Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

ERIC REYSSAT

# Irrationalité de $\zeta(3)$ selon Apéry

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 20, nº 1 (1978-1979), exp. nº 6, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A4_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 6, 6 p. 
13 novembre 1979

# IRRATIONALITÉ DE $\zeta(3)$ SELON APÉRY

par Eric REYSSAT (*)
[att. Rech. CNRS]

Il s'agit ici de donner quelques idées sur la démonstration par R. APÉRY de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (cf. [A]), et les quelques travaux qui ont suivi cette découverte (par COHEN, ZAGIER, WIRSING, ...). Mentionnons qu'à l'heure où cet exposé est rédigé, deux autres travaux importants concernant ce sujet ont vu le jour, et pour lesquels nous ne faisons que renvoyer à la bibliographie :

– d'abord une nouvelle démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (bien qu'il existe un lien profond avec celle d'APÉRY), découverte indépendamment par BEUKERS [B1] et CORDOBA ;

– ensuite une étude de l'irrationalité (et de mesures d'irrationalité) de nombres liés aux fonctions hypergéométriques par BEUKERS [B2], puis par G. CHOODNOVSKY [Ch].

## 1. Les approximations rationnelles de $\zeta(3)$ .

Pour $n$ et $k$ entiers, $n \geqslant 1$ , $0 \leqslant k \leqslant n$ , on note

$$\lambda_{n,k} = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \quad ; \quad c_{n,k} = \sum_{m=1}^{n} m^{-3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \quad ;$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \quad ; \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\, c_{n,k} \ ,$$

où l'on convient que la somme (resp. le produit) d'une famille de nombres indexée par l'ensemble vide vaut $0$ (resp. $1$) .

Il se trouve (voir le paragraphe 2) que les nombres rationnels $a_n$ et $b_n$ vérifient la remarquable propriété suivante, d'où l'on déduit aussitôt l'irrationalité de $\zeta(3)$ :

PROPOSITION 1. – *Il existe un réel* $r > 0$ , *et deux suites* $(p_n)$ *et* $(q_n)$ *d'entiers naturels tendant vers* $+\infty$ *tels que* :

1° $b_n/a_n = p_n/q_n$ *pour* $n \geqslant 1$ ,

2° $0 < |q_n\, \zeta(3) - p_n| < q_n^{-r}$ *à partir d'un certain rang.*

En d'autres termes, la suite $(b_n/a_n)$ converge rapidement vers $\zeta(3)$ , ce qui n'est pas le cas de la série de terme général $n^{-3}$ .

---

(*) Texte reçu le 18 juillet 1979.
Eric REYSSAT, Mathématiques, Tour 45-46, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05.

Avant de présenter la démonstration, mise au point par COHEN et ZAGIER, de la proposition 1, nous tâchons d'éclaircir un peu ce mystère : pourquoi les nombres $b_n/a_n$ sont-ils de bons candidats pour approcher au mieux $\zeta(3)$ ?

Les nombres $c_{n,k}$ ont été introduits de façon naturelle par APÉRY dans son exposé à Luminy (cf. [A]). On part d'un développement asymptotique :

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_1 \dots a_{k-1}}{(x+a_1)\dots(x+a_k)} + \frac{a_1 \dots a_N}{x(x+a_1)\dots(x+a_N)} \quad \text{pour} \quad x \neq 0, -a_1, \dots, -a_N \,.$$

En choisissant $x = m^2$ (où $m$ est entier $\geqslant 2$ ), $a_k = -k^2$ (et naturellement $N < m$ ), et en divisant des deux côtés par $m$ , on obtient ainsi

$$m^{-3} = \sum_{k=1}^{N} u_{m,k} + r_{m,N} \quad \text{pour} \quad N < m \,,$$

où

$$u_{m,k} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!^2 (m-k-1)!}{(m+k)!}$$

et

$$r_{m,N} = (-1)^N \frac{N!^2 (m-N-1)!}{m^2 (m+N)!} \,.$$

Cette formule reste valable pour $m$ et $N$ entiers quelconques $\geqslant 1$ si l'on définit

$$\begin{aligned} u_{m,k} &= 0 && \text{si} \quad k \geqslant m \,, \\ r_{1,0} &= 1 \,, && \\ r_{m,N} &= r_{m,m-1} && \text{si} \quad N \geqslant m \,. \end{aligned}$$

Par sommation, on obtient :

$$\sum_{m=1}^{n} m^{-3} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} u_{m,k} + \sum_{m=1}^{n} r_{m,N} \,.$$

Le nombre

$$\varepsilon_{n,k} = \frac{(-1)^k}{2k^3 \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}} \qquad (k \leqslant n)$$

vérifie

$$u_{m,k} = \varepsilon_{m,k} - \varepsilon_{m-1,k} \qquad (m \geqslant k+1) \,.$$

de sorte que, si $k \leqslant n - 1$ (et même trivialement si $k = n$ ),

$$\sum_{m=1} u_{m,k} = \varepsilon_{n,k} - \varepsilon_{k,k} \,.$$

Finalement, on obtient pour $n \geqslant N$ ,

$$\sum_{m=1}^{n} m^{-3} = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{n,k} + c_{n,N}$$

où

$$c_{n,N} = \sum_{m=1}^{n} r_{m,N} - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{k,k} \,;$$

Ainsi, $c_{n,N}$ est essentiellement la somme des restes des développements asymptotiques des termes $m^{-3}$ , d'où une convergence rapide ; par exemple, pour $n = N$ :

$$c_{n,n} - c_{n-1,n-1} = \sum_{m=1}^{n-1}(r_{m,n} - r_{m,n-1}) + r_{n,n} - \varepsilon_{n,n}$$

le premier terme du second membre est nul et les deux derniers convergent géométriquement. De plus, la limite des coefficients $c_{n,n}$ est $\zeta(3)$ puisque le terme $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{n,k}$ tend vers $0$ .

Le calcul de $c_{n,n}$ donne au passage une expression de $\zeta(3)$ , due à APÉRY, utile pour le calcul numérique (cf. [A] et [Co]).

PROPOSITION 2. - $\zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}$ .

On peut remarquer qu'une formule analogue pour $\zeta(2)$ , obtenue par un argument du même type, était connue depuis longtemps (cf. [Kn]).

## 2. Schéma de la démonstration de la proposition 1.

On suit ici la démonstration exposée dans [Co]. On peut la fractionner en prouvant les six assertions suivantes, la troisième étant la principale et la plus mystérieuse :

(1) Si $n \to +\infty$ , alors $c_{n,k} \to \zeta(3)$ uniformément en $k$ , et par suite $\lim_{n\to+\infty} b_n/a_n = \zeta(3)$ .

(2) $b_n$ admet $2d_n^3$ pour dénominateur, où $d_n = \text{p.p.c.m.}(1 , 2 , \ldots , n)$ .

(3) Les suites $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ sont solutions de l'équation de récurrence linéaire

$$R_n(u) = (n + 1)^3 u_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)u_n + n^3 u_{n-1} = 0$$

pour $n \geqslant 2$ .

(4) $\zeta(3) - (b_n/a_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} 6/(k^3 a_k a_{k-1})$ .

(5) Il existe une constante non nulle $A$ telle que $a_n \sim An^{-3/2}(1 + \sqrt{2})^{4n}$ .

(6) La proposition 1 est vérifiée avec $p_n = 2d_n^3 b_n$ et $q_n = 2d_n^3 a_n$ .

Démonstration.

(1) Puisque $\binom{n}{m}\binom{n+m}{m} \geqslant n^2$ , on en déduit que $\zeta(3) - c_{n,k} = O(n^{-2})$ uniformément en $k$ .

(2) On vérifie que

$$b_n = a_n \sum_{m=1}^{n} m^{-3} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \frac{\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\binom{n-m}{n-k}\binom{n+k}{k-m}}{2m^3\binom{k}{m}^2}$$

et l'étude des valuations p-adiques montre que $m\binom{k}{m}$ divise $d_k$ .

(3) C'est ici que se trouve la difficulté de la démonstration (mais aussi son

importance). Bien que l'existence de cette récurrence ne semble pas intuitive (voir cependant le paragraphe 3), on peut en donner une démonstration assez simple (quoique le détail des calculs soit fort pénible). L'idée est de ZAGIER. Il s'agit de montrer que

$$R_n(a) = R_n((\sum_k \lambda_{m,k})_{m\in\underset{\sim}{N}^*}) = 0 ,$$

où on a défini $\lambda_{m,k} = 0$ si $m < k$ ; pour cela, d'après la linéarité de la transformation $R_n$ , il suffit de mettre $R_n((\lambda_{m,k})_{m\in\underset{\sim}{N}^*})$ sous la forme $A_{n,k} - A_{n,k-1}$ , avec $A_{n,-1} = A_{n,n+1} = 0$ . En mettant des coefficients convenables en facteur, cela revient à trouver un polynôme $Q_n \in \underset{\sim}{C}[X]$ , tel que $Q_n(k) - Q_n(k-1) = P_n(k)$ , où $P_n$ est un polynôme donné ; ce calcul est très simple dans la base

$$(X(X+1)\ \ldots\ (X+n-1)/n!)_{n\in\underset{\sim}{N}}$$

de $\underset{\sim}{C}[X]$ . On procède de même pour la suite $b$ , en écrivant $R_n((\lambda_{m,k}\, c_{m,k})_{m\in\underset{\sim}{N}^*})$ sous la forme $B_{n,k} - B_{n,k-1}$ . Ce calcul élémentaire en théorie se complique passablement dans la pratique.

(4) La relation de récurrence prouve que

$$(b_k/a_k) - (b_{k-1}/a_{k-1}) = 6/(k^3\, a_k\, a_{k-1}) ,$$

ce qui entraîne l'assertion

(5) Si $u_n = n^{3/2}\, a_n$ , la relation de récurrence permet d'écrire

$$u_{n+1} - 34u_n + u_{n-1} = O((u_{n-1} + u_n)n^{-2}) .$$

En utilisant le fait que $(1+\sqrt{2})^4$ est la racine supérieure à $1$ du polynôme $X^2 - 34X + 1$ , et un peu de calcul, on obtient le résultat.

(6) D'après (4) et (5), on obtient

$$|\zeta(3) - b_n/a_n| \leqslant c/(a_{n+1}\, a_n)$$

où $c$ est une constante. Puisque

$$\log d_n \sim n ,\quad \log a_{n+1} \sim 4n \log(1+\sqrt{2}) ,$$

et

$$(1+\sqrt{2})^4 > e^3 ,$$

on en déduit le résultat.

La proposition 1 est ainsi démontrée.

<u>Remarque</u>. - La relation de récurrence et le fait que $b_n/a_n$ tend vers $\zeta(3)$ permettent d'écrire $\zeta(3)$ sous forme de fraction continue non régulière. Il est à noter qu'une telle fraction continue était déjà connue de STIELTJES [St].

3. Sur la relation de récurrence.

Si la raison d'être de la récurrence précédente ne peut encore être clairement mise en évidence, du moins, comme l'a montré WIRSING au cours d'un exposé libre à Oberwolfach en octobre, peut-on la faire ressortir dans un cas assez similaire : celui de la démonstration de l'irrationalité de $\log 2$ par le même type d'arguments : l'idée est de montrer que la fonction génératrice des $a_n$ vérifie une équation différentielle. En prenant le problème par l'autre bout, on cherche une solution d'une équation différentielle, dont les coefficients du développement en série entière ont l'allure souhaitée : des sommes de produits de coefficients binomiaux. On sait par exemple que $(1+z)^{\alpha}$ se développe avec des coefficients essentiellement binomiaux. Par exemple,

$$(1-4z)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} z^k .$$

En substituant $z/(1-z)^2$ à $z$, on obtient

$$f(z) = (1-6z+z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} .$$

En particulier, $a_n$ est entier. La fonction $f$ vérifie l'équation différentielle

$$(1-6z+z^2)f'(z) = (3-z)f(z) ,$$

d'où l'on déduit la relation de récurrence

(R) $$(n+1)a_{n+1} - 3(2n+1)a_n + na_{n-1} = 0 \quad \text{pour} \quad n \geq 1 .$$

On cherche alors une fonction $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ telle que $b_n$ vérifie la relation de récurrence (R). En remontant les calculs, on voit que cela équivaut à chercher $g$ solution de l'équation différentielle

$$(1-6z+z^2)g'(z) - (3-z)g(z) = b_1 - 3b_0 .$$

On choisit par exemple $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, d'où $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, et

$$(1-6z+z^2)g'(z) - (3-z)g(z) = 1 ,$$

ce qui s'écrit encore $(g'f - gf')/f^2 = f$, qui s'intègre pour donner

$$g(z) = f(z) \int_0^z f(u)\,du .$$

On en déduit ainsi

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, a_{n-1-k}/(n-k) ,$$

et en particulier $d_n b_n \in \mathbb{Z}$, en notant toujours $d_n = \text{p.p.c.m.}(1, 2, \dots, n)$.

Par ailleurs, la limite de $b_n/a_n$ (dont l'existence est assurée par la relation (R)) est égale à la limite de $g(z)/f(z)$ lorsque $z$ tend vers la singularité de plus petit module de $f$ et $g$, soit $z \to 3 - 2\sqrt{2}$. Or,

$$g(z)/f(z) = \int_0^z f(u)du = \log(3 - z - \sqrt{z^2 - 6z + 1}) - \log 2 ,$$

d'où l'on déduit

$$\lim_{n\to+\infty}(b_n/a_n) = \frac{1}{2}\log 2 .$$

On est ainsi dans la situation de la proposition 1, ce qui permet de prouver l'irrationalité de $\log 2$ (et éventuellement d'obtenir une mesure d'irrationalité en explicitant le nombre $r > 0$).

On ne sait malheureusement pas appliquer cette méthode dans le cas de $\zeta(3)$, et a fortiori d'autres valeurs de la fonction $\zeta$.

BIBLIOGRAPHIE

[A] APÉRY (R.). - Irrationalité de $\zeta 2$ et $\zeta 3$ ; "Journées arithmétiques de Luminy", Astérisque n° 61, 1979, p. 11-13.

[B1] BEUKERS (F.). - A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ (preprint).

[B2] BEUKERS (F.). - Rational approximations to $\log 2$, $\sqrt[3]{2}$ and related numbers (preprint).

[Br] BREZINSKI (C.). - Accélération de la convergence en analyse numérique. - Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Lecture Notes in Mathematics, 584).

[Ch] CHOODNOVSKY (G.). - Diophantine analysis problems in transcendence theory and applications, Cours Peccot, Collège de France, 1979 (à paraître).

[Co] COHEN (H.). - Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$, Séminaire de théorie des nombres, Grenoble, 1978.

[H] HARDY (G. H.). - Divergent series. - Oxford, at the Clarendon Press, 1949.

[Kn] KNOPP (K.). - Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. - Berlin, Springer-Verlag, 1948.

[St] STIELTJES (T. J.). - Sur quelques intégrales définies et leur développement en fractions continues, Quart. J. of Math., t. 24, 1890, p. 370-382.