

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PHILIPPE FLAJOLET

## Deux problèmes d'analyse d'algorithmes

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 20, n° 1 (1978-1979),  
exp. n° 14, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1978-1979\\_\\_20\\_1\\_A10\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A10_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DEUX PROBLÈMES D'ANALYSE D'ALGORITHMES

par Philippe FLAJOLET (\*)

[Rocquencourt]

Cette note décrit l'analyse (estimation du comportement moyen) de deux algorithmes : le premier est l'algorithme optimal d'allocation de registres en compilation ; le second est un algorithme de tri parallèle par réseaux. Chaque analyse fait intervenir des résultats de distribution de chiffres dans des systèmes de représentation d'entiers.

On sait depuis un travail d'ERSHOV, en 1958, que pour un modèle simple de machine, voisin des calculateurs réalisés industriellement, il existe un ordre optimal d'évaluation d'expressions arithmétiques dans des registres de calcul. Le taux moyen d'occupation de registre a été évalué par FLAJOLET-RAOULT-VUILLEMIN [F R V] et indépendamment par KEMP [Ken]. Ces résultats sont complétés par des estimations de distribution limite et variance dans la thèse de l'auteur [Fla]. Le calcul de la moyenne repose sur des résultats concernant la représentation binaire des nombres entiers dus à DELANGE [Del].

Par ailleurs on connaît depuis 1968 une méthode de tri par réseaux due à BATCHER et qui compte parmi les plus efficaces (cf. [Knu]).

SEGEWICK [Sed] en a le premier fourni une évaluation complète qui repose sur des méthodes d'analyse complexe. Dans [Fla] et [F R], nous en avons donné un traitement plus élémentaire fondé sur les propriétés du code binaire réfléchi ou code Gray, lequel constitue un mode classique en informatique de représentation des entiers.

Le lien entre ces deux analyses d'algorithmes est ainsi l'apparition de systèmes de représentation d'entiers, ce qui, comme l'a remarqué DELANGE pour le système binaire classique, fait intervenir des périodicités exprimées par des fonctions continues mais nulle part dérivables. Ces périodicités se retrouvent dans les expressions asymptotiques des valeurs moyennes des paramètres de ces deux algorithmes.

Nous nous contenterons ici d'indiquer les étapes principales permettant de parvenir à ces résultats, renvoyant pour le détail aux publications déjà citées.

1. L'allocation de registres

1.1. Problématique informatique.

Un programme écrit dans un langage de programmation est traduit par un compila-

---

(\*) Texte reçu le 4 février 1980.

Philippe FLAJOLET, IRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, 78150 LE CHESNAY.

teur en une suite d'instructions directement exécutables en machine. Lors de l'évaluation d'une expression arithmétique, les opérandes généralement issus de calculs antérieurs sont pris dans une mémoire de capacité plus grande, puis chargés dans les registres sur lesquels opère l'unité arithmétique. Un modèle simplifié de ce mécanisme est décrit par la figure 1.

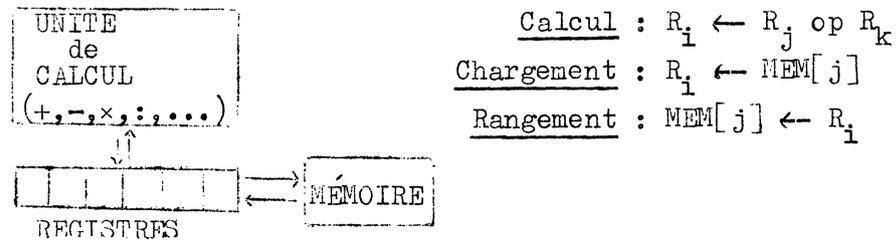


Figure 1 : Modèle d'évaluation d'expressions arithmétiques

Il est clair que le nombre de registres utilisé dépend de l'ordre d'évaluation des sous-expressions. Ainsi, pour l'expression  $a \times (b + c)$ , les évaluations gauche-droite et droite-gauche conduisent aux suites d'instructions

gauche-droite

$R_0 \leftarrow a$   
 $R_1 \leftarrow b$   
 $R_2 \leftarrow c$   
 $R_1 \leftarrow R_1 + R_2$   
 $R_1 \leftarrow R_0 \times R_1$

droite-gauche

$R_0 \leftarrow b$   
 $R_1 \leftarrow c$   
 $R_0 \leftarrow R_0 + R_1$   
 $R_1 \leftarrow a$   
 $R_0 \leftarrow R_1 \times R_0$

La première stratégie utilise les registres  $(R_0, R_1, R_2)$  et la seconde les registres  $(R_0, R_1)$ . L'occupation de registres dépend donc de l'ordre dans lequel sont évalués les sous-expressions. Parmi les différentes stratégies possibles, on démontre l'optimalité de la stratégie d'Ershov. Celle-ci consiste à calculer en priorité, en partant de l'intérieur, les expressions les plus "lourdes". Associant classiquement à une expression un arbre binaire, le nombre de registres utilisé par cette stratégie optimale se calcule inductivement sur la structure de l'arbre par les règles

$$\begin{cases} \text{Reg}(\square) = 0 \\ \text{Reg}(T_1 \overset{0}{\setminus} T_2) = \text{si } \text{Reg}(T_1) = \text{Reg}(T_2) \text{ alors } \text{Reg}(T_1) + 1 \text{ sinon } \max(\text{Reg}(T_1), \text{Reg}(T_2)) \end{cases}$$

Ainsi, pour l'expression  $E = a + (b - c) \times (d - e) * (f + g)$ , l'ordre d'évaluation optimal conduisant à l'utilisation des registres  $R_0, R_1, R_2$  est-il

$(d - e) ; (f + g) ; (d - e) * (f + g) ; (b - c) \times (d - e) * (f + g) ; E ?$

On vérifie que, pour l'arbre  $T$  associé à  $E$ ,  $\text{Reg}(T) = 2$ , comme le montre la figure 2 dans laquelle à chaque sommet est associé le nombre de registres du sous-

arbre (de la sous-expression) correspondante

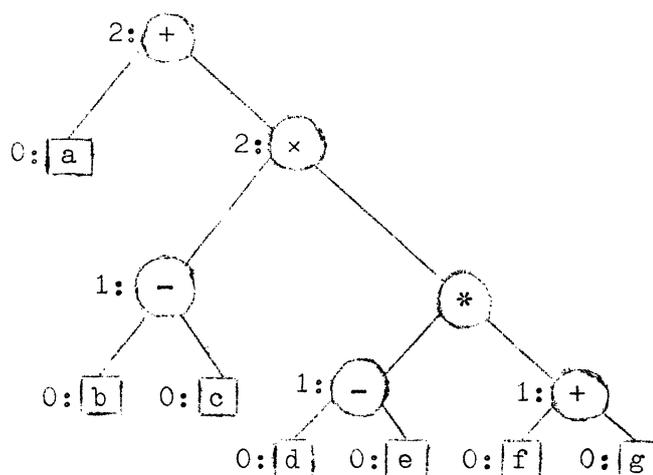


Figure 2 : Arbre associé à l'expression E ,  
et calcul inductif du nombre de registres.

Ce paramètre de forme des arbres binaires est connu dans les sciences de la nature (géomorphologie, hydrologie, ...) sous le nom de "nombre de Strahler".

### 1.2. Taux d'occupation moyen de registres.

Définissons la taille d'un arbre binaire comme le nombre de ses sommets internes, ce qui revient à définir la taille d'une expression par le nombre de ses opérateurs. On s'intéresse ici au taux moyen d'occupation de registres lors de l'évaluation d'une expression de taille  $n$ . Cette quantité  $\bar{R}_n$  vaut par définition

$$\bar{R}_n = \frac{1}{B_n} \sum_{|T|=n} \text{Reg}(T) \quad \text{avec} \quad B_n = \text{card}\{T ; |T| = n\} .$$

La représentation inductive des arbres binaires se traduit sur la série génératrice  $B(z) = \sum_{n \geq 0} B_n z^n$  par l'équation

$$B(z) = 1 + z(B(z))^2$$

soit, en résolvant,

$$B(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} .$$

Ces nombres, reliés au triangle de Pascal, sont connus sous le nom de nombres de Catalan et apparaissent déjà dans des travaux combinatoires d'EULER et SEGNER. Pour le calcul de  $\bar{R}_n$  qui est plus délicat, il convient d'introduire les dénombrements

$$R_{p,n} = \text{card}\{T ; |T| = n \text{ et } \text{Reg}(T) = p\}$$

$$S_{p,n} = \text{card}\{T ; |T| = n \text{ et } \text{Reg}(T) \geq p\} ,$$

ainsi que les séries génératrices correspondantes

$$R_p(z) = \sum_n R_{p,n} z^n \quad \text{et} \quad S_p(z) = \sum_n S_{p,n} z^n .$$

La définition inductive de la fonction  $\text{Reg}$  se traduit sur les séries génératri-

ces par les équations :

$$\begin{cases} R_0(z) = 1, \\ R_p(z) = z(R_{p-1}(z))^2 + 2z R_p(z) \sum_{j < p} R_j(z), \end{cases}$$

lesquelles montrent que chaque  $R_p(z)$  est une fraction rationnelle en  $z$ . Ce système conduit au système équivalent

$$\begin{cases} \frac{R_p(z)}{R_{p+1}(z)} = \left(\frac{R_{p-1}(z)}{R_p(z)}\right)^2 - 2 \\ \frac{R_0(z)}{R_1(z)} = \frac{1}{z} - 1. \end{cases}$$

Cette récurrence quadratique suggère un changement de variable du type

$$\frac{R_p(z)}{R_{p+1}(z)} = 2 \cos \phi_p$$

qui montre qu'on peut prendre  $\phi_p = 2^{p-1} \phi$  avec  $z = \frac{1}{4 \cos^2 \phi/2}$ . Ainsi les  $R_p(z)$  sont-elles liées aux polynômes de Tchebycheff [čebyšev].

PROPOSITION 1. - Les fonctions rationnelles  $R_p$  et  $B - S_p$  valent :

$$R_p(z) = \frac{z^{2^p-1}}{F_{2^{p+1}}(z)}, \quad B(z) - S_p(z) = \frac{F_{2^p-1}(z)}{F_{2^p}(z)},$$

où les polynômes  $F_m(z)$  sont les polynômes de Fibonacci

$$F_m(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-z)^j.$$

Cette proposition montre curieusement que les dénominateurs des  $R_p$  et  $B - S_p$  sont formés à partir des diagonales montantes du triangle de Pascal de rang 1, 2, 4, 8, 16, ... .

Remarque 1. - L'expression qu'à tout arbre est associé une valeur du nombre de registres se traduit par l'identité

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} = \sum_{p \geq 0} \frac{z^{2^p-1}}{F_{2^{p+1}}(z)};$$

dans le cas particulier où  $z = -1$ , on retrouve un développement très rapidement convergent du conjugué du nombre d'or, lequel était connu de Lucas :

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1 - \frac{1}{F_4} - \frac{1}{F_8} - \frac{1}{F_{16}} \dots,$$

où  $F_m = F_m(-1)$  est le  $m$ -ième nombre de Fibonacci.

Remarque 2. - La comparaison de ces séries génératrices avec des résultats de KREWERAS, de BRUIJN, KNUTH et RICE, montre l'existence de correspondances entre nombre de registres et hauteur dans les arbres.

La décomposition en éléments simples de  $R_p(z)$  et  $B(z) - S_p(z)$  fait apparaître des expressions où interviennent racines de l'unité ou coefficients binomiaux.

PROPOSITION 2. - Les quantités  $R_{p,n}$  et  $S_{p,n}$  sont susceptibles des expressions binomiales

$$R_{p,n} = \sum_{q \in I} \left[ \binom{2n}{n+1-q} - \binom{2n}{n-q} \right] \quad \text{où } I = \{2^p(2k+1) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$S_{p,n} = -B_n + \sum_{q \in J} \left[ \binom{2n}{n+1-q} - \binom{2n}{n-q} \right] \quad \text{où } J = \{2^p \cdot k ; k \in \mathbb{Z}\} .$$

PROPOSITION 3. - Les quantités  $R_{p,n}$  et  $S_{p,n}$  sont exprimables trigonométriquement sous la forme

$$R_{p,n} = \frac{4^n}{2^{p-1}} \sum_{1 \leq k \leq 2^p} (-1)^{k+1} \sin^2 \frac{k\pi}{2^{p+1}} \cos^{2n} \frac{k\pi}{2^{p+1}}$$

$$B_n - S_{p,n} = \frac{4^{n+1}}{2^p} \sum_{1 \leq k \leq 2^{p+1}} \sin^2 \frac{k\pi}{2^p} \cos^{2n} \frac{k\pi}{2^p} .$$

Ceci permet le calcul de  $\bar{R}_n$  ; en effet

$$\bar{R}_n = \frac{1}{B_n} \sum_{|T|=n} \text{Reg}(T) = \frac{1}{B_n} \sum_p p \cdot R_{p,n} ,$$

ce qui donne par sommation des expressions où intervient la valuation dyadique <sup>(1)</sup> :

$$\bar{R}_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} v_2(k) \left[ \binom{2n}{n+1-k} - \binom{2n}{n-k} \right] .$$

L'utilisation répétée sur cette expression de la transformation d'Abel conduit à d'autres quantités arithmétiques qui sont

$v(m)$  = le nombre de chiffres 1 dans la représentation binaire de l'entier  $m$  ;

$S(m)$  = le nombre de chiffres 1 dans les représentations binaires des entiers  $0, 1, 2, \dots, m-1$  .

(Par conséquent,  $S(m) = \sum_{0 \leq j < m} v(j)$  .)

PROPOSITION 4. - Le taux moyen d'occupation de registres relatif à l'ensemble des arbres de taille  $n$  vaut

$$\bar{R}_n = 1 - \frac{(n+1)}{\binom{2n}{n}} \sum S(k) \Delta^4 \binom{2n}{n+k-2} \quad (2) .$$

Ce résultat est à la base du traitement asymptotique : les coefficients binomiaux obéissent à une loi asymptotiquement gaussienne ; on montre que leurs différences finies s'expriment asymptotiquement comme dérivées de gaussienne au moyen des polynômes d'Hermite. Quant à la fonction  $S(m)$ , un comptage simple fournit l'équivalent asymptotique  $S(m) = \frac{1}{2} m \log_2 m$  . Une évaluation exacte a été obtenue par DELANGE dans le théorème suivant.

<sup>(1)</sup> On note  $v_2(x)$  la valuation dyadique de l'entier  $x \neq 0$  :

$$x = 2^{v_2(x)}(2y+1) \quad \text{avec } v_2(x) \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z} .$$

<sup>(2)</sup> Nous utilisons librement le symbole  $\Delta$  du calcul des différences finies :

$$\Delta^4 \binom{2n}{n+k-2} = \binom{2n}{n+k+2} - 4 \binom{2n}{n+k+1} + 6 \binom{2n}{n+k} - 4 \binom{2n}{n+k-1} + \binom{2n}{n+k-2} .$$

THÉOREME 1 [Del]. - La fonction  $S(m)$  est donnée par

$$S(m) = \frac{1}{2} m \log_2 m + mF(\log_2 m) ,$$

où  $F$  est continue, de période 1, nulle part dérivable et développable en série de Fourier.

La combinaison de ces approximations conduit au premier résultat :

THÉOREME 2. - La valeur asymptotique de  $\bar{R}_n$  est

$$\bar{R}_n = \log_4 n + D(\log_4 n) + O(1) ,$$

où  $D$  est continue, de période 1 et indéfiniment dérivable.

L'utilisation du calcul par DELANGE des coefficients de Fourier de  $F$  permet d'obtenir pour  $D$  l'expression

$$D(u) = \sum d_k e^{2ik\pi u}$$

où

$$d_0 = \frac{1}{2} - \frac{\gamma + 2}{2\ell_n} + \log_2 \pi = 0.292\dots ,$$

et

$$d_k = \frac{1}{\ell_n^2} (\chi_k - 1) \zeta(\chi_k) \Gamma\left(\frac{\chi_k}{2}\right) \text{ avec } \chi_k = \frac{2ik\pi}{\ell_n} .$$

Cette périodicité apparaît clairement sur le diagramme de la figure 3 où est représentée la variation de  $\bar{R}_n - \log_4 n$ . Ces résultats se prolongent [Fla], et l'on montre que cette périodicité dans la moyenne se retrouve au niveau de la distribution : il existe une infinité de lois limites pour la distribution du nombre de registre ; ces lois limites dépendent uniquement des parties fractionnaires de  $\log_4 n$  et s'expriment au moyen de fonctions elliptiques thêta. En particulier, la variance est une fonction continue et périodique de  $\log_4 n$  (elle est donc bornée) ; le calcul utilise la transformation de Mellin, et indique pour la fonction Reg une distribution étroitement centrée autour de la moyenne.

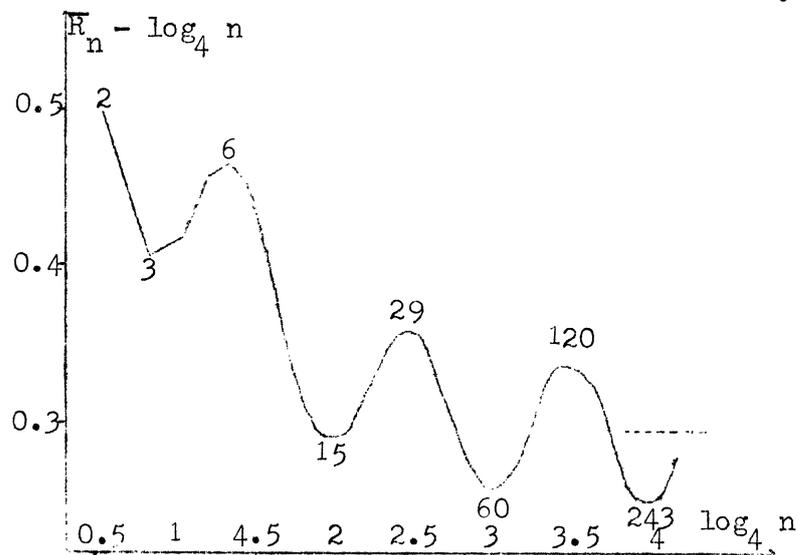
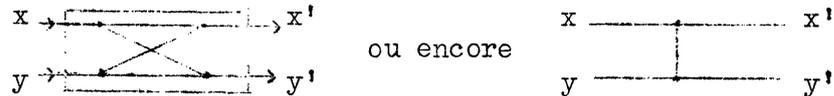


Figure 3 : Variation de  $\bar{R}_n - \log_4 n$  en fonction de  $n$ .

## 2. Les réseaux de tri

### 2.1. Le tri par fusion paire-impair.

Un réseau de tri (cf. [Knu]) de  $n$  éléments est formé de  $n$  lignes d'entrée et  $n$  lignes de sortie ; la structure interne est une interconnection de modules de comparaison-échange qu'on peut représenter graphiquement sous la forme



l'entrée d'un module s'effectue à gauche, la sortie à droite et la spécification de la fonction calculée est

$$x' = \min(x, y) \quad y' = \max(x, y) .$$

Le problème du tri de  $2n$  éléments peut se ramener à deux tris de  $n$  éléments (par exemple le tri des éléments en les positions  $1, 3, 5 \dots 2n - 1$  et le tri des éléments en les positions  $2, 4, 6 \dots 2n$ ) suivis d'une fusion des deux sous-suites triées ainsi constituées. A tout algorithme de fusion correspond ainsi un algorithme de tri. La méthode de fusion étudiée ici est due à BATCHER. Renvoyant à [Knu], pour une description détaillée, nous nous contenterons de donner le réseau de fusion correspondant à 16 éléments

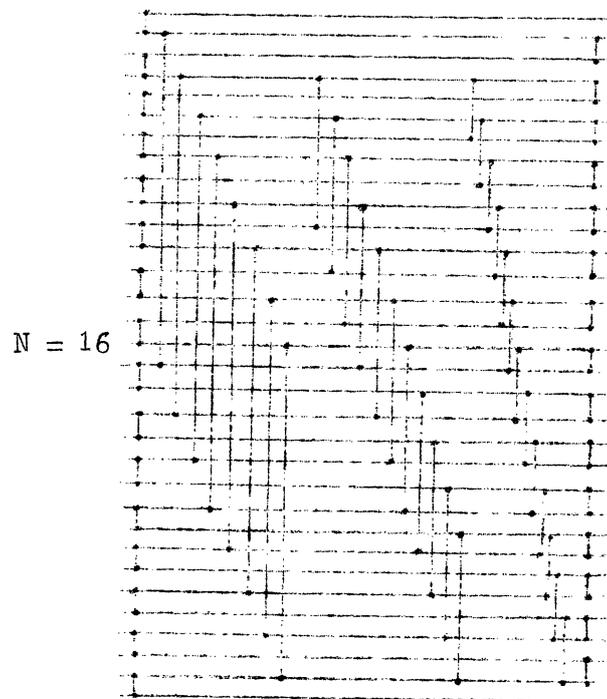


Figure 4 : Réseau de fusion à 16 entrées

L'analyse de l'algorithme de tri se ramène ainsi à l'analyse de la fusion paire-impair sur les suites 2-triées (une suite  $a_1, a_2, a_3 \dots$  est dite 2-triée si  $a_1 < a_3 < a_5 \dots$  et  $a_2 < a_4 < a_6 \dots$ ). Le nombre de suites 2-triées sur  $[1 \dots 2n]$  vaut le coefficient binomial  $\binom{2n}{n}$ . Le nombre de comparaisons effec-

tuées par l'algorithme est indépendant de la nature des données et se détermine facilement en fonction de  $n$ . Le paramètre non trivial est le nombre moyen d'échanges  $\bar{E}_n$  effectués lors de la fusion des  $\binom{2n}{n}$  suites 2-triées de longueur  $n$ . Si  $E_n$  est le nombre total d'échanges sur l'ensemble de toutes les suites 2-triées

$$\bar{E}_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}} E_n .$$

KNUTH a observé qu'on peut donner de l'algorithme une présentation géométrique qui fournit la preuve la plus élégante de correction ; celle-ci repose sur une correspondance entre suites 2-triées sur  $[1 \dots 2n]$  et chemins reliant les sommets opposés d'un treillis  $n \times n$ .

L'analyse ([Sed], [F R]) permet de montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 5. - Le nombre moyen d'échanges  $\bar{E}_n$  a pour expression

$$\bar{E}_n = \frac{n}{2} + 2 \sum_{k \geq 1} T(k) \frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}$$

où  $T(k)$  représente le nombre de chiffres 1 dans les représentations en code Gray des entiers 1, 2, ..., k-1.

Rappelons que le code Gray (ou code binaire réfléchi) est une représentation des entiers par deux chiffres 0 et 1, telle que deux entiers consécutifs diffèrent par exactement un chiffre binaire. La représentation Gray de l'entier  $n$  (notée ici  $[n]_G$ ) est de même longueur que la représentation binaire de  $n$  (c'est-à-dire  $1 + [\log_2 n]$ ) et est définie par

$$[0]_G = 0, \quad [2^p+x]_G = 1 \ 0 \dots 0 [2^p-1-x]_G \text{ pour } x \text{ tel que } 0 \leq x < 2^p,$$

le nombre de 0 étant ajusté pour satisfaire la condition de longueur.

Soit  $\gamma(m)$  le nombre de 1 dans la représentation Gray de  $m$ ; on a ainsi  $T(m) = \sum_{0 \leq k < m} \gamma(k)$ . Il existe pour le code Gray un résultat analogue à celui de DELANGE pour la représentation binaire.

THÉOREME 3 [F R]. - La fonction  $T(m)$  s'exprime par

$$T(m) = \frac{1}{2} m \log_2 m + mG(\log_2 m)$$

où  $G$  est continue, périodique de période 1 et développable en série de Fourier; les coefficients de Fourier  $g_k$  de  $G$  sont donnés par

$$g_0 = 2 \log_2 \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) - \log_2 \pi - \frac{1}{2\ell_n} - \frac{5}{4} = 0.093604\dots$$

$$g_k = \frac{2}{\ell_n} \chi_k^{-1} (1 + \chi_k)^{-1} \zeta\left(\chi_k; \frac{1}{4}\right), \text{ où } \chi_k = \frac{2ik\pi}{\ell_n} \text{ pour } k \neq 0.$$

Ce résultat permet de trafter l'analyse asymptotique de  $\bar{E}_n$ .

THÉOREME 4. - Le nombre moyen d'échanges  $\bar{E}_n$  vérifie

$$\bar{E}_n = \frac{1}{4} n \log_2 n + nM(\log_4 n) + O(n) ,$$

où M est continue, périodique et de période 1 . La fonction M est développable en série de Fourier, et les coefficients  $m_k$  sont donnés par

$$m_0 = 2 \log_2 \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) - \log_2 \pi - \frac{\gamma + 2}{4\lambda_n} = 0.385417\dots .$$

$$m_k = \frac{2}{\lambda_n} \chi_k^{-1} (1 + \chi_k)^{-1} \Gamma\left(\frac{\chi_k}{2}\right) \zeta\left(\chi_k; \frac{1}{4}\right) \text{ avec } \chi_k = \frac{2ik\pi}{\lambda_n}$$

### 3. Conclusion

Les deux analyses présentées fournissent un exemple de l'apparition de systèmes de représentations d'entiers dans l'estimation des performances d'algorithmes. Il existe, en algorithmique, des situations où ces représentations sont encore plus apparentes. Ainsi, correspondant à la décomposition de l'entier  $n$  sous la forme  $n = \sum b_j 2^j$ ,  $b_j \in \{0; 1\}$ , il s'avère fréquemment utile de décomposer une structure  $S_n$  de taille  $n$  en sous-structures dont les tailles sont des puissances de 2 :

$$S_n = \{c_{2^j}; b_j \neq 0\} .$$

VUILLEMIN [Vui] a notamment montré une utilisation élégante de structures de ce type pour la gestion de "files de priorité".

Ces différents cas conduisent au niveau de l'analyse à des sommes du type

$$S(n) = \sum_{k \geq 1} \alpha_k \frac{\Delta^r \binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} ,$$

où  $\alpha_k$  est une fonction arithmétique liée à une représentation d'entiers. La première approche (que nous avons suivie jusqu'ici) consiste à rechercher un résultat à la Delange pour la fonction  $\alpha_k$  (ou l'une de ses primitives discrètes). L. CHENO a ainsi fourni l'analyse complète de la structure de file binomiale de Vuillemin. La seconde approche (que nous avons mentionnée à propos de l'étude de variance de l'allocation de registres) consiste à approcher  $S(n)$  par  $T(1/\sqrt{n})$  où

$$T(x) = \sum_{k \geq 1} \alpha_k \frac{d^r}{dt^r} e^{-t^2} \Big|_{t=kx} .$$

Les propriétés élémentaires de la transformation de Mellin-Fourier montrent pour

$$T^*(s) = \int_0^\infty T(x) \cdot x^{s-1} dx ,$$

l'expression

$$T^*(s) = \frac{1}{2} \xi(s) \Gamma\left(\frac{s-r}{2}\right) (1-s)(2-s) \dots (r-s), \text{ où } \xi(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha_k}{k^s} .$$

Les systèmes de numération simples correspondent à des séries de Dirichlet méro-

morphes où apparaissent fréquemment en dénominateur des quantités du type  $1/(2^s-1)$ .

L'utilisation de la formule de réciprocité qui exprime  $T(s)$  en fonction de  $T^*(s)$  montre, lors d'un calcul par résidu, qu'à chaque pôle non réel correspond un terme périodique dans le développement asymptotique de  $S(n)$ .

Ces deux approches sont complémentaires ; comme nous l'avons indiqué, elles se trouvent en algorithmique d'application plus générale que les deux exemples brièvement présentés ne le laisseraient supposer.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [Del] DELANGE (H.). - Sur la fonction sommatoire de la fonction somme des chiffres, Enseignement math., Genève, t. 21, 1975, p. 31-47.
- [Fla] FLAJOLET (P.). - Analyse d'algorithmes de manipulation d'arbres et de fichiers, Thèse, Université Paris-Sud, Orsay, 1979.
- [F R] FLAJOLET (P.) and RAMSHAW (L.). - A note on Gray Code and Odd-Even merge, SIAM J. on Comp., t. 8, 1979.
- [FRV] FLAJOLET (P.), RAOULT (J.-C.), VUILLEMIN (J.). - The number of registers required for evaluating arithmetic expressions, Theoret. Comp. Sc., t. 9, 1979, p. 99-125.
- [Kem] KEMP (R.). - The average number of registers needed to evaluate a binary tree optimally, Acta Inf., t. 11, 1979, p. 363-372.
- [Knu] KNUTH (D.). - The art of computer programming, vol. 3. - Reading, Addison-Wesley, 1973.
- [Sed] SEDGEWICK (R.). - Data movement in Odd-Even merge, SIAM J. on Comp., t. 7, 1978, p. 239-272.
- [Vui] VUILLEMIN (J.). - A data structure for manipulating priority queues, Comm. Ass. Comp. Machinery, t. 21, 1978, p. 309-315.
-