

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN COQUET

Corrélation de suites arithmétiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, n° 1 (1978-1979),
exp. n° 15, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A11_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRÉLATION DE SUITES ARITHMÉTIQUES

par Jean COQUET (*)

[Université de Valenciennes]

I. Introduction

I.1. Mesure spectrale.

\mathcal{S} désigne la famille introduite par WIENER [30], formée des suites $g=(g(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes possédant la propriété suivante :

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad \gamma(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(n+t) \overline{g(n)} \text{ existe.}$$

Lorsque $g \in \mathcal{S}$, la suite γ est appelée la corrélation de g . Il est naturel de prolonger γ à \mathbb{Z} en posant $\gamma(-t) = \overline{\gamma(t)}$. Ce prolongement étant une fonction définie positive de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} , le théorème de Bochner-Herglotz [29] dit que γ est transformée de Fourier d'une mesure borélienne positive μ sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad \gamma(t) = \int_{\mathbb{T}} e(tx) d\mu(x).$$

μ est appelée mesure spectrale de g .

I.2. Décomposition de μ et comportement harmonique de g .

μ se décompose, de manière unique, en somme de 3 termes

$$\mu = \mu^a + \mu^{ac} + \mu^s,$$

où μ^a est atomique, μ^{ac} absolument continue et μ^s singulière.

Deux cas sont particulièrement intéressants.

1° μ est diffuse ($\mu^a = 0$) : J.-P. BERTRANDIAS démontre [2] que

$$\mu^a = 0 \iff \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t < N} |\gamma(t)|^2 = 0.$$

g est alors dite pseudo-aléatoire.

Ceci implique que le spectre de Fourier-Bohr de g est vide, autrement dit,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(n) e(-\alpha n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

La réciproque est fautive ($g(n) = e(\sqrt{n})$).

Si, $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0$, g est dite pseudo-aléatoire au sens de BASS [1].

(*) Texte reçu en novembre 1979.

2° μ est atomique ($\mu = \mu^a$) : J.-P. BERTRANDIAS démontre [2] que cette propriété de μ est équivalente à $\forall \varepsilon > 0$, $\exists E_\varepsilon \subset \underline{\mathbb{N}}$, relativement dense ⁽¹⁾ tel que :

$$\forall t \in E_\varepsilon, \quad \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} |g(n+t) - g(n)| \leq \varepsilon.$$

g est dite moyenne-presque-périodique. Notons que les suites presque-périodiques- B_1 sont moyenne-presque-périodiques, la réciproque étant fautive ($g(n) = e(\sqrt{n})$).

I.3. Les suites étudiées.

Différents types de suites arithmétiques sont étudiées ici : les suites q -multiplicatives, les suites multiplicatives ainsi que d'autres suites au paragraphe IV. Rappelons quelques définitions [12].

Soit $q \geq 2$ un entier naturel. Tout entier naturel n se développe de manière unique en base q .

$$n = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r(n) q^r \quad \text{où } a_r(n) \in \{0, \dots, q-1\}, \quad \forall r \in \underline{\mathbb{N}}.$$

Une suite $g : \underline{\mathbb{N}} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$ est dite q -multiplicative si $g(0) = 1$ et

$$g(n) = \prod_{r=0}^{+\infty} g(a_r(n) q^r), \quad \forall n \in \underline{\mathbb{N}}.$$

Une suite $f : \underline{\mathbb{N}} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$ est dite q -additive si $f(0) = 0$ et

$$f(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} f(a_r(n) q^r), \quad \forall n \in \underline{\mathbb{N}}.$$

En particulier, la somme des chiffres en base q ($s(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r(n)$) est q -additive.

II. Les suites q -multiplicatives

Ces suites ont donné lieu à de nombreuses études (BÉSINEAU, DELANGE, GEL'FOND, KAKUTANI, KAMAE, MAHLER, MENDES FRANCE, ...).

On peut retenir en particulier concernant la somme des chiffres :

1° Dans sa thèse, MENDES FRANCE démontre que la suite de terme général $e(s(n)/q)$, q -multiplicative, est pseudo-aléatoire au sens de BERTRANDIAS, mais pas au sens de BASS [22].

2° Reprenant la technique de MENDES FRANCE, BÉSINEAU [3] démontre que la suite $e(\alpha s(n))$ est pseudo-aléatoire si, et seulement si, $\alpha(q-1) \notin \underline{\mathbb{Z}}$. Ce résultat lui permet de résoudre un problème de GEL'FOND [13] concernant la densité asymptotique de $\{n \in \underline{\mathbb{N}}; s_1(n) \equiv a_1 \pmod{b_1} \text{ et } s_2(n) \equiv a_2 \pmod{b_2}\}$, s_1 et s_2 désignant les sommes des chiffres dans deux bases différentes q_1 et q_2 .

⁽¹⁾ La distance de deux points consécutifs de E_ε est majorée.

II.1. Le résultat principal.

Prolongeant les travaux de BÉSENEAU et MENDES FRANCE, j'ai obtenu [5] le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soit g une suite q -multiplicative de module 1, soit f une q -additive réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = e(f(n))$.

Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- (A) g est à spectre vide,
- (B) g est pseudo-aléatoire,
- (A') Pour tout α réel, $\sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{a=0}^{q-1} \|f(aq^r) - \alpha aq^r\|^2 = +\infty$,
- (B') $\sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{2 \leq a \leq q} \|f(aq^r) - af(q^r)\|^2 = +\infty$.

On sait que (B) \Rightarrow (A). Le fait que (A') \Rightarrow (B') est une conséquence de l'inégalité diophantienne suivante :

LEMME 1. - Soit $(c_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ; soit

$$\alpha_0 = c_0 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{q^r} (c_r - qc_{r-1}), \text{ où } ((x)) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } 0 \leq \{x\} \leq \frac{1}{2} \\ -1 + \{x\} & \text{si } \frac{1}{2} < \{x\} < 1 \end{cases}.$$

On a, pour tout α réel,

$$\frac{q^2}{4} \sum_{r=0}^{+\infty} \|c_r - \alpha_0 q^r\|^2 \leq \sum_{r=0}^{+\infty} \|c_{r+1} - qc_r\|^2 \leq (q^2 + 1) \sum_{r=0}^{+\infty} \|c_r - \alpha q^r\|^2.$$

La preuve de (A) \Rightarrow (A') est basée sur une caractérisation des suites q -multiplicatives à spectre vide ([5], [6] page 12) donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit g une suite q -multiplicative de module ≤ 1 . Le spectre de g est vide si, et seulement si, pour tout α réel,

$$\sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{a=0}^{q-1} (1 - \operatorname{Re}(g(aq^r)e(-\alpha aq^r))) = +\infty.$$

La démonstration du théorème 2, moyennant la remarque que $(g(n)e(-\alpha n))$ est aussi une suite q -multiplicative, se réduit à une caractérisation des suites q -multiplicatives ayant une valeur moyenne nulle [12].

Reste à prouver que (B') \Rightarrow B.

II.2. Existence de la corrélation.

PROPOSITION. - Toute suite q -multiplicative g de module 1 appartient à \mathcal{S} .

BÉSENEAU [3] a démontré ce résultat dans le cas où $g(n) = e(\alpha s(n))$. J'en donne ici une démonstration plus simple. Soit $g^{(k)}$ la suite q -multiplicative tronquée

définie par :

$$g^{(k)}(n) = \prod_{r < k} g(a_r(n)q^r)$$

$g^{(k)}$, étant périodique de période q^k , possède une corrélation $\gamma^{(k)}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{n < N} |g(n+t)\overline{g(n)} - g^{(k)}(n+t)\overline{g^{(k)}(n)}| &\leq 2 \text{Card}\{n < N ; g(n+t)\overline{g(n)} \neq g^{(k)}(n+t)\overline{g^{(k)}(n)}\} \\ &\leq 2 \text{Card}\{n < N ; [(n+t)/q^k] \neq [n/q^k]\} \\ &\leq 2t(N+1)/q^k, \end{aligned}$$

t étant fixé, il résulte de l'inégalité précédente que la suite $(g(n+t)\overline{g(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est presque-périodique- B_1 . Elle a donc une valeur moyenne $\gamma(t)$ donnée par

$$\gamma(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma^{(k)}(t).$$

II.3. Des relations de récurrence.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la suite f_k , q -additive et la suite g_k , q -multiplicative par

$$f_k(n) = f(q^k n) \quad \text{et} \quad g_k(n) = g(q^k n) = e(f_k(n)).$$

Notons γ_k la corrélation de g_k . Un théorème dû à WIENER, affirme que toute suite définie positive a une corrélation. Nous désignerons par Γ_k (resp. Γ) la corrélation de γ_k (resp. γ). Le fait que g soit pseudo-aléatoire se traduit donc par $\Gamma(0) = 0$.

II.3.1. Relations entre les γ_k .

LEMME 2. - Pour tout $a \in \{0, \dots, q-1\}$, tout $u \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\gamma_k(qu + a) = \frac{1}{q}(\gamma_{k+1}(u)\Delta_{a,k} + \gamma_{k+1}(u+1)\Delta'_{a,k})$$

où

$$\Delta_{a,k} = \sum_{0 \leq b < q-a} g_k(b+a)\overline{g_k(b)} \quad \text{et} \quad \Delta'_{a,k} = \sum_{q-a \leq b < q} g_k(b+a-q)\overline{g_k(b)}.$$

On conviendra que $\Delta_{q,k} = 0$ et $\Delta'_{q,k} = q$. Les relations du lemme 2 se transmettent matriciellement aux Γ_k .

II.3.2. Relations entre les Γ_k .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons

$$N_k = \begin{bmatrix} A_k & B_k & \overline{B_k} \\ D_k & E_k & F_k \\ \overline{D_k} & \overline{F_k} & \overline{E_k} \end{bmatrix} \quad \text{où,} \quad \begin{aligned} A_k &= \frac{1}{q^3} \sum_{a=0}^{q-1} (|\Delta_{a,k}|^2 + |\Delta'_{a,k}|^2) \\ B_k &= \frac{1}{q^3} \sum_{a=0}^{q-1} \Delta'_{a,k} \overline{\Delta_{a,k}} \\ D_k &= \frac{1}{q^3} \sum_{a=0}^{q-1} (\Delta_{a+1,k} \overline{\Delta_{a,k}} + \Delta'_{a+1,k} \overline{\Delta'_{a,k}}) \\ E_k &= \frac{1}{q^3} \sum_{a=0}^{q-1} \Delta'_{a+1,k} \overline{\Delta_{a,k}} \\ F_k &= \frac{1}{q^3} \sum_{a=0}^{q-1} \Delta_{a+1,k} \overline{\Delta'_{a,k}} \end{aligned}$$

Le lemme 2 donne après quelques calculs le résultat suivant.

LEMME 3. - Pour tout $\ell \in \underline{\mathbb{N}}$,

$$\begin{bmatrix} \Gamma(0) \\ \Gamma(1) \\ \Gamma(-1) \end{bmatrix} = N_0 N_1 \dots N_\ell \begin{bmatrix} \Gamma_{\ell+1}(0) \\ \Gamma_{\ell+1}(1) \\ \Gamma_{\ell+1}(-1) \end{bmatrix}$$

II.4. Fin de la preuve de $(B') \Rightarrow (B)$.

Nous distinguons deux cas

- 1° la série (S_1) : $\sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{2 \leq a \leq q-1} \|f_r(a) - af_r(1)\|^2$ diverge ($q \geq 3$),
 2° la série (S_2) : $\sum_{r=0}^{+\infty} \|f_{r+1}(1) - qf_r(1)\|^2$ diverge.

II.4.1. Cas où (S_1) diverge.

On définit sur l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes la norme suivante [22] :

$$\| \| [a_{ij}] \| \| = \max_i (\sum_j |a_{ij}|) .$$

Posons

$$a_0 = \inf \{ a \in \{2, \dots, q-1\} ; \sum_{r=0}^{+\infty} \|f_r(a) - af_r(1)\|^2 = +\infty \}$$

et

$$\omega_k = f_k(a_0) - f_k(a_0 - 1) - f_k(1) .$$

On peut alors majorer $\| \| N_k \| \|$:

$$\text{LEMME 4. - } \forall k \in \underline{\mathbb{N}}, \quad \| \| N_k \| \| \leq 1 - 4q^{-3} \|\omega_k\|^2 .$$

D'autre part, $\forall k \in \underline{\mathbb{N}}, \quad 0 \leq |\Gamma_k(1)| = |\Gamma_k(-1)| \leq |\Gamma_k(0)| \leq 1 .$

Donc, d'après le lemme 3, et le lemme 4,

$$\Gamma(0) \leq \prod_{k=0}^{\ell} (1 - \frac{4}{q^3} \|\omega_k\|^2) , \quad \forall \ell \in \underline{\mathbb{N}} .$$

Il ne reste plus qu'à remarquer, d'après la définition de a_0 , que $\sum_{k=0}^{+\infty} \|\omega_k\|^2 = +\infty$.

II.4.2. Cas où (S_2) diverge.

On se ramène au 1er cas (divergence de (S_1)) en changeant de base. On remarque en effet que, si $d = q^2$, toute suite q -additive (resp. q -multiplicative) est d -additive (resp. d -multiplicative).

La divergence de (S_2) implique celle de

$$\sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{2 \leq a < d} \|f(aq^r) - af(q^r)\|^2,$$

donc celle de l'une au moins des deux séries suivantes :

$$(S_1^*) \quad \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{2 \leq a < d} \|f(ad^s) - af(d^s)\|^2$$

$$(S_1^{**}) \quad \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{2 \leq a < d} \|f_1(ad^s) - af_1(d^s)\|^2.$$

Si (S_1^*) diverge, $g = e(f)$, d -multiplicative, est pseudo-aléatoire.

Si (S_1^{**}) diverge, $g_1 = e(f_1)$, d -multiplicative, est pseudo-aléatoire donc g l'est aussi d'après le lemme 3.

II.5. Précisions sur la mesure spectrale.

Si l'on pose $u = 0$ et $a = q - 1$ dans la relation du lemme 2, on obtient :

$$|\gamma_{k+1}(0)| \leq q |\gamma_k(q-1)| + (q-1) |\gamma_{k+1}(1)|.$$

D'autre part, g étant de module 1, pour tout $t \in \underline{\mathbb{N}}$, pour tout $k \in \underline{\mathbb{N}}$, $\gamma_k(t) = \gamma(tq^k)$, d'où il apparait que :

$$|\gamma(0)| \leq q |\gamma(q^{k+1} - q^k)| + (q-1) |\gamma(q^{k+1})|.$$

Il est donc impossible que g soit pseudo-aléatoire au sens de BASS (si tel était le cas, on aurait $\gamma(0) = 0$, alors que, manifestement, $\gamma(0) = 1$).

La mesure spectrale de g ne peut donc pas être absolument continue. En fait, KAMAE, MENDES FRANCE et COQUET [7] ont démontré, par une technique différente de celle qui est exposée dans les paragraphes II.3 et II.4, le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - La mesure spectrale d'une suite q -multiplicative de module 1 est atomique ou singulière.

En fait, c'est une classe de suites un peu plus générale qui a été étudiée. Soit $\mathcal{Q} = (q_r)_{r \in \underline{\mathbb{N}}^*}$ une suite d'entiers ≥ 2 . On pose $p_0 = 1$ et $p_k = \prod_{1 \leq r \leq k} q_r$ pour $k \in \underline{\mathbb{N}}^*$. Il est évident que tout entier naturel n se développe en base \mathcal{Q} sous la forme :

$$n = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r(n) p_r \quad \text{où } a_r(n) \in \{0, \dots, q_{r+1} - 1\}, \quad \forall r \in \underline{\mathbb{N}}.$$

La suite $g : \underline{\mathbb{N}} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$ est dite \mathcal{Q} -multiplicative si $g(0) = 1$ et

$$g(n) = \prod_{r=0}^{+\infty} g(a_r(n) p_r), \quad \forall n \in \underline{\mathbb{N}} \quad (\text{voir [4]}).$$

Nous avons démontré le nouveau théorème.

THÉORÈME 3'.

1° La mesure spectrale d'une suite \mathcal{Q} -multiplicative de module 1 est atomique ou diffuse.

2° Dans le cas où \mathcal{Q} est bornée, si la mesure spectrale est diffuse, elle est singulière.

Dans ma thèse, j'ai prouvé que la dernière assertion était vraie aussi, \mathcal{Q} étant quelconque, dans le cas où g est complètement \mathcal{Q} -additive, autrement dit satisfait à la condition :

$$g(ap_r) = (g(p_r))^a, \quad \forall r \in \underline{\mathbb{N}}, \quad \forall a \in \{0, \dots, q_{r+1} - 1\}.$$

Récemment, Martine QUÉFFELEC [26] a précisé, dans le cas pseudo-aléatoire, que la mesure spectrale (diffuse) était singulière ou absolument continue. Elle a donné également un exemple de suite \mathcal{Q} -multiplicative pseudo-aléatoire au sens de BASS. Mais on ne sait pas s'il existe une telle suite dont la mesure spectrale soit absolument continue.

II.6. Mesures spectrales étrangères.

KAMAE a démontré [17] (voir aussi [18]) le résultat suivant :

THÉORÈME 4. - Soient q_1 et q_2 deux entiers ≥ 2 , premiers entre eux, et $s_1(n)$ (resp. $s_2(n)$) la somme des chiffres de n en base q_1 (resp. q_2). Soit α_1 réel tel que $\alpha_1(q_1 - 1) \notin \underline{\mathbb{Z}}$, soit α_2 réel tel que $\alpha_2(q_2 - 1) \notin \underline{\mathbb{Z}}$. Les suites $(e(\alpha_1 s_1(n)))$ et $(e(\alpha_2 s_2(n)))$ ont des mesures spectrales étrangères.

Martine QUÉFFELEC [27] a amélioré récemment ce résultat, montrant, sans condition sur q_1 et q_2 , que les mesures spectrales de $e(\alpha_1 s_1)$ et $e(\alpha_2 s_2)$ sont égales ou étrangères.

II.7. Retour à la moyenne-presque-périodicité.

Les théorèmes 1 et 3 montrent que toute suite q -multiplicative de module 1 dont le spectre est non-vidé, est moyenne-presque-périodique. Dans ma thèse, j'ai donné une autre démonstration de ce résultat basée sur le théorème 2, la caractérisation par J.-P. BERTRANDIAS des suites moyenne-presque-périodiques et l'inégalité suivante du type TURAN-KUBILIUS :

LEMME 5. - Soit $N \in \underline{\mathbb{N}}^*$. Soit ν l'entier naturel défini par $q^\nu \leq N < q^{\nu+1}$. Soit f une suite q -additive réelle. On a :

$$\sum_{n < N} (f(n) - \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{a=0}^{q-1} f(aq^r))^2 \leq N \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{a=0}^{q-1} f^2(aq^r).$$

Je ne développe pas cette démonstration puisque des arguments semblables sont utilisés au paragraphe III. Je signale toutefois que le lemme 5 permet de prouver

que le produit de deux suites g_1 et g_2 , respectivement q_1 -multiplicative et q_2 -multiplicative de module 1, à spectre non vide, est une suite à spectre non vide [6].

Enfin, un lemme analogue au lemme 5 concernant la suite des nombres premiers, obtenu à partir de résultats classiques de crible, m'a permis de démontrer [10] le théorème suivant prouvé par KATAI [19] dans le cas où q est puissance d'un nombre premier impair, à l'aide d'arguments plus compliqués.

THÉOREME 5. - Soit g une suite q -multiplicative de module ≤ 1 . Si la série $\sum_{r=0}^{+\infty} [\sum_{a=0}^{q-1} (1 - g(aq^r))]$ converge (en particulier, si g a une valeur moyenne non nulle sur \mathbb{N}), g a une valeur moyenne sur la suite des nombres premiers donnée par

$$H(g) = \left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{a=1, (a,q)=1}^{q-1} g(a) \right) \times \prod_{r=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} g(aq^r) \right).$$

III. Les suites multiplicatives

III.1. Les suites moyenne-presque-périodiques.

L'étude harmonique des suites multiplicatives fait apparaître deux différences majeures avec les suites q -multiplicatives :

(a) on ne sait pas à l'heure actuelle démontrer que toute suite multiplicative de module ≤ 1 possède une corrélation,

(b) certaines suites multiplicatives à spectre vide ont une mesure spectrale absolument continue (comparer au théorème 3).

Par contre, on a le théorème suivant.

THÉOREME 6. - Si une suite g , multiplicative de module ≤ 1 , a un spectre non vide, elle est moyenne-presque-périodique.

III.2. Les idées de la démonstration.

Une démonstration détaillée du théorème 6 se trouve dans [6] et [9] : elle ne fait pas appel au calcul de la corrélation mais à la caractérisation due à J.-P. BERTRANDIAS des suites moyenne-presque-périodiques.

Je donne ici les idées de la preuve dans un cas particulier ; dans le cas général, une difficulté surgit, causée par l'annulation périodique d'un caractère de Dirichlet. Je démontre ici le résultat suivant.

PROPOSITION. - Soit g une suite multiplicative de module 1 telle que

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n \leq N} g(n) \right| > 0.$$

Alors g est moyenne-presque-périodique.

Rappelons d'abord un résultat de HALÁSZ [14] : avec l'hypothèse de la proposition, il existe u réel tel que

$$(1) \quad \sum_p \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re}(g(p)p^{-2i\pi u})) < +\infty.$$

On définit la suite h , multiplicative de module 1, par $h(n) = g(n)n^{-2i\pi u}$ et la suite f additive réelle par

$$h(p^\alpha) = e(f(p^\alpha)) \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} < f(p^\alpha) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall \alpha \in \underline{\mathbb{N}}^*, \quad \forall p \text{ premier.}$$

D'après (1),

$$(2) \quad \sum_{(p, \alpha)} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} < +\infty,$$

la somme étant étendue aux couples (p, α) , où p est premier et $\alpha \in \underline{\mathbb{N}}^*$.

D'autre part, on utilise l'inégalité de Turan-Kubilius [20].

LEMME 6. - Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $N \in \underline{\mathbb{N}}^*$ et toute suite additive réelle f ,

$$\sum_{n \leq N} (f(n) - \sum_{p \leq N} \frac{f(p)}{p})^2 \leq cN \sum_{p^\alpha \leq N} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha}.$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, d'après (2), il existe k tel que

$$(3) \quad \sum_{p^\alpha \geq k} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} \leq \frac{\varepsilon^2}{16\pi^2 c}.$$

On définit la suite additive tronquée f_k par :

$$f_k(n) = \sum_{p^\alpha \geq k, p^\alpha | n} f(p^\alpha).$$

L'inégalité de Turan-Kubilius, appliquée à f_k , donne, d'après (3) :

$$(4) \quad \sum_{n \leq N} (f_k(n+t) - f_k(n))^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2} (N+t).$$

D'autre part, si $t \in m_k \underline{\mathbb{N}}^*$ où $m_k = \prod_{p < k} p^{\alpha_p + 1}$ avec $\alpha_p = \max(\alpha/p^\alpha < k)$,

$$(5) \quad f(n+t) - f(n) = f_k(n+t) - f_k(n).$$

On déduit de (4) et (5) que, si $t \in m_k \underline{\mathbb{N}}^*$ (relativement dense),

$$(6) \quad \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} |h(n+t) - h(n)| \leq \varepsilon,$$

ce qui donne facilement

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} |g(n+t) - g(n)| \leq \varepsilon.$$

III.3. Remarques.

1° On peut préciser que la mesure spectrale de g est concentrée sur $\underline{\mathbb{Q}}/\underline{\mathbb{Z}}$ (voir [11] pour le cas presque-périodique- B_1).

2° Pour les suites fortement multiplicatives g de module 1 telles que $g(p) \rightarrow_{p \rightarrow \infty} 1$, on peut préciser que la mesure spectrale de g est atomique ou est la mesure de Haar sur le tore. Ceci est une conséquence facile de résultats de

KUBILIUS [20]. Pour certaines suites multiplicatives tronquées, on a un résultat analogue ([6], théorème IX.2).

IV. Autre exemple

A l'aide du théorème 1, on constate facilement que si f est la suite q -additive réelle définie par

$$f(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \left[\frac{n}{k} \right]_q,$$

$g = e(f)$ est pseudo-aléatoire si, et seulement si, $\sum_{k=1}^{+\infty} \|b_k\|^2 = +\infty$.

MENDES FRANCE a posé la question suivante : le résultat subsiste-t-il si l'on remplace q par un réel quelconque $\tau > 1$? Nous avons démontré que l'équivalence subsistait dans un cas important [8].

THÉOREME 7. - Soit $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels > 0 telle que :

$$(H1) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{s_k} < +\infty,$$

$$(H2) \quad (1, \frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_k}, \dots) \text{ est une famille libre sur } \mathbb{Q}.$$

Alors la suite de terme général $e(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k [\frac{n}{s_k}])$ est pseudo-aléatoire si, et seulement si, $\sum_{k=1}^{+\infty} \|b_k\|^2 = +\infty$.

On peut donc répondre affirmativement à la question posée dans le cas où τ est transcendant.

La démonstration, différente par la méthode employée de celle du théorème 1, est basée sur l'indépendance statistique des ensembles

$$E_k = \{n \in \mathbb{N}; \left\{ \frac{n}{s_k} \right\} \in A_k\}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

où les A_k sont des sous-intervalles arbitraires de $(0, 1[$.

L'hypothèse (H1) du théorème 7 assure l'existence de la corrélation. Peut-être est-elle suffisante ? On peut dans l'énoncé du théorème remplacer (H2) par l'hypothèse suivante :

(H'2) Les nombres s_k sont des rationnels $p_k/r_k \geq 1$ dont les numérateurs sont deux à deux premiers entre eux. (H'2) assure encore l'indépendance statistique des ensembles E_k .

Je signale enfin que les suites mentionnées au théorème 7 peuvent être pseudo-aléatoires au sens de BASS ou non [6]. Peut-on préciser la nature de leur mesure spectrale ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BASS (J.). - Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 1-69.
- [2] BERTRANDIAS (J.-P.). - Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p , Bull. Soc. math. France, mémoire 5, 1966, 106 p. (Thèse Sc. math., 1964).
- [3] BÉSEINEAU (J.). - Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction "somme des chiffres", Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 401-416.
- [4] COQUET (J.). - Sur les fonctions \mathcal{S} -multiplicatives et \mathcal{S} -additives, Thèse 3e cycle, Orsay, 1975.
- [5] COQUET (J.). - Sur les fonctions q -multiplicatives pseudo-aléatoires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 282, 1976, p. 175-178.
- [6] COQUET (J.). - Contribution à l'étude harmonique de suites arithmétiques, Thèse Sc. math., Orsay, 1978.
- [7] COQUET (J.), KAMAE (T.), MENDES FRANCE (M.). - Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, Bull. Soc. math. France, t. 105, 1977, p. 369-384.
- [8] COQUET (J.). - Sur certaines suites pseudo-aléatoires, Acta Scient. Math., Szeged, t. 40, 1978, p. 229-235.
- [9] COQUET (J.). - Sur la mesure spectrale des suites multiplicatives, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 29, 1979, fasc. 3, p. 163-170.
- [10] COQUET (J.). - On a result of Katai (en préparation).
- [11] DABOUSSI (H.), DELANGE (H.). - Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module ≤ 1 , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 657-660.
- [12] DELANGE (H.). - Sur les fonctions q -additives ou q -multiplicatives, Acta Arithm., Warszawa, t. 21, 1972, p. 285-298.
- [13] GEL'FOND (A. O.). - Sur les nombres qui ont des propriétés additives ou multiplicatives données, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1968, p. 259-265.
- [14] HALÁSZ (G.). - Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen, Acta Math. Acad. Sc. Hung., t. 19, 1968, p. 365-403.
- [15] KAKUTANI (S.). - Ergodic theory of shift transformations, "Proceedings of the 5th Berkeley symposium on mathematical Statistics and Probability", Vol. 2, part 2, p. 405-414. - Berkeley, University of California, 1967.
- [16] KAKUTANI (S.). - Strictly ergodic symbolic dynamical systems, "Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on mathematical Statistics and Probability", Vol. 2, p. 319-326. - Berkeley, University of California, 1972.
- [17] KAMAE (T.). - Sum of digits to different bases and mutual singularity of their spectral measures, Osaka J. of Math., t. 15, 1978, p. 569-574.
- [18] KAMAE (T.). - Mutual singularity of spectra of dynamical systems given by sums of digits to different bases, "Systèmes dynamiques, I", Astérisque, 1977, n° 49, p. 109-114.
- [19] KATAI (I.). - A remark on q -additive and q -multiplicative functions, "Topics in number theory [1974. Debrecen]", p. 141-151. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1976 (Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 13).
- [20] KUBILIUS (J.). - Probabilistic methods in the theory of numbers. - Providence, American mathematical Society, 1964 (Translations of mathematical Monographs 11).
- [21] MAHLER (K.). - The spectrum of an array..., Part 2 : On the translation properties of a simple class of arithmetical functions, J. Math. and Phys., t. 6, 1927, p. 158-163.

- [22] MENDES FRANCE (M.). - Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires, J. Anal. Math., Jerusalem, t. 20, 1967, p. 1-56 (Thèse Sc. math. 1966).
- [23] MENDES FRANCE (M.). - Nombres normaux et fonctions pseudo-aléatoires, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 91-104.
- [24] MENDES FRANCE (M.). - Deux remarques concernant l'équirépartition des suites, Acta Arithm., Warszawa, t. 14, 1968, p. 163-167.
- [25] MENDES FRANCE (M.). - Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1, J. Number Theory, t. 5, 1973, p. 1-15.
- [26] QUÉFFÉLEC (M.). - Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques, Bull. Soc. math. France, t. 107; 1979, p. 385-421.
- [27] QUÉFFÉLEC (M.). - Sur la singularité des produits de Riesz et des mesures spectrales associées à la somme des chiffres, C. R. Acad. Sc. Paris (à paraître).
- [28] RAUZY (G.). - Propriétés statistiques des suites arithmétiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1976 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 15).
- [29] TORTRAT (A.). - Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires. - Paris, Masson, 1971.
- [30] WIENER (N.). - The spectrum of an array ..., Part 1, J. Math. and Phys., t. 6, 1927, p. 145-157.
-