Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

François Laubie

Suites de groupes de ramification supérieurs

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, nº 1 (1978-1979), exp. nº 8, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A5_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 8, 8 p.

4 décembre 1978

SUITES DE GROUPES DE RAMIFICATION SUPÉRIEURS

par François LAUBIE (*)
[Université Pierre et Marie Curie, Paris]

Résumé. - On dit que deux extensions de corps locaux sont identiquement ramifiées s'il existe un isomorphisme de leurs groupes de Galois qui respecte leurs filtrations de ramification. Dans cet exposé, on recherche les extensions galoisiennes totalement ramifiées de corps locaux qui sont identiquement ramifiées à des extensions de corps locaux à corps résiduels finis ; c'est le cas des extensions galoisiennes finies totalement ramifiées, c'est aussi le cas de "beaucoup" d'extensions abéliennes infinies totalement ramifiées.

Introduction. - On désigne par corps local un corps K complet pour une valuation discrète v_K (qu'on normalise en posant $v_K(K^*) = \mathbb{Z}$). Dans tout ce qui suit, les corps locaux considérés sont de caractéristique résiduelle un nombre premier p . Soit L une extension galoisienne finie d'un corps local K , et soit G son groupe de Galois ; pour tout $\sigma \in G$, on pose

$$i_{L/K}(\sigma) = \min\{v_L(\sigma a - a) \ ; \ a \in L \ , \ v_L(a) \geqslant 0\} - 1 \ .$$

Les groupes $G_i = \{\sigma \in G \ ; \ i_{L/K}(\sigma) \geqslant i\}$ forment une suite décroissante de sous-groupes distingués de G appelée suite des groupes de ramification de L/K . Ces définitions peuvent s'étendre à certaines extensions L/K infinies (voir le § 1). Rappelons encore que les extensions L/K totalement ramifiées sont celles pour lesquelles $\mathrm{Gal}(L/K)_0 = \mathrm{Gal}(L/K)$.

Pour étudier les suites de groupes de ramification supérieurs, c'est-à-dire les suites de groupes de ramification d'extensions totalement ramifiées de corps locaux L/K , on sait qu'il suffit de considérer le cas où le corps résiduel $\overline{K}$ est algébriquement clos ([11], IV, § 1) ou bien le cas où $\overline{K}$ est quasi fini ([11], XIII, § 2, et IV, § 1 , ou [7], exercice 8).

Dans cet exposé, on se propose d'étudier la question suivante, posée par J.-P. SERRE : Peut-on aussi se ramener au cas où le corps résiduel $\overline{K}$ est fini ?

(*) Texte reçu le 26 février 1979.

François LAUBIE, UER 47 de Mathématiques, Tour 46, Université Pierre et Marie Curie,
4 Place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05

et d'y répondre dans deux cas particuliers : quand les extensions L/K sont abéliennes, et quand elles sont finies.

1. Extensions arithmétiquement profinies.

Rappelons d'abord le théorème de structure des corps locaux. Si K est un corps local, deux cas se présentent : ou bien $\mathrm{car}(K) = \mathrm{car}(\overline{K}) = p$, alors K est isomorphe au corps de séries formelles $\overline{K}((T))$, et T en est une uniformisante (i. e. : $v_K(T) = 1$) ; ou bien $\mathrm{car}(K) \neq \mathrm{car}(\overline{K})$, alors $\mathrm{car}(K) = 0$, et K est isomorphe à une extension valuée de $\mathbb{Q}_p$, plus précisément si $\overline{K}$ est parfait, K s'identifie à une extension totalement ramifiée de degré $e_K = v_K(p)$ du corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt $W(\overline{K})$ de $\overline{K}$, et e_K s'appelle l'indice de ramification absolu de K ; si $\mathrm{car}(K) = p$, on pose $e_K = +\infty$.

Soit L une extension galoisienne finie d'un corps local K , et soit G son groupe de Galois. La fonction $\varphi_{L/K}(u) = \int_0^u (G_0:G_x)^{-1}\,dx$ est un homéomorphisme de $[0 , +\infty[$, notons $\psi_{L/K}$ sa bijection réciproque ; $\varphi_{L/K}$ et $\psi_{L/K}$ s'appellent les fonctions de Herbrand de L/K . On définit la numérotation supérieure des groupes de ramification de L/K en posant

$$G^v = G_{\psi_{L/K}(v)} , \qquad \forall\, v \in [0 , +\infty[.$$

Si H est un sous-groupe de G , on a $H_u = H \cap G_u$, $\forall\, u \geqslant 0$, et si H est distingué dans G , on a $(G/H)^v = G^v H/H$, $\forall\, v \geqslant 0$ (théorème de Herbrand).

Si maintenant L/K est une extension galoisienne infinie de groupe de Galois G , on a $G \simeq \varprojlim \mathrm{proj}_{K'} \mathrm{Gal}(K'/K)$, K' parcourant les extensions galoisiennes finies de K contenues dans L . Le théorème de Herbrand permet de définir G^v comme $\varprojlim \mathrm{proj}_{K'} \mathrm{Gal}(K'/K)^v$, $\forall\, v \geqslant 0$.

Définition 1. - On dit que L/K est arithmétiquement profinie (en abrégé APF) si, pour tout $v \geqslant 0$, $(G^0:G^v) < +\infty$; on peut alors poser

$$\psi_{L/K}(v) = \int_0^v (G^0:G^x)\,dx , \quad \varphi_{L/K} = \psi_{L/K}^{-1} , \text{ et } G_v = G^{\varphi_{L/K}(v)} .$$

Propriétés. - Si H est un sous-groupe d'indice fini de G , on a $H_u = G_u \cap H$ $\forall\, u \geqslant 0$, et si H' est un sous-groupe distingué de G , on a $(G/H')^v = G^v H'/H'$ $\forall\, v \geqslant 0$, les extensions correspondant à H et à G/H' étant APF. Mentionnons encore le théorème de Hasse-Arf : si L/K est abélienne, ses sauts de ramification supérieurs (i. e. les réels s tels que $G^s \neq G^{s+\varepsilon}$, $\forall\, \varepsilon > 0$) sont entiers (Pour en savoir plus sur les extensions APF, voir [3] et [14]).

Exemple 1. - Les extensions finies sont APF ; les extensions abéliennes et les extensions totalement ramifiées aussi pourvu que les corps résiduels soient finis.

Définition 2. - Deux extensions galoisiennes de corps locaux L/K et L'/K' sont dites identiquement ramifiées s'il existe un isomorphisme Φ de $\mathrm{Gal}(L/K)$

sur $Gal(L'/K')$ tel que

$$\Phi(Gal(L/K)^v) = Gal(L'/K')^v \ , \quad \forall\, v \geq 0 \ ;$$

pour des extensions APF il revient au même d'exiger

$$\Phi(Gal(L/K)_u) = Gal(L'/K')_u \ , \quad \forall\, u \in \underset{\sim}{N} \ ;$$

un tel isomorphisme Φ s'appelle un isomorphisme de ramification.

Exemple 2. - Soient K' un corps local, K un sous-corps valué complet de K' qui contient une uniformisante de K', et soit L une extension galoisienne totalement ramifiée de K. Alors les extensions L/K et K'/K sont linéairement disjointes, et l'isomorphisme naturel de $Gal(K'\,L/K')$ sur $Gal(L/K)$ est un isomorphisme de ramification.

Dorénavant on ne parlera d'extensions L/K et L'/K' identiquement ramifiées que si $car(K) = car(K')$ et $car(\overline{K}) = car(\overline{K}')$.

2. Le cas des extensions abéliennes.

THÉORÈME 1. - Les extensions abéliennes totalement ramifiées de corps locaux qui sont identiquement ramifiées à une extension d'un corps local à corps résiduel fini sont :

1° dans le cas d'inégale caractéristique avec $p \neq 2$, les extensions abéliennes totalement ramifiées et APF.

2° dans le cas d'égale caractéristique, les extensions abéliennes, totalement ramifiées, APF, telles que $\sup_i (G_{i-1} : G_i) < +\infty$.

Remarques.

1° En inégale caractéristique, les extensions APF possèdent la propriété $\sup_i (G_{i-1} : G_i) < +\infty$ mais pas nécessairement en égale caractéristique.

2° Il est probable que le cas où $p = 2$ en inégale caractéristique se comporte comme les autres, ce qui sera d'ailleurs démontré au § 3 pour les extensions finies et les $\underset{\sim}{Z}_2$-extensions, entre autres.

Le théorème 1 est une conséquence de la théorie du corps de classes pour les corps locaux à corps résiduels algébriquement clos de J.-P. SERRE [12]. Utilisant cette théorie, M. A. MARSHALL a caractérisé dans certains cas les filtrations de ramification des extensions abéliennes [6].

THÉORÈME 2 (d'après M. A. MARSHALL [6]). - Soit K un corps local d'indice de ramification absolu e.

(A) Soit L une extension abélienne totalement ramifiée APF de groupe de Galois

G ; on a :

(i) $G = G^0$; $\bigcap_n G^n = (1)$; G/G^1 est isomorphe à un sous-groupe du groupe des racines de l'unité contenues dans $\overline{K}$.

(ii) pour $n \geqslant 1$, G^n/G^{n+1} est un p-groupe fini de type $(p , p , \ldots, p)$ de rang $\leqslant [\overline{K}:\overline{F}_p]$

(iii) pour $n \geqslant 1$, $(G^n)^p \subset G^{f(n)}$, où $(G^n)^p$ désigne le groupe des puissances p-ièmes des éléments de G^n , et où $f(n) = \min(np , n + e)$

(iv) si $n \neq e/(p - 1)$, la puissance p-ième induit un isomorphisme p_n de G^n/G^{n+1} sur $G^{f(n)}/G^{f(n)+1}$ et, si $n = e/(p - 1)$, coker p_n est cyclique d'ordre p ou 1 .

(B) Supposons que le groupe de Galois de la p-extension abélienne maximale de K est un pro-p-groupe libre. Soit G un groupe abélien muni d'une filtration $(G^n)_{n\geqslant 0}$ possédant les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv). Il existe alors une extension L de K est un isomorphisme Φ de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur G tel que $\Phi(\mathrm{Gal}(L/K)^n) = G^n$, $\forall\, n \geqslant 0$.

Remarques. - Notons $A_K(p)$ le groupe de Galois de la p-extension abélienne maximale de K ; si $\overline{K}$ est algébriquement clos, $A_K(p)$ est un pro-p-groupe libre ; si $\overline{K}$ est fini, $A_K(p)$ est pro-p-groupe libre si, et seulement si, K ne contient pas de racines primitives p-ièmes de l'unité.

Le théorème 1 se déduit du théorème 2 directement dans le cas d'égale caractéristique et, en passant par le lemme suivant, dans le cas d'inégale caractéristique.

LEMME. - Soient d et e deux entiers strictement positifs. Si $p \neq 2$, il existe une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ de degré d , d'indice de ramification e et qui ne contient pas de racines primitives p-ièmes de l'unité.

3. Le cas des extensions finies.

THÉORÈME 3. - Toute extension galoisienne finie totalement ramifiée d'un corps local K est identiquement ramifiée à une extension d'un corps local à corps résiduel fini, de même indice de ramification absolu que K et contenant les mêmes racines de l'unité d'ordre une puissance de p que K.

Avant de donner les grandes lignes de la démonstration, revenons sur le procédé d'extension du corps résiduel mentionné dans l'exemple 2 du § 1. Il permet de se ramener à des corps résiduels algébriquement clos, quasi finis ou encore possédant une base de transcendance séparante finie sur $\mathbb{F}_p$. Il permet aussi de ramener la démonstration du théorème 3 à celle du théorème suivant.

THÉORÈME 3'. - Une extension galoisienne finie totalement ramifiée L d'un corps local K à corps résiduel algébriquement clos est identiquement ramifiée à une extension d'un corps local K' de même indice de ramification absolu que K, et dont le corps résiduel est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$. On peut en outre supposer que $K' \subset K$ et que le groupe des racines de l'unité d'ordre une puissance de p contenues dans K est contenu dans K'.

Un lemme simple permet une dernière réduction du problème.

LEMME. - Si le théorème 3' est vrai chaque fois que K est un corps local absolument non ramifié, il est vrai pour tout corps local K d'inégale caractéristique.

L'idée principale de la démonstration du théorème est de spécialiser dans K' les entiers de K qui sont des séries formelles à coefficients dans $\overline{K}$ si K est d'égale caractéristique, ou des vecteurs de Witt à coordonnées dans $\overline{K}$ si K est d'inégale caractéristique.

Soit donc L une extension galoisienne finie d'un corps local K avec $\overline{K}$ algébriquement clos et $e_K = 1$ ou $+\infty$.

LEMME. - Il existe une uniformisante π de L, racine d'un polynôme d'Eisenstein de $K[X]$ dont les coefficients sont des polynômes en T si $K = \overline{K}((T))$, ou des vecteurs de Witt de longueur finie si K est d'inégale caractéristique.

C'est une conséquence du lemme de Krasner ([1], ch. 2, § 7).

Soient

$$a_0 , \dots , a_{n-1} \in K$$

les coefficients du polynôme irréductible $P(X)$ de π sur K, et appelons A la famille finie d'éléments de $\overline{K}$ constituée par les coordonnées dans $\overline{K}$ de tous les a_i $(0 \leq i \leq n-1)$. Notons $\overline{\mathbb{F}}_p$ la fermeture algébrique de $\mathbb{F}_p$ dans $\overline{K}$,

K' le sous-corps local de K de corps résiduel $\tilde{\mathbb{F}}_p$, $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K et $\mathcal{O}_{K'}$ celui de K' . On a

$$K' = \tilde{\mathbb{F}}_p((T)) \quad \text{si} \quad K = \overline{K}((T))$$

et

$$\mathcal{O}_{K'} = W(\tilde{\mathbb{F}}_p) \quad \text{si} \quad \mathcal{O}_K = W(\overline{K}) \ .$$

Il existe un homomorphisme d'algèbres φ de $\tilde{\mathbb{F}}_p[A]$ sur $\tilde{\mathbb{F}}_p$ tel que $\varphi(a) \neq 0$, $\forall\ a \in A$, $a \neq 0$, et tel que sa restriction à $\tilde{\mathbb{F}}_p$ soit l'identité ([2], ch. 5, § 3 , cor. 3 du th. 1).

L'homomorphisme φ se prolonge en une place de $\overline{K}$ à valeurs sur $\tilde{\mathbb{F}}_p$ $\{\infty\}$ ([2], ch. 6, § 2, prop. 3). Soit $\mathfrak{a}$ son anneau de valuation.

L'application

$$\mathfrak{a}[[T]] \dashrightarrow \tilde{\mathbb{F}}_p[[T]]$$
$$\sum_i \alpha_i T^i \longmapsto \sum_i \varphi(\alpha_i) T^i$$

ou l'application

$$W(\mathfrak{a}) \dashrightarrow W(\tilde{\mathbb{F}}_p)$$
$$(\alpha_0 ,\ldots, \alpha_n ,\ldots) \longmapsto (\varphi(\alpha_0) ,\ldots, \varphi(\alpha_n) ,\ldots)$$

se prolonge en une place ψ de K à valeurs sur K' $\{\infty\}$.

Désignons par P^ψ le polynôme de $K'[X]$ déduit de P en transformant chacun de ses coefficients a_i par φ ; comme $P(X)$, $P^\psi(X)$ est un polynôme d'Eisenstein car on a

$$v_{K'}[\varphi(a_i)] = v_K(a_i) \ , \quad i = 0 \ , 1 \ , \ldots \ , n-1 \ ;$$

de plus, comme $P(X)$, $P^\psi(X)$ est galoisien ([4], ch. 1, th. 2). Soit π' une racine de P^ψ dans une clôture algébrique de K' , et posons $L' = K'(\pi')$. La place ψ se prolonge de manière unique en une place de L à valeurs sur $L' \cup \{\infty\}$ telle que $\psi(\pi) = \pi'$; c'est une conséquence de résultats bien connus de la théorie des valuations ([2], ch. 6, § 8). Pour tout $\sigma \in G$ et tout $x \in L$, on pose $\sigma^\psi[\psi(x)] = \psi(\sigma x)$; on déduit aisément de ce qui précède que $\sigma \longmapsto \sigma^\psi$ est un isomorphisme Φ de G sur $G' = \mathrm{Gal}(L'/K')$.

Remarquons maintenant que

$$v_L(\mathfrak{D}_{L/K}) = \inf_{1 \leq i \leq n}(v_L(ia_i) + i - 1) = v_{L'}(\mathfrak{D}_{L'/K'}) \ ,$$

où $\mathfrak{D}_{L/K}$ (resp. $\mathfrak{D}_{L'/K'}$) désigne la différente de L/K (resp. de L'/K') (voir [8]). De plus,

$$v_L(\mathfrak{D}_{L/K}) = \sum_{\sigma \in G \setminus 1}(i_{L/K}(\sigma) + 1) \ .$$

De ce fait, si pour chaque extension intermédiaire E entre K et L telle que $\mathrm{Gal}(L/E)$ est cyclique, l'extension E entre K' et L' correspondant par

Φ , est telle que $v_{L'}(\mathfrak{D}_{L'/E'}) = v_L(\mathfrak{D}_{L/E})$, alors les extensions L/K et L'/K' sont identiquement ramifiées. Comme l'a remarqué J.-P. SERRE, l'argument est le suivant : Soit $a_{L/K}$ (resp. $a_{L'/K'}$) le caractère de la représentation d'Artin de G (resp. de G') ([13], ch. 19) ; les hypothèses $v_L(\mathfrak{D}_{L/E}) = v_{L'}(\mathfrak{D}_{L'/E'})$ et $v_L(\mathfrak{D}_{L/K}) = v_{L'}(\mathfrak{D}_{L'/K'})$ entraînent que

$$\sum_{\sigma\in \mathrm{Gal}(L/E)} a_{L/K}(\sigma) = \sum_{\sigma'\in \mathrm{Gal}(L'/E')} a_{L'/K'}(\sigma') .$$

Ceci étant vrai pour tout sous-groupe cyclique $\mathrm{Gal}(L/E)$ (resp. $\mathrm{Gal}(L'/E')$) de G (resp. de G') , on en déduit que

$$a_{L'/K'}(\sigma^{\psi}) = a_{L/K}(\sigma) \ , \quad \forall\, \sigma \in G$$

c'est-à-dire :

$$i_{L'/K'}(\sigma^{\psi}) = i_{L/K}(\sigma) \ , \quad \forall\, \sigma \in G \quad ([13], \text{ ch. 13, th. 30'}) .$$

Pour conclure, il suffit de construire la place ψ non pas seulement en fonction du polynôme P mais aussi en fonction de tous les polynômes définissant les extensions cycliques L/E avec $E \supset K$, sur le modèle qu'on vient d'exposer.

Enfin, pour ce qui est du point du théorème 3' concernant les racines de l'unité c'est une conséquence facile du procédé de construction de L'/K' .

Le résultat suivant est un corollaire du théorème 3 ; il apporte du nouveau dans le cas $p = 2$.

THÉORÈME 4. - <u>Soit K un corps local d'inégale caractéristique, et soit L une $\mathbb{Z}_p$-extension totalement ramifiée de K . Il existe une extension finie K' de $\mathbb{Q}_p$ d'indice de ramification e_K , et une $\mathbb{Z}_p$-extension L' de K' identiquement ramifiée à L/K .</u>

B. F. WYMAN a montré dans [15] l'existence d'un entier $c \geqslant 1$ possédant la propriété : les sauts de ramification supérieurs v_j $(j \geqslant 1)$ de toute $\mathbb{Z}_p$-extension totalement ramifiée de tout corps local d'indice de ramification absolu e_K sont tels que $v_j = v_c + (j - c)e_K$ dès que $j \geqslant c$. La démonstration du théorème 4 consiste à exhiber, à l'aide du théorème 3, une extension K' de $\mathbb{Q}_p$ d'indice de ramification e_K et une extension cyclique totalement ramifiée de K' contenue dans une $\mathbb{Z}_p$-extension L' de K' et dont les sauts de ramifications supérieurs sont les premiers sauts de ramification supérieurs de L/K . Il en résulte que L/K et L'/K' sont identiquement ramifiées. Le seul problème est de chercher dans quels cas une extension cyclique totalement ramifiée d'un corps local K est contenue dans une $\mathbb{Z}_p$-extension, et on montre par la théorie du corps de classe local que cela ne dépend que des racines de l'unité d'ordre une puissance de p contenue dans K ; donc là encore le théorème 3 permet de conclure.

On peut généraliser le théorème 4 à des extensions dont le groupe de Galois est le produit direct d'un groupe fini par $\mathbb{Z}_p$, cela grâce à un lemme de SEN ([9],

§ 2, lemme 1) qui prouve que la ramification de telles extensions est en fait déterminée par l'une de ses sous-extension finie.

Avec le même procédé, et en utilisant les résultats de SEN sur la ramification dans les groupes de Lie p-adiques [10], il semble raisonnable de conjecturer que le théorème 3 se généralise à des extensions totalement ramifiées dont les groupes de Galois sont de tels groupes.

Notons enfin que la théorie de FONTAINE et WINTENBERGER [14] ainsi que les théorèmes 1 et 4 précédents permettent de ramener au cas où le corps résiduel est fini l'étude de la ramification dans certains groupes infinis d'automorphismes d'un corps de séries formelles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP "Le Mathématicien", 14).

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, Chap. 5 et 6. - Paris, Hermann, 1964 (Act. scient. et ind., 1308 ; Bourbaki, 30).

[3] FONTAINE (J.-M.). - Corps de séries formelles et extension galoisiennes de corps locaux, Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, 1971/72, p. 28-38.

[4] LANG (S.). - Introduction to algebraic geometry. - New York, Interscience Publishers, 1964 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 5).

[5] LAUBIE (F.). - Groupes de ramification et corps résiduels, Thèse 3e cycle, Université de Bordeaux-I, 1977.

[6] MARSHALL (M. A.). - Ramification groups of abelian local field extensions, Canadian J. M., t. 23, 1971, p. 271-281.

[7] MARTINET (J.) and SERRE (J.-P.). - Character theory and Artin L-functions Algebraic number fields", edited by A. Frohlich, p. 1-87. - London, Academic Press, 1977.

[8] ORE (Ö). - Bemerkungen zur Theorie der Differente, Math. Z., t. 25, 1926, p. 1-8.

[9] SEN (S.). - On automorphisms of local fields, Annals of Math., t. 90, 1969, p. 33-46.

[10] SEN (S.). - Ramification in p-adic Lie extensions, Inv. Math., Berlin, t. 17, 1972, p. 44-50.

[11] SERRE (J.-P.). - Corps locaux. 2e édition. - Paris, Hermann, 1968 (Act. scient. et ind., 1296 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 8).

[12] SERRE (J.-P.). - Sur les corps locaux à corps résiduels algébriquement clos, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 105-154.

[13] SERRE (J.-P.). - Représentations linéaires des groupes finis. - Paris, Hermann, 1967 (Collection "Méthodes". Mathématiques).

[14] WINTENBERGER (J.-P.). - Automorphismes et extensions galoisiennes de corps locaux, Thèse 3e cycle, Université de Grenoble, 1978.

[15] WYMAN (B. F.). - Widly ramified gamma extensions, Amer. J. of Math., t. 91, 1969, p. 135-152.