Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Faouzia Lazami

Sur les éléments de $S \cap [1, 2[$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, nº 1 (1978-1979), exp. nº 3, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 3, 6 p.

23 octobre 1978

SUR LES ÉLÉMENTS DE $S \cap [1, 2[$

par Faouzia LAZAMI (*)

Résumé. - Connaissant les éléments de $S' \cap [1, 2[$, nous allons montrer qu'il est possible de déterminer les éléments de $S \cap [1, 2 - \lambda[$, pour tout réel λ de $]0, 1[$. Plus précisément, nous montrerons que tous les éléments (à l'exception peut-être d'un nombre fini d'entre eux) de $S \cap [1, 2 - \lambda[$ sont zéros d'un polynôme du type $A \pm z^t P$, où A/P est associée à un élément de $S' \cap [1, 2[$.

Introduction. - Soient S l'ensemble des nombres de Pisot et λ un réel de $]0, 1[$. Si S' est l'ensemble dérivé de S, et Q est le polynôme réciproque du polynôme minimal associé à un élément θ de S' $(Q(0) = 1)$, on sait qu'il existe $A \in \underline{Z}[z]$ vérifiant

$$|A(z)| \leq |Q(z)| \quad \text{sur} \quad |z| = 1 ,$$

avec l'égalité en un nombre fini de points.

Nous dirons que A/Q est associée à θ.

Dans [1], les éléments de $S' \cap [1, 2]$, ainsi que les fractions A/Q qui leur sont associées, ont été déterminés.

Définition. - Si A/Q est associée à un $\theta \in S'$, et si

$$P(z) = \epsilon z^s Q(\frac{1}{z}) , \quad B(z) = \epsilon' z^h A(\frac{1}{z})$$

($s = d° Q$, $h = d° A$, $|\epsilon| = |\epsilon'| = 1$ choisis tels que $P(0)$ et $B(0)$ positifs).

On définit le polynôme D par

$$z^t D(z) = PQ - \epsilon\epsilon' z^{s-h} AB , \text{ avec } D(0) \neq 0 .$$

Nous aurons besoin de certaines propriétés des polynômes D associés aux éléments de $S' \cap [1, 2[$.

Remarque. - Si A/Q est associée à un $\theta \in S' \cap [1, 2[$, alors on a

- $D(0) = 1$;
- Si $\frac{A}{Q} \neq \frac{A_n}{Q_n} = \frac{(1 - z)(1 + z^n)}{1 - 2z + z^n(1 - z)}$, alors D a tous ses zéros sur $|z| = 1$;
- Si $\frac{A}{Q} = \frac{A_n}{Q_n}$, alors $D_n(z) = (1 - z + z^n)(1 - z^{n-1} + z^n)$.

1. Quelques propriétés des polynômes D_n.

Soient α_{i_n} les zéros de D_n, alors on a la proposition suivante.

(*) Texte reçu le 24 janvier 1979.

Mme Faouzia LAZAMI, 270 rue Saint Jacques, 75005 PARIS.

PROPOSITION 1. - Pour tout $n \geqslant 2$, soit $p_n = \prod_{|\alpha_{i_n}|>1} |\alpha_{i_n}|$, alors $p_n < 2$.

La démonstration complète de ce résultat est due à D. BOYD [2].

Définition. - Nous dirons que $U \in \mathbb{Z}[z]$ vérifie la propriété (P) s'il existe $V \in \mathbb{Z}[z]$, $V \not\equiv 0$, tel que

$$|V(z)| \leqslant |U(z)| \quad \text{sur} \quad |z| = 1 ,$$

avec l'égalité en un nombre fini de points.

PROPOSITION 2. - Si D_n vérifie la propriété (P), alors le polynôme E_n associé est tel que $d^o E_n \geqslant 2n - 2$ et réalise une des égalités suivantes :

$$E_n(z) = \begin{cases} (1 - z^{n-1})(1 + z^n)U(z) , & \text{si } n = 2p \\ (1 - z^{n-1})\dfrac{(1 + z^n)}{(1 + z)}U(z) , & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases} ,$$

ou

$$S_n(z) = \begin{cases} (1 - z^{n-1})^2 (1 + z^n)^2 K(z) , & \text{si } n = 2p \\ (1 - z^{n-1})^2 \left(\dfrac{1 + z^n}{1 + z}\right)^2 K(z) , & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases} ,$$

avec $z^k S_n(z) = D_n^2 - \varepsilon' z^{2n-h} E_n \tilde{E}_n$, $h = d^o E_n$ et $\tilde{E}_n$ le réciproque de E_n.

La démonstration de cette proposition découle du fait que, si α_i sont les zéros de $1 - z^{n-1}$ et β_i ceux de $1 + z^n$, et si

$$|E_n(z)| \leqslant |1 - z + z^n|^2 \quad \text{sur} \quad |z| = 1 ,$$

alors on a

$$|E_n(\alpha_i)| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |E_n(\beta_i)| \leqslant 1 ,$$

et par suite

$$\prod_{i=1}^{n-1} |E_n(\alpha_i)| = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} |E_n(\beta_i)| = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ 1 \end{cases} .$$

On montre ensuite que, si α_{i_0} est zéro de E_n, il en est de même pour tous les α_i et les β_j.

Pour une démonstration complète, voir [6].

LEMME. - Soient $U \in \mathbb{Z}[z]$ et $\tilde{U}$ son polynôme réciproque. Supposons que $\tilde{U}(0) = 1$ et que $\alpha = \prod_{|\alpha_i|>1} |\alpha_i| < 2$, où les α_i sont les zéros de U. Alors, il n'existe pas de polynômes $V \in \mathbb{Z}[z]$, $V \not\equiv 0$, tel que $d^o V > d^o U$ et

$$|V(z)| \leqslant |U(z)| \quad \text{sur} \quad |z| = 1 ,$$

avec l'égalité en un nombre fini de points (Propriété (i)).

Démonstration. - Supposons l'existence de V vérifiant (i) et tel que $d^o V > d^o U$. On a

$$|U|^2 = |S_1| + |V|^2 \quad \text{sur} \quad |z| = 1 ,$$

où

$$S_1(z) = V\tilde{V} - \epsilon_1 \epsilon_1' z^{v-u} U\tilde{U}$$

et

$$|U|^4 = 4|V|^2 |S_1| + [|U|^2 - 2|V|^2]^2 = |S_2| + |\Lambda_2|^2 \quad (\text{sur} \quad |z| = 1)$$

avec $\Lambda_2 = 2V\tilde{V} - \epsilon_1 \epsilon_1' z^{v-u} U\tilde{U}$ et $S_2 = 4V^2 S_1$. Nous avons $\Lambda_2(0) = 2$, $S_2(0) = 4$ et $d^o \Lambda_2 > d^o U^2$. Par récurrence, on montre que

$$|U|^{2^p} = |S_p| + |\Lambda_p|^2 \quad \text{sur} \quad |z| = 1 ,$$

avec $S_p(0) = 2^{2^p} - 2 = \Lambda_p^2(0)$.

Considérons $f = S_p/U^{2^p}$ et $f' = \Lambda_p^2/U^{2^p}$. Comme conséquences de l'identité de Jensen et de la convexité de la fonction exponentielle, nous avons l'inégalité suivante

$$1 \geq \frac{|S_p(0)|}{\alpha^{2^p}} \rho_p + \frac{\Lambda_p^2(0)}{\alpha^{2^p}} \rho_p'^2 ,$$

où ρ_p^{-1} et $\rho_p'^{-1}$ sont respectivement le produit des zéros de S_p et Λ_p intérieurs au disque unité.

Par la suite, nous aurons

$$\alpha^{2^p} \geq 2^{2^p-2} + 2^{2^p-2} = 2^{2^p-1} , \quad \forall\, p \geq 2 ,$$

et cette inégalité est absurde pour p assez grand.

THÉORÈME. - <u>Si</u> D <u>est associé à un élément</u> $\theta \in S' \cap]1, 2[$, <u>alors</u> D <u>ne vérifie pas la propriété</u> (P).

Le résultat est immédiat si $D \neq D_n$, si $D = D_n$, compte tenu de ce qui précède, on montre que D_n ne vérifie pas la propriété (P) (pour tout $n \geq 2$). Voir [6].

2. Définition et propriétés des familles $\mathcal{P}_\lambda$.

Définition. - Pour $0 < \lambda < 1$, $\mathcal{P}_\lambda$ est l'ensemble des polynômes $U \in \mathbb{Z}[z]$ tels que

- $U(0) = 1$;
- U n'a qu'un seul zéro $\frac{1}{\theta}$ dans $|z| \leq 1$, et $1 < \theta \leq 2 - \lambda$.

THÉORÈME. - <u>De toute suite infinie d'éléments de</u> $\mathcal{P}_\lambda$, <u>on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément dans tout compact de</u> $|z| < \frac{1}{2}$ <u>vers une fraction rationnelle</u>.

Pour la démonstration de ce théorème, nous aurions besoin d'étudier certaines familles de fractions rationnelles.

<u>Notations</u>. – Si Q_ν est une suite infinie d'éléments de $\mathcal{P}_\lambda$, soit P_ν le polynôme récirpoque de Q_ν. Nous savons, alors, que $(P_\nu/Q_\nu) \longrightarrow (A/Q)$, A/Q est associée à un élément de $S' \cap [1, 2[$. D'autre part,

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{A}{Q} + z^{\lambda(\nu)} \frac{K_\nu}{QQ_\nu} ,$$

avec $\lambda(\nu) \longrightarrow \infty$ quand $\nu \longrightarrow \infty$.

Soit H_ν le polynôme réciproque de K_ν.

$z^k H_\nu = PQ_\nu - \epsilon\epsilon' z^{s-h} BP_\nu$, et on a alors le résultat suivant.

PROPOSITION. – <u>La famille</u> K_ν/H_ν <u>est une famille compacte de fractions rationnelles. De plus, pour</u> $\nu \geqslant \nu_0$, $(K_\nu/H_\nu) = (K/H)$ <u>de rang fini</u>.

<u>Démonstration</u>. – $|K_\nu/H_\nu| = 1$ sur $|z| = 1$. De plus, si $H_\nu(z) = C_{0\nu} + C_{1\nu} z + \dots$, et si α_j^ν sont les zéros de H_ν situés dans $0 < |z| \leqslant 1$, pour $1 \leqslant j \leqslant r$, en appliquant l'identité de Jensen, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\, |H_\nu(e^{it})|\, dt = \mathrm{Log}\, |C_0^\nu| - \sum_{j=1}^r \mathrm{Log}\, |\alpha_j^\nu|$$

or $|H_\nu(e^{it})| \leqslant 2|PQ_\nu(e^{it})|$, d'où $\mathrm{Log}\, |C_0^\nu| - \sum_{j=1}^r \mathrm{Log}\, |\alpha_j^\nu| \leqslant 4\, \mathrm{Log}\, 2$ ce qui donne

1° $\pi|\alpha_j^\nu| > \frac{1}{16}$ (donc les zéros de H_ν dans $|z| < 1$ sont dans une couronne fixe).

2° $|C_0^\nu| < 16$. On peut donc supposer que $C_0^\nu = q$, en fait on peut montrer que $|H_\nu(0)| = 1$.

Donc K_ν/H_ν est une famille compacte, et par suite

$$\frac{K_\nu}{H_\nu} \longrightarrow \frac{K}{H} \quad \text{avec} \quad |H(0)| = 1 .$$

Montrons que $|K| = |H|$ sur $|z| = 1$.

$$\frac{K_\nu}{Q_\nu} = \frac{K_\nu}{H_\nu}\frac{H_\nu}{Q_\nu} \longrightarrow \frac{K}{H}\frac{D}{Q} .$$

Comme $|H(0)| = 1$ et que Q_ν n'a qu'un seul zéro dans $|z| < 1$, nécessairement on a soit H divise D, soit tous les zéros de H sont sur $|z| = 1$. Si H divise D et $\frac{K}{H}$ de rang infini, on aurait D vérifie la propriété (P), ce qui est faux.

Donc on a soit $\frac{K}{H} = \delta$ avec $\delta \pm 1$, soit

$$\frac{K}{H} = \begin{cases} \delta \dfrac{1 - z + z^n}{1 - z^{n-1} + z^n} \\ \text{ou} \\ \delta \dfrac{1 - z^{n-1} + z^n}{1 - z + z^n} \end{cases}$$

Démonstration du théorème. - De l'égalité $(K_\nu/H_\nu) = (K/H)$, on tire

$$\begin{cases} W_\nu Q_\nu = QH + z^{\lambda_\nu - k + s - h} \epsilon\epsilon' BK \\ W_\nu P_\nu = AH + z^{\lambda_\nu - k} PK \end{cases} ,$$

avec W_ν un diviseur de D . On peut donc supposer que $W_\nu = W$. Par suite, si $\nu \longrightarrow \infty$, $Q_\nu \longrightarrow (QH/W)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Comme corollaire du théorème, nous allons avoir les polynômes minimaux associés aux éléments de $S \cap [1 , 2 - \lambda]$. Pour $\alpha \in S \cap [1 , 2 - \lambda]$, soit U le polynôme minimal de α .

THÉORÈME. - Les éléments $\alpha \in S \cap [1 , 2 - \lambda]$, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, sont tels que

$$U = \frac{A + \delta z^t P}{W} ,$$

où t est un entier positif, A/Q une fraction rationnelle associée à un élément de $S' \cap [1 , 2[$, $\delta = \pm 1$ et W un diviseur du polynôme D associé à A/Q .

Démonstration. - De tout sous-ensemble infini de $S \cap [1 , 2 - \lambda]$, on peut extraire une suite α_ν telle que

$$U_\nu = \frac{AH + z^{\lambda_\nu - k} PK}{W} .$$

Si $(A/Q) \neq (A_n/Q_n)$, alors $\frac{K}{H} = \delta$ et on a

$$U_\nu = \frac{A + \delta z^{\lambda_\nu - k} P}{W} .$$

Si $(A/Q) = (A_n/Q_n)$ alors

$$\frac{K}{H} = \begin{cases} \delta \dfrac{1 - z + z^n}{1 - z^{n-1} + z^n} \\ \text{ou} \\ \delta \dfrac{1 - z^{n-1} + z^n}{1 - z + z^n} \\ \text{ou} \\ \delta \end{cases} .$$

Dans le 1er cas, nous aurons alors

$$U_\nu = \frac{A(1 - z^{n-1} + z^n) + \delta z^{\lambda_\nu - k} P(1 - z + z^n)}{W} . \tag{ii}$$

Compte tenu d'un résultat bien connu, à savoir que les polynômes $1 - z + z^n$ divisés par leurs facteurs cyclotomiques sont irréductibles, on aura $W = 1$ ou éventuellement $W = 1 - z + z^2$ (si $n \equiv 2 \mod 6$).

En appliquant le théorème de Rouché au polynôme réciproque du numérateur du second membre de (ii), on montre que ce second membre admet "beaucoup" de zéros dans

$|z| \geq 1$ et ne peut donc pas définir un élément de S .

Le 2e cas se traite de la même façon. Par suite, nous aurons dans tous les cas :

$$\frac{K}{H} = \pm 1 = \delta \quad \text{et} \quad U_\nu = \frac{A + \delta z^{\lambda_\nu - k} P}{W} .$$

Pour finir, remarquons que, réciproquement, pour tout A/Q associée à un élément de $S \cap [1 , 2[$, on peut déterminer les conditions sur δ et p pour que $Q + \delta z^p B$ admette un seul zéro $\frac{1}{\alpha}$ dans $|z| < 1$ et tel que $1 < \alpha < 2$, ce qui permet d'avoir la liste des polynômes (à l'exception peut-être d'un nombre fini d'entre eux) admettant comme seul zéro dans $|z| > 1$ un élément de $S \cap [1 , 2 - \lambda]$ pour tout $0 < \lambda < 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMARA (M.). - Ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 83, 1966, p. 215-270.

[2] BOYD (D.). - Pisot numbers and the width of meromorphic functions (à paraître).

[3] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 70, 1953, p. 105-133.

[4] PISOT (C.). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.

[5] SALEM (R.). - A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.

[6] TALMOUDI (F.). - Familles particulières de polynômes de $\mathbb{Z}[z]$, Thèse de 3e cycle, Université de Tunis, 1975.

[7] TALMOUDI (F.). - Sur les nombres de $S \cap [1 , 2[$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 285, 1977, Série A, p. 969-971.

[8] TALMOUDI (F. LAZAMI). - Sur les nombres de $S \cap [1 , 2[$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287, 1978, Série A, p. 739-741.