soient α et β (resp. α' et β') les valeurs propres de la matrice μx (resp. μy) , avec les conditions :

$$\alpha > |\beta| \quad \text{et} \quad \alpha' > |\beta'| \ .$$

Les valeurs propres de toute matrice μf sont donc :

$$\begin{cases} \alpha_f = \alpha^{|f|_x} \alpha'^{|f|_y} \\ \beta_f = \beta^{|f|_x} \beta'^{|f|_y} \end{cases}$$

où $|f|_x$ (resp. $|f|_y$) désigne le nombre d'occurences de la lettre x (resp. y) dans le mot f .

Le coefficient (b , f) du mot f dans la série b est donc de la forme :

$$(b\ ,\ f) = r\alpha_f - s\beta_f = r\alpha^{|f|_x} \alpha'^{|f|_y} - s\beta^{|f|_x} \beta'^{|f|_y} \ .$$

Le coefficient (c , f) du mot f dans la série c s'écrit donc :

$$(c\ ,\ f) = \frac{(a\ ,\ f)}{r\alpha^{|f|_x} \alpha'^{|f|_y} - s\beta^{|f|_x} \beta'^{|f|_y}} \ .$$

Comme β/α et β'/α' sont en valeurs absolues plus petites que 1 , il existe une longueur des mots f à partir de laquelle l'inégalité

$$\text{(I)} \qquad \left|\frac{s}{r}(\beta/\alpha)^{|f|_x}(\beta'/\alpha')^{|f|_y}\right| < 1$$

a lieu.

En ne considérant que les mots f pour lesquels nous avons l'inégalité (I), nous pouvons écrire :

$$(c\ ,\ f) \times \alpha^{|f|_x} \alpha'^{|f|_y} = \frac{(a\ ,\ f)}{r - s(\beta/\alpha)^{|f|_x}(\beta'/\alpha')^{|f|_y}} \ .$$

Donc pour tout entier $p \geqslant 1$, nous avons le développement suivant :

$$(\mathrm{I}') \qquad (c\ ,\ f) \times \alpha^{|f|_x} \alpha'^{|f|_y} = \frac{(a\ ,\ f)}{r[1 - \frac{s}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y}]}$$

$$= \frac{(a,f)}{r} + \frac{(a,f)}{r} \times \frac{s}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y} + \dots + \frac{(a,f)}{r}[\frac{s}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y}]^p$$

$$+ \frac{(a\ ,\ f)}{r}(\frac{s}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y})^{p+1} \sum_{n \geq 0}[\frac{s}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y}]^n .$$

La série de terme général

$$\frac{(a\ ,\ f)}{r} + \frac{(a\ ,\ f)}{r} \times \frac{s}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y} + \dots + \frac{(a\ ,\ f)}{r}[\frac{s}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y}]^p$$

est rationnelle comme combinaison linéaire de produit de Hadamard de séries rationnelles.

En examinant les déterminants de Hankel de la série de terme général

$$\frac{(a\ ,\ f)}{r}[\frac{s}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y}]^{p+1} \sum_{n \geq 0}[\frac{s}{r}(\frac{\beta}{\alpha})^{|f|_x}(\frac{\beta'}{\alpha'})^{|f|_y}]^n ,$$

nous voyons que l'on peut mettre en facteur, dans chaque ligne "d'indice g ", le coefficient

$$(\beta/\alpha)^{|g|_x} \times (\beta'/\alpha')^{|g|_y}$$

et, dans chaque colonne "d'indice h ", le coefficient :

$$(\beta/\alpha)^{|h|_x} \times (\beta'/\alpha')^{|h|_y} .$$

Or β/α et β'/α' sont en module strictement inférieur à 1 . Les déterminants de Hankel de la série considérée tendent vers zéro très vite. Les déterminants de Hankel de la série de terme général

$$(c\ ,\ f) \times \alpha^{|f|_x} \times \alpha'^{|f|_y}$$

tendent vers zéro très vite lorsque la longueur des mots f croît.

Or ce sont des entiers algébriques. Ils sont donc nuls à partir d'une certaine longueur des mots f ; la série c est donc rationnelle [2], ce qui démontre le théorème 1 dans ce cas.

Examinons le cas général, et voyons le comportement des valeurs propres en fonction de la longueur des mots

1. Cas où dét μx = dét $\mu y = 0$.

Rappelons un lemme dont la démonstration figure déjà en [5].

LEMME 1. - Soit A une matrice de $M_2(\mathbb{Z})$ ayant une valeur propre entière, alors

<u>il existe une matrice</u> P <u>de</u> $GL_2(\mathbb{Z})$ <u>telle que</u> PAP^{-1} <u>soit une matrice triangulaire</u>.

<u>Démonstration du lemme 1</u>. - Soit p la valeur propre entière de la matrice A, et soit $V = (x_0 , y_0)$ un vecteur propre de A associé à p tel que les entiers x_0 et y_0 soient premiers entre eux. Il est facile de voir qu'un tel vecteur existe.

x_0 et y_0 étant premiers entre eux, il existe deux entiers z et t tels que l'on ait $zx_0 - ty_0 = 1$.

Soit P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} z & -t \\ -y_0 & x_0 \end{pmatrix} .$$

On a dét.P.= 1, d'où $P \in GL_2(\mathbb{Z})$.

Calculons PAP^{-1} :

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} z & -t \\ -y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & t \\ y_0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ o & q \end{pmatrix}$$

ce qui démontre le lemme 1.

Grâce au lemme 1, nous pouvons étudier un sous-cas très particulier du cas où dét μx = dét $\mu y = 0$, c'est le cas où, pour tout mot f de XX^*, la matrice $P_f . \mu f . (P_f)^{-1}$ est une matrice diagonale, et $P_f \in GL_2(\mathbb{Z})$. Il est facile de voir par récurrence sur la longueur des mots f que la valeur propre non nulle de la matrice μf est de la forme

$$a_f \, \alpha^{|f|_x} \, \alpha'^{|f|_y} ,$$

où α (resp. α') est la valeur propre non nulle de la matrice μx (resp. μy), a_f étant un entier strictement positif, et $|f|_x$ (resp. $|f|_y$) étant le nombre d'occurences de la lettre x (resp. y) dans le mot f.

Faisons rapidement cette démonstration :

Soit α_f la valeur propre non nulle de la matrice μf. Par hypothèse, α_f est de la forme $a_f \, \alpha^{|f|_x} \, \alpha'^{|f|_y}$, α_f étant un entier, le lemme 1 permet d'affirmer l'existence d'une matrice P_f de $GL_2(\mathbb{Z})$ telle que la matrice $P_f . \mu f . (P_f)^{-1}$ soit une matrice diagonale.

Soit S la matrice de $GL_2(\mathbb{Z})$ telle que la matrice $SP_f \, \mu x (SP_f)^{-1}$ soit une matrice diagonale dont le coefficient $(1 , 1)$ soit égal à α.

En calculant la trace de la matrice

$$SP_f \, \mu f (SP_f)^{-1} . SP_f \, \mu x (SP_f)^{-1} ,$$

qui est égale à la trace de la matrice $\mu f \mu x$, nous voyons que cette trace s'écrit:

$$aa_f\ \alpha^{|f|_x+1}\ \alpha'^{|f|_y} = a_{fx}\ \alpha^{|f|_x+1}.\alpha'^{|f|_y} ,$$

a étant un entier qui ne dépend que de la matrice S et qui est égal au produit de ses termes diagonaux.

Il existe une autre démonstration de ce résultat qui est très simple.

La matrice μx s'écrit $\mu x = \alpha\mu_1\ x$, où $\mu_1\ x$ est une matrice idempotente de $M_2(\underset{\sim}{Z})$.

De même, μy s'écrit $\mu y = \alpha'\ \mu_1\ y$, où $\mu_1\ y$ est une matrice idempotente de $M_2(\underset{\sim}{Z})$.

Donc, pour tout mot f , la matrice μf s'écrit

$$\mu f = \alpha^{|f|_x}\ \alpha'^{|f|_y} \times \mu_1\ f ,$$

μ_1 étant la représentation définie par les matrices $\mu_1\ x$ et $\mu_1\ y$, et

$$a_f = \mathrm{Tr}\ \mu_1\ f .$$

Le terme général de la série b s'écrit donc :

$$\mathrm{Tr}\ R\mu f = r_f\ a_f\ \alpha^{|f|_x}\ \alpha'^{|f|_y} ,$$

r_f étant le coefficient $(1\ ,\ 1)$ de la matrice R dans la base où la matrice μf est diagonale.

Il est immédiat que les séries de terme général r_f , a_f et af sont rationnelles. Démontrons que la série de terme général r_f est rationnelle et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

En effet, pour tout entier $p \geqslant 1$, nous avons

$$\mathrm{Tr}\ R(\mu f)^p = r_f(\alpha_f)^p = r_f(a_f)^p\ \alpha^{p|f|_x} \times \alpha'^{p|f|_y} .$$

Si g et h sont deux mots du monoïde libre X^* , alors :

$$\mathrm{Tr}\ R\mu g(\mu f)^p\ \mu h = r_{gf^ph}\ a_{gf^ph}\ \alpha^{|g|_x+p|f|_x+|h|_x}\ \alpha'^{|g|_y+p|f|_y+|h|_y} .$$

Or $\mathrm{Tr}\ R\mu g(\mu f)^p\ \mu h = \mathrm{Tr}\ \mu h R\mu g(\mu f)^p = r'\ \alpha^{p|f|_x}\ \alpha'^{p|f|_y}(a_f)^p$.

Si l'on écrit la représentation μ sous la forme :

$$\mu f = \alpha^{|f|_x}\ \alpha'^{|f|_y} \times (\mu_1\ f) ,$$

alors

$$a_{gf^ph} = \mathrm{Tr}\ \mu_1\ g(\mu_1\ f)^p(\mu_1\ h) = \mathrm{Tr}\ \mu_1\ h\mu_1\ g(\mu_1\ f)^p = r''(a_f)^p ,$$

d'où

$$r_{gf^ph} = \frac{r'}{r''}\ \alpha^{-|g|_x-|h|_x}\ \alpha'^{-|g|_y-|h|_y} ,$$

d'où

$$r_{gf^ph} = r_{gf^{p'}h} \ , \quad \forall\ p\ ,\ p' \geq 1\ ,\quad \forall\ f \in XX^*\ ,\quad \forall\ g\ ,\ h \in X^*\ .$$

Les déterminants de Hankel de la série de terme général r_f sont presque tous nuls. Cette série est donc rationnelle. La représentation minimale γ qui lui est associée est telle que, pour toute matrice γf et pour tout entier p, on a :

$$\gamma f = (\gamma f)^p\ .$$

Cette représentation minimale est donc finie [9]. Soient $p_1\ ,\ p_2\ ,\ldots,\ p_k$ les valeurs distinctes de la série de terme général r_f. Il est facile de voir que, pour tout entier p_i, $1 \leq i \leq k$, la série $a_i = \sum_{f|r_f=p_i} f$ est rationnelle. Donc, pour tout i, la série $a_i' = \sum_{f|r_f=p_i} 1/p_i\ f$ est rationnelle.

La série de terme général $1/r_f$ qui est égale à la somme de k séries rationnelles est donc rationnelle.

Pour terminer la démonstration, il reste à voir que la série de terme général $1/a_f$ est rationnelle. La représentation μ_1 est engendrée par deux idempotents de $M_2(\underset{\sim}{Z})$ qui sont $\mu_1\ x$ et $\mu_1\ y$.

Soit a_f la valeur propre non nulle de la matrice $\mu_1\ f$. Pour tout couple de mots g et h de X^*, nous avons

$$\begin{aligned} a_{gf^ph} &= \mathrm{Tr}\ \mu_1\ g(\mu_1\ f)^p\ \mu_1\ h = \mathrm{Tr}\ \mu_1\ h.\mu_1\ g(\mu_1\ f)^p \\ &= a'_{gh}(a_f)^p\ . \end{aligned}$$

Donc les déterminants de Hankel de la série de terme général $1/a_f$ sont presque tous nuls.

La série de terme général $1/a_f$ est donc rationnelle.

La série $c = \sum_f (c\ ,\ f)f$ est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques, ce qui termine la démonstration du théorème 1 dans ce cas.

Le cas général se traite comme ce cas particulier.

La matrice μx ayant une valeur propre entière, le lemme 1 montre qu'il existe une matrice P de $GL_2(\underset{\sim}{Z})$ telle que la matrice $P\mu x P^{-1}$ soit une matrice triangulaire supérieure. Il est facile de voir qu'il existe une matrice Q de $GL_2(\underset{\sim}{Q})$ telle que la matrice $QP\mu x(QP)^{-1}$ soit une matrice diagonale avec dét $Q = 1$.

Si α est la valeur propre non nulle de la matrice μx, la matrice μx s'écrit donc $\mu x = \alpha\mu_1\ x$, où $\mu_1\ x$ est un idempotent de $M_2(\underset{\sim}{Q})$; de même, la matrice μy s'écrit $\mu y = \alpha'\ \mu_1\ y$, α' étant la valeur propre non nulle de la matrice $\mu_1\ y$, et $\mu_1\ y$ étant un idempotent de $M_2(\underset{\sim}{Q})$. Les matrices $\mu_1\ x$ et $\mu_1\ y$ définissent une représentation de X^* dans $M_2(\underset{\sim}{Q})$.

Les raisonnements qui ont été faits précédemment sur l'anneau A sont valables sur le corps $\underset{\sim}{Q}$. La série c est rationnelle sur le corps $\underset{\sim}{Q}$. Or l'anneau A est un anneau de Fatou [8]. La série c est donc rationnelle sur l'anneau A.

2. Cas où $\text{dét}(\mu x)^2 + \text{dét}(\mu y)^2$ n'est pas nul et l'algèbre engendrée par les matrices μf n'est pas une algèbre triangulisable sur $\underset{\sim}{R}$.

L'algèbre enveloppante du monoïde engendré par les matrices μf n'étant pas triangulisable sur $M_2(\underset{\sim}{R})$ est dans ce cas particulier une algèbre irréductible.

Soient α_f et β_f les valeurs propres de la matrice μf avec la condition

$$\alpha_f > |\beta_f| .$$

Nous pouvons supposer que la matrice R est la matrice E_{21} dont le seul coefficient non nul est le coefficient $(2 , 1)$ et qui est égal à 1 [8]. Dans ce cas, le coefficient du mot f dans la série b s'écrit :

$$(b , f) = \mathrm{Tr}\ R\mu f = r_f(\alpha_f - \beta_f) .$$

Enonçons un lemme dont la démonstration est essentiellement technique.

LEMME 2. - La série $\sum_f(r_f \times \alpha_f)f$ est rationnelle sur $\underset{\sim}{R}$.

Démonstration. - La démonstration est faite dans le cas où $\beta_f \neq 0$, car lorsque $\beta_f = 0$ le lemme 2 est trivial.

Si la matrice μf s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ses valeurs propres α_f et β_f sont respectivement égales à :

$$\frac{a + d + \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

et

$$\frac{a + d - \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

La série $\sum_f(\mathrm{Tr}\ R\mu f)f \odot \sum_f \mathrm{Tr}(\mu f)f$ est rationnelle. Son terme général s'écrit :

$$r_f(\alpha_f - \beta_f)(\alpha_f + \beta_f) = r_f(\alpha_f^2 - \beta_f^2) ,$$

donc la série de terme général $r_f(a + d)\sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}$ est rationnelle, et par conséquent la série de terme général $r_f(\alpha_f)^2$ est rationnelle.

La série de terme général $\mathrm{Tr}(\mu f)^{-1}$ est rationnelle. En effet, pour tout mot f de X^*, nous avons :

$$\mathrm{Tr}(\mu f)^{-1} = \mathrm{Tr}^t\ (\mu f)^{-1} ,$$

et l'application $f \longmapsto \mathrm{Tr}^t\ (\mu f)^{-1}$ étant le produit de deux anti-homomorphismes est un homomorphisme.

La série de terme général :

$$r_f(\alpha_f)^2\left(\frac{1}{\alpha_f} + \frac{1}{\beta_f}\right) = r_f(\alpha_f)^2\left[\frac{1}{\alpha_f} + \frac{\alpha_f}{ad - bc}\right]$$

est rationnelle, ce qui s'écrit :

(1) $$r_f\ \alpha_f + r_f \frac{(\alpha_f)^3}{ad - bc} .$$

Il est facile de voir, par récurrence sur p , que la série $\sum_f[\mathrm{Tr}\ R(\mu f)^p]f$ est rationnelle pour tout entier $p \geqslant 1$.

En particulier, la série de terme général :

$$r_f[(\alpha_f)^3 - \frac{(ad - bc)^3}{(\alpha_f)^3}] \tag{2}$$

est rationnelle, ce qui permet d'écrire la rationnalité de la série de terme général :

$$r_f.[\alpha_f(ad - bc) + \frac{(ad - bc)^3}{(\alpha_f)^3}] = r_f(\alpha_f(ad - bc) + (\beta_f)^3) ,$$

ce qui démontre la rationnabilité de la série de terme général $\sum_{f\in X^*}(r_f.a_f)f$, ce qui démontre le lemme 2.

La série de terme général r_f est rationnelle ; en effet, la série $\sum_f(\mathrm{Tr}(\mu f)^{-1})f$ étant rationnelle, la série :

$$\sum_f(r_f\ \alpha_f)f \odot \sum_f \mathrm{Tr}(\mu f^{-1})f$$

est rationnelle. Son terme général s'écrit :

$$r_f\ \alpha_f \times (\frac{1}{\alpha_f} + \frac{\alpha_f}{ad - bc}) = r_f + \frac{r_f(\alpha_f)^2}{ad - bc} .$$

La série de terme général $r_f(\alpha_f)^2/(ad - bc)$ étant rationnelle, il est immédiat que la série de terme général r_f est rationnelle.

Ceci permet de prouver que la série de terme général r_f^{-1} est rationnelle, et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, ainsi que la rationnelle de la série de terme général β_f/α_f .

En effet, pour tout mot f de X^* , r_f est le coefficient $(1 , 1)$ de la matrice R dans la base où la matrice μf est diagonale.

Donc, pour tout mot f de X^* et pour tout entier $p \geqslant 1$, nous avons :

$$r_{f^p} = r_f .$$

Plus généralement, si h et g sont deux mots quelconques du monoïde libre X^* , nous avons :

$$\mathrm{Tr}\ R\mu g(\mu f)^p\ \mu h = r_{gf^ph}.(\alpha_{gf^ph} - \beta_{gf^ph}) .$$

$$\mathrm{Tr}\ R\mu g(\mu f)^p\ \mu h = \mathrm{Tr}\ \mu h R\mu g(\mu f)^p = r'_1(\alpha_f)^p + r'_2(\beta_f)^p , \quad \forall\ p \geqslant 1 .$$

α_{gf^ph} et β_{gf^ph} sont les valeurs propres de la matrice $\mu g(\mu f)^p\ \mu h$ qui sont les mêmes que celles de la matrice $\mu h\mu g(\mu f)^p$. Elles sont donc de la forme :

$$\begin{cases} \alpha_{gf^ph} = (u\alpha_f^p + t\beta_f^p + \sqrt{(u\alpha_f^p - t\beta_f^p)^2 + 4vw(\alpha_f\ \beta_f)^p})/2 \\ \beta_{gf^ph} = (u\alpha_f^p + t\beta_f^p - \sqrt{(u\alpha_f^p - t\beta_f^p)^2 + 4vw\ \alpha_f\ \beta_f)^p})/2 \end{cases}$$

u , t , v , w étant des nombres réels.

En identifiant les deux expressions de $\mathrm{Tr}\ R\mu g(\mu f)^p\ \mu h$, nous obtenons :

$$r_{gf^p h}\cdot\sqrt{(u\alpha_f^p - t\beta_f^p)^2 + 4vw(\alpha_f\ \beta_f)^p} = r'_1(\alpha_f)^p + r'_2(\beta_f)^p .$$

$$(r_{gf^p h})^2\cdot[(u\alpha_f^p - t\beta_f^p)^2 + 4vw(\alpha_f\ \beta_f)^p] = [r'_1(\alpha_f)^p + r'_2(\beta_f)^p]^2 .$$

Ce qui donne, après calculs, puisque cette égalité a lieu pour tout entier p ,

$$\begin{cases} (r_{gf^p h})^2 \times u^2 = {r'_1}^2 \\ (r_{gf^p h})^2 \times t^2 = {r'_2}^1 \\ (r_{gf^p h})^2(-\ 2ut + 4vw) = 2r'_1\cdot r'_2 . \end{cases}$$

d'où

$$r_{gf^p h} = \varepsilon\cdot\frac{r'_1}{u} , \quad \forall\ p \geqslant 1 , \text{ avec } \varepsilon\cdot\frac{r'_1}{u} > 0 .$$

La série rationnelle de terme général r_f ne prend qu'un nombre fini de valeurs comme le montre sa représentation minimale [9]. La série de terme général r_f^{-1} est donc rationnelle, ce qui démontre en même temps la rationnalité des séries suivantes :

$$\Sigma_f(\alpha_f)f , \quad \Sigma_f(\alpha_f)^{-1} f , \quad \Sigma_f(\frac{\beta_f}{\alpha_f})f \text{ et } \Sigma_f \frac{|\beta_f|}{\alpha_f}.f .$$

Donc, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\Sigma_f(\beta_f/\alpha_f)^p f$ est rationnelle.

Nous allons démontrer que la série de terme général $(c , f) \times r_f \times \alpha_f$ est rationnelle, et comme nous avons vu que la série $\Sigma_f(r_f^{-1} \times \alpha_f^{-1})f$ était rationnelle, on en déduit que la série c est rationnelle.

Pour tout entier n , la série de terme général $(c , f) \times r_f \times \alpha_f$ s'écrit :

$$(c , f) \times r_f \times \alpha_f = \frac{(a , f)}{1 - (\beta_f/\alpha_f)} = (a , f)[1 + \frac{\beta_f}{\alpha_f} + \dots + (\frac{\beta_f}{\alpha_f})^n]$$
$$+ (a , f) \times (\frac{\beta_f}{\alpha_f})^{n+1} \times \frac{1}{1-(\beta_f/\alpha_f)} .$$

Nous allons démontrer qu'il existe un certain entier $n \geqslant 1$, et une certaine longueur des mots f_0 à partir de laquelle nous avons l'inégalité

$$|(a , f) \times (\frac{\beta_f}{\alpha_f})^{n+1}| < 1 ,$$

pour tout mot f dont la longueur est au moins égale à f_a .

Connaissant la majoration des coefficients d'un déterminant, il est facile de majorer ce déterminant [3].

Donc les déterm nants de Hankel de la série de terme général

$$(a\ ,\ f) \times \left(\frac{\beta_f}{\alpha_f}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1-(\beta_f/\alpha_f)} .$$

tendent vers 0 lorsque la longueur des mots f augmentent. Il en est de même des déterminants de Hankel de la série de terme général $(c\ ,\ f) \times r_f \times \alpha_f$. Comme ce sont des entiers algébriques, ils sont nuls à partir d'une certaine longueur des mots f .

La série $\sum_f (c\ ,\ f) \times r_f \times \alpha_f)f$ est rationnelle. Donc la série c est rationnelle.

La série de terme général $(d\ ,\ f) = |\beta_f|/\alpha_f$ est rationnelle, comme nous l'avons vu précedemment.

Soit $\overline{\mu}$ sa représentation minimale [8]. Si $\overline{N}$ est le degré de cette représentation, nous savons qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\overline{\mu}f = \sum_{(s,t)\in S\times T}(d\ ,\ sft)\pi(s\ ,\ t) \quad [8],$$

où S et T sont des sous-ensembles du monoïde libre X^* ayant chacun $\overline{N}$ mots, et $\pi(s\ ,\ t)$ étant une matrice carrée $\underset{\sim}{\overline{N}} \times \underset{\sim}{\overline{N}}$ réelle pour tout couple de mots $(s\ ,\ t)$ de $S \times T$.

Or, pour tout entier p et pour tout mot f , nous avons :

$$(d\ ,\ f^p) = |\beta_f^p|/\alpha_f^p = (d\ ,\ f)^p .$$

Il est facile de voir que, pour tout triplet de mots s , f , t , nous avons :

$$(d\ ,\ sft) = (d\ ,\ tsf) .$$

D'où

$$\overline{\mu}f^p = \sum_{(s,t)\in S\times T}(d\ ,\ sf^p\,t)\pi(s\ ,\ t) = \sum_{(s,t)\in S\times T}(d\ ,\ tsf^p)\pi(s\ ,\ t) .$$

Si le terme général de la série d s'écrit :

$$(d\ ,\ f) = \mathrm{Tr}\ \overline{u}\ \overline{\mu}f \ ,\ \text{où}\ \overline{u}\ \text{est une matrice de}\ M_{\overline{N}}(\underset{\sim}{R}) ,$$

alors :

$$(d\ ,\ sf^p\,t) = \mathrm{Tr}\ \overline{u}\ \overline{\mu}s(\overline{\mu}f)^p\ \overline{\mu}t = \mathrm{Tr}\ \overline{\mu}t\ \overline{u}\ \overline{\mu}s(\overline{\mu}f)^p .$$

Or nous avons vu que, pour tout mot f de XX^* et pour tout entier p , nous avons :

$$(d\ ,\ f^p) = |\beta_f^p|/\alpha_f^p = (d\ ,\ f)^p = \mathrm{Tr}\ \overline{u}\ \overline{\mu}f^p = (\mathrm{Tr}\ \overline{u}\ \overline{\mu}f)^p$$

d'où $\mathrm{Tr}\ \overline{u}\ \overline{\mu}f^p = \gamma^p$, où $|\gamma| < 1$.

D'autre part, pour tout couple de mots $(s\ ,\ t)$ de $S \times T$, nous avons :

$$(d\ ,\ sf^p\,t) = \sum_{1\leq i\leq\overline{N}} \delta_{st}^{(f)(i)} \times \gamma_f^{ip}$$

d'où

$$\overline{\mu}f^p = \sum_{(s,t)\in S\times T}(d\ ,\ sf^p\ t)\pi(s\ ,\ t)$$

$$\mathrm{Tr}\ \overline{u}\ \overline{\mu}f^p = \sum_{(s,t)\in S\times T}(d,sf^p\ t)\ \mathrm{Tr}\ \overline{u}\ \pi(s,t) = (\sum_{(s,t)\in S\times T}(d,sft)\ \mathrm{Tr}\ \overline{u}\ \pi(s,t))^p\ .$$

Pour tout entier p , nous avons donc :

$$\sum_{1\leq i\leq \overline{N}} \sum_{(s,t)\in S\times T} \delta_{st}^{(f,i)}\ \gamma_f^{ip}\ \mathrm{Tr}\ \overline{u}\ \pi(s\ ,\ t)$$

$$= (\sum_{1\leq i\leq \overline{N}} \sum_{(s,t)\in S\times T} \delta_{st}^{(f,i)}\ \gamma_{if}^{i}\ \mathrm{Tr}\ \overline{u}\ \pi(s\ ,\ t))^p\ .$$

L'unicité de l'écriture des termes d'une série rationnelle montre que

$$(d\ ,\ sf^p\ t) = \delta_{st}^f\ \gamma_f^p\ .$$

Or, pour tout entier p et pour tout mot f de X^* , $|(d\ ,\ sf^p\ t)| < 1$, d'où $|\gamma_f| < 1$, d'où

$$\overline{\mu}f = \sum_{(s,t)\in S\times T}(d\ ,\ sft)\pi(s\ ,\ t) = \sum_{(s,t)\in S\times T} \delta_{st}^{(f)} \times \gamma_f \times \pi(s\ ,\ t)\ .$$

$\overline{\mu}$ est donc une représentation du monoïde libre X^* dans l'ensemble des matrices $\overline{N}\times\overline{N}$ à coefficients dans $]-1+1[$.

Si m est le coefficient des matrices $\overline{\mu}x$, $\overline{\mu}y$ telle que :

$$|(\overline{\mu}x)_{i,j}| \leq |m|\ ,\quad \forall\ 1\leq i\ ,\ j\leq \overline{N}$$

et

$$|(\overline{\mu}y)_{i,j}| \leq |m|\ ,\quad \forall\ 1\leq i\ ,\ j\leq \overline{N}\ ,$$

il est immédiat que, pour toute matrice $\overline{\mu}f$, on a :

$$|(\overline{\mu}f)_{i,j}| \leq m^{|f|}\ \overline{N}^{2|f|-2}\ ,\quad \forall\ 1\leq i\ ,\ j\leq \overline{N}$$

d'où

$$\mathrm{Tr}\ \overline{u}\ \overline{\mu}f \leq Am^{|f|}\ \overline{N}^{2|f|-2}$$

pour tout mot f dans XX^* .

La série de terme général $(a\ ,\ f)$ étant rationnelle, soit N' le degré de la représentation minimale qui lui est associée. Il est facile de trouver deux matrices M' et V , à coefficients entiers algébriques, dont deux d'ordre N' , telles que :

$$|(a\ ,\ f)| \leq \mathrm{Tr}\ VM'^{|f|}$$

d'où

$$|(a\ ,\ f)| \times |\beta_f|/\alpha_f \leq \mathrm{Tr}\ VM'^{|f|} \times Am^{|f|}\ \overline{N}^{2|f|-2}\ .$$

Si $|Am^{|f|}\ \overline{N}^{2|f|-2}| < 1$, pour tout mot f de XX^* , il existe alors un entier n , et un mot f_0 tels que

$$|(a\ ,\ f) \times (|\beta_f|/\alpha_f)^{n+1}| \leq \mathrm{Tr}\ VM^{|f|} \times (Am^{|f|}\ \overline{N}^{2|f|-2})^{n+1} < 1$$

pour tout mot f dont la longueur est au moins égale à celle de f_0 .

Ceci termine la démonstration dans ce cas.

Lorsque $|Am^{|f|} \overline{N}^{2|f|-2}| > 1$, on raisonne sur la série de terme général :

$$(c\ ,\ f) \times \overline{N}^{-2|f|+2} .$$

car il est immédiat que la série de terme général $\overline{N}^{-2|f|+2}$ est rationnelle.

3. Etude du cas dét $\mu x = 0$, dét $\mu y \neq 0$.

La série c s'écrit dans ce cas comme somme des deux séries :

$$c = \sum_{n\geqslant 0}(c\ ,\ y^n)y^n + \sum_{|f|^x\geqslant 1}(c\ ,\ f)f .$$

La série $\sum_{n\geqslant 0}(c\ ,\ y^n)y^n$ est rationnelle [7].

Examinons la série de terme général $(c\ ,\ f)$ pour tous les mots f qui ont au moins une occurence de la lettre x .

Or

$$(c\ ,\ f) = \frac{(a\ ,\ f)}{\mathrm{Tr}\ R\ \mu f} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\ R\ \mu f = r_f(a + d)$$

si la matrice μf s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

De la même manière que précédemment, nous voyons que la série de terme général r_f est rationnelle et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Si g est un mot de X^* , alors :

$$\mathrm{Tr}\ R\ \mu g \mu f^p = r_{gf^p}(a + d)^p = r_{gf}(a + d)^p .$$

Les déterminants de Hankel de la série de terme général $(\mathrm{Tr}\ R\ \mu f)^{-1}$ sont presque tous nuls.

La série $\sum_{|f|^x\geqslant 1}(c\ ,\ f)f$ est donc rationnelle comme produit de Hadamard de deux séries rationnelles, ce qui termine la démonstration dans tous les cas où la représentation μ est de degré 2 .

Remarque. - Le cas où la représentation μ est de degré au moins égal à 3 nécessite deux hypothèses supplémentaires qui sont les suivantes :

1° Pour tout mot f de XX^* , la matrice μ_f est irréductible sur $\underset{\sim}{R}$.

2° La matrice μf est inversible.

Sous ces deux hypothèses nous avons le lemme suivant dont la démonstration est essentiellement technique.

LEMME 3. - Les fonctions symétriques des valeurs propres des matrices μf sont des fonctions rationnelles.

Le problème qui n'est pas encore résolu est le suivant :

Si α_f est la valeur propre réelle de la matrice μf , dont le module est supérieur strictement aux modules des autres valeurs propres, alors la série $\sum_f (\alpha_f) f$ est-elle rationnelle ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] CANTOR (D. G.). - On arithmetic properties of Taylor series of rational functions, Pacific J. Math., t. 41, 1972, p. 329-334.

[2] FLIESS (M.). - Sur certaines familles de séries formelles, Thèse d'état, Université Paris-7, 1972.

[3] GÉRARDIN (K.). - Quotient de Hadamard de séries rationnelles en variables non commutatives, "Séries formelles en variables non commutatives et applications, Actes de la 5e Ecole de printemps d'informatique théorique [1977. Vieux-Boucau]", p. 119-134. - Paris, Laboratoire d'Informatique théorique et Programmation, Ecole Nationale Supérieure des techniques avancées, 1978.

[4] GÉRARDIN (K.). - Quotients d'Hadamard de séries rationnelles à plusieurs variables non commutatives, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 17e année, 1975/76, n° 5, 11 p.

[5] LAMÈCHE (K.) [GÉRARDIN (K.)]. - Extension d'un théorème de G. Polya à des séries rationnelles à variables non commutatives. - Thèse 3e cycle, Université de Paris, 1970.

[6] MAHLER (K.). - Eine arithmetische Eigenschaft der Taylor Koeffizienten rationaler Funktionen, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc., t. 63, 1972, p. 50-60.

[7] PATHIAUX (M.). - Algèbre de Hadamard de fractions rationnelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, 1968, Série A, p. 977-980.

[8] SCHÜTZENBERGER (M.-P.). - On the definition of a family of automata, Inform. and Control, t. 4, 1961, p. 245-270.

[9] SCHÜTZENBERGER (M.-P.). - Finite counting automata, Inform. and Control, t. 5, 1962, p. 91-107.

[10] UCHIYAMA (S.). - On a theorem of G. Polya, Proc. Japan Acad., t. 41, 1965, p. 517-520.