Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Georges Griso

Équirépartition et zéros de la fonction zêta

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1977-1978), exp. n° 23, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 23, 7 p.

23 janvier 1978

ÉQUIRÉPARTITION ET ZÉROS DE LA FONCTION ZÊTA

par Georges GRISO

(d'après E. HLAWKA [1])

Soit $(\rho_n) = (\beta_n + i\gamma_n)$ la suite des zéros de la fonction zêta de Riemann (suite ordonnée $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \dots \leqslant \gamma_n \dots$). RADEMACHER a démontré ([3], p. 454-455), en utilisant la conjecture de Riemann, que, pour tout entier positif z, la suite $(1/2\pi)\gamma_n \log z$ est équirépartie modulo 1 (le cas $z = q^k$ ($k \in \underset{\sim}{Z}$, q premier) est particulièrement intéressant).

La démonstration de RADEMACHER s'appuie sur le résultat de LANDAU [2] : Pour tout réel $x > 1$, $x = q^k$ (q premier),

$$\Sigma^* x^{\rho_n} = -\frac{T}{2\pi}\log q + O(\log T) , \tag{1}$$

et, quand x n'est pas une puissance d'un nombre premier,

$$\Sigma^* x^{\rho_n} = O(\log T) , \text{ où } \Sigma^* = \sum_{0<\gamma_n\leqslant T} \tag{2}$$

(L'estimation du O ne dépend que de x). Quand $0 < x < 1$ ou quand $x = q^{-k}$ ($k \geqslant 1$, q premier), on doit multiplier le premier membre de (1) et (2) par x pour obtenir un résultat analogue.

On va montrer maintenant que le résultat de RADEMACHER est encore vrai sans utiliser l'hypothèse de Riemann. Pour cela on utilise un résultat de SELBERG ([4], théorème 9.24) $\Sigma^* |\beta_n - (1/2)| = O(T)$, et l'estimation de $N(T)$ [4] :

$$N(T) = \sum_{0<\gamma_n\leqslant T} 1 = \frac{T\log T}{2\pi} + O(T) .$$

Alors, il suit de (1) et (2) :

$$\frac{1}{N(T)}\Sigma^* x^{\rho_n} = O\left(\frac{1}{\log T}\right) .$$

D'autre part, nous avons $|\beta_n| < 1$ et

$$|x^{1/2} - x^{\beta}| \leqslant x^{\beta}\log x\,|\beta - \tfrac{1}{2}| \leqslant x\log x\,|\beta - \tfrac{1}{2}| , \text{ pour } |\beta| < 1 . \tag{3}$$

Donc

$$|\Sigma^*(x^{(1/2)+i\gamma_n} - x^{\beta_n+i\gamma_n})| \leqslant \Sigma^* |x^{1/2} - x^{\beta_n}| \leqslant x\log x\,\Sigma^* |\beta_n - \tfrac{1}{2}| = O(T) ,$$

ce qui entraine

$$\frac{1}{N(T)}\Sigma^* x^{(1/2)+i\gamma_n} = O\left(\frac{1}{\log T}\right) \quad\text{et}\quad \frac{1}{N(T)}\Sigma^* x^{i\gamma_n} = O\left(\frac{1}{\log T}\right) .$$

Soit maintenant z réel (> 1). On pose $x = z^h$ ($h \geqslant 1$), alors il s'ensuit, d'après ci-dessus et le critère de Weyl ($e(\alpha) = \exp 2i\pi\alpha$), que, pour la suite

$\xi(z) = (\xi_n(z)) = ((1/2\pi)\gamma_n \log z)$, on a :

$$\frac{1}{N(T)} \sum^* e(h\xi_n) = O(\frac{1}{\log T}) \text{ , avec } 0 < \gamma_n \lesssim T \text{ ,}$$

d'où la suite $\xi(z)$ est équirépartie modulo 1 .

En dimension s $(s \geqslant 2)$, nous avons

$$\xi(z) = (\xi_n^1 , \ldots , \xi_n^s) \text{ , } \xi_n^j = \frac{1}{2\pi} \gamma_n \log z_j \text{ , } z = (z_1 , \ldots , z_s) \text{ ,}$$

avec $z_1 , \ldots , z_s$ multiplicativement indépendants.

On pose, pour tout $(h_1 , \ldots , h_s) \neq (0 , \ldots , 0)$, $x = z_1^{h_1} . z_2^{h_2} \ldots z_s^{h_s}$. On a $x \neq 1$, d'après l'indépendance multiplicative de $z_1 , \ldots , z_s$. On ne nuit pas à la généralité en supposant de plus $x > 1$, d'après ci-dessus, nous obtenons alors :

$$\frac{1}{N(T)} \sum^* e(\langle h , \xi \rangle) = O(\frac{1}{\log T}) \quad (\langle h , \xi \rangle = \sum_{j=1}^s h_j \xi_j) \text{ ,}$$

d'où l'équirépartiton de la suite $\xi(z)$. Le cas intéressant est celui où les z_j sont des puissances de nombres premiers distincts.

Nous voulons maintenant évaluer la discrépance D_T de la suite $\xi(z)$. Nous montrerons qu'avec l'hypothèse de Riemann nous avons :

(4) $$D_T(\xi) = O(\frac{\log z}{\log T}) \quad (\text{ C constante universelle}),$$

et, sans cette hypothèse,

(4') $$D_T(\xi) = O(\frac{\log z}{\log \log T}) \text{ ,}$$

ceci en dimension 1 . Nous obtiendrons un résultat analogue en dimension s $(s \geqslant 2)$.

<u>Démonstration des égalités</u> (1) <u>et</u> (2) <u>de</u> LANDAU. - LANDAU part des formules suivantes :

Soit $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/n^s)$ ($\sigma = 2$, rayon d'absolue convergence), alors on a, pour toute fonction f ,

(5) $$\left|\int_{2+\gamma i}^{2+Ti} x^s f(s)\, ds - 2i\pi\, h(x , T)\right| \lesssim P(x) \text{ ,}$$

où $h(x , T) = 0$ quand $x > 0$ n'est pas entier, et $h(x , T) = (1/2\pi)(T - \gamma)a_x$ quand $x > 0$ est entier, et où :

(6) $$P(x) = 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^2 \,|\log(x/n)|} \text{ , somme étendue aux } n \neq x \text{ .}$$

(γ est un réel compris entre 0 et 2 , strictement inférieur à $\inf \gamma_n$, $(\gamma_n > 0)$).

Nous appliquons maintenant (5) à la fonction

$$f(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}} \text{ .}$$

On a donc à évaluer :

(6') $$P_1(x) = 2x^2\, P_2(x)$$

avec

(7) $$P_2(x) = \sum_{p^m \neq x} p^{-2m} \left|\log \frac{x}{p^m}\right|^{-1} \log p \;.$$

On suppose maintenant x entier, et on décompose P_2 en quatre sommes

(8) $$P_2 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 \;,$$

où $\Sigma_1 = \sum_{p^m \geqslant 2x}$, $\Sigma_2 = \sum_{x<p^m<2x}$, $\Sigma_3 = \sum_{x/2<p^m<x}$, $\Sigma_4 = \sum_{p^m \leqslant x/2}$. On a :

$$\Sigma_1 = \sum_{p^m \geqslant 2x} \leqslant C_1 \sum_{p^m \geqslant 2x} p^{-2m} \log p \leqslant C_1 \sum_{n \geqslant 2x} \frac{\log n}{n^2} \leqslant \frac{C_2}{x} \log x \;, \quad \text{avec} \quad C_1 = \frac{1}{\log 2}.$$

Ensuite

$$\Sigma_4 = \sum_{p^m \leqslant x/2} \leqslant C_1 \sum_{p^m \leqslant x/2} p^{-2m} \log p \leqslant C_1 \sum_{n \leqslant x/2} \frac{\log n}{n^2} \leqslant C_3 \;.$$

Soit $\Sigma_2 = \sum_{x<p^m<2x}$. Nous posons $p^m/x = 1 + \alpha$, alors $0 < \alpha < 1$.

Nous avons $1 + \alpha \geqslant \exp(\alpha/2)$, donc

$$\log \frac{p^m}{x} = \log(1 + \alpha) \geqslant \frac{\alpha}{2} \;,$$

ce qui entraine que

$$\Sigma_2 = \sum_{x<p^m<2x} \leqslant 2 \sum_{x<p^m<2x} \frac{\log p}{p^{2m}} \times \frac{1}{((p^m/x) - 1)} = 2x \sum_{x<p^m<2x} (p^m - x)^{-1} \frac{\log p}{p^{2m}} \;.$$

x est un entier, on a donc $p^m - x \geqslant 1$, et alors :

$$\Sigma_2 \leqslant 2x \sum_{x<p^m<2x} \frac{\log p}{p^{2m}} = 2x\Big[\sum_{x<p<2x} \frac{\log p}{p^2} + \sum_{x<p^2<2x} \frac{\log p}{p^4} + \dots + \sum_{x<p^n<2x} \frac{\log p}{p^{2n}} + \dots \Big]$$

$$\Longrightarrow \Sigma_2 \leqslant 2x\Big[(\pi(2x) - \pi(x)) \frac{\log x}{x^2} + (\pi(\sqrt{2x}) - \pi(\sqrt{x})) \frac{\log x}{2x^2} + \dots \Big]$$

$$\Longrightarrow \Sigma_2 \leqslant 2x\Big[\frac{\log x}{x^2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(\sqrt[n]{2x}) - \pi(\sqrt[n]{x})}{x}\Big)\Big]$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{1/n})}{n} = \frac{\log x}{x}\Big) \;.$$

D'où $\Sigma_2 \leqslant C_4$.

De même, pour Σ_3 ,

$$\Sigma_3 = \sum_{x/2<p^m<x} < 2x \sum_{x/2<p^m<x} \frac{\log p}{p^{2m}} . (x - p^m)^{-1} \leqslant 2x \sum_{x/2<p^m<x} \frac{\log p}{p^{2m}} \leqslant C_4 \;.$$

Nous avons finalement $P_2(x) \leqslant C_5$ et

(9) $$P_1(x) \leqslant 2\, C_5\, x^2 \;.$$

L'inégalité (5) devient maintenant :

$$\int_{2+\gamma i}^{2+Ti} x^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds = 2i\pi\, h(x\ ,\ T) + O(x^2) \quad (\text{le } O \text{ ne dépend pas de } x\ ),$$

où $h(x\ ,\ T) = -(1/2\pi)(T-\gamma)\log q$ si $x = q^k$ (q premier), ou $h(x\ ,\ T) = 0$ dans le cas contraire.

Maintenant, nous allons appliquer la formule intégrale de Cauchy à $\int x^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds$ le long du rectangle de sommets : $2+\gamma i$, $2+Ti$, $\alpha+Ti$, $\alpha+\gamma i$ $(\alpha<0)$. Pour $T \geqslant 2$, $\gamma < \inf \gamma_n$, il vient, de la formule des résidus,

$$\mathfrak{J} = \int_{2+\gamma i}^{2+Ti} = \int_{2+\gamma i}^{\alpha+\gamma i} + \int_{\alpha+i\gamma}^{\alpha+Ti} + \int_{\alpha+Ti}^{2+Ti} + 2i\pi \sum{}^* x^{\rho_n} .$$

On fait tendre α vers $-\infty$, ce qui implique

$$\mathfrak{J} = -\int_{-\infty+\gamma i}^{2+\gamma i} + \int_{-\infty+Ti}^{2+Ti} + 2i\pi \sum{}^* x^{\rho_n} ,$$

et

$$\sum{}^* x^{\rho_n} = h(x\ ,\ T) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+Ti}^{2+Ti} x^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds + O(x^2) .$$

Nous avons

$$\int_{-\infty+Ti}^{2+Ti} = \int_{-\infty+Ti}^{-1+Ti} + \int_{-1+Ti}^{2+Ti} , \quad \left|\int_{-\infty+Ti}^{-1+Ti} x^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds\right| \leqslant C_8 \frac{\log T}{x}$$

et

$$\int_{-1+Ti}^{2+Ti} x^s \Big(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{|\gamma_n - T|<1} \frac{1}{s-\rho_n}\Big)\, ds = O(x^2 \log T) .$$

Maintenant, il nous faut regarder les $\mathfrak{J}_n = \int_{-1+Ti}^{2+Ti} \frac{x^s}{s-\rho_n}\, ds$. On évalue les $\mathfrak{J}_n$ en intégrant le long du chemin $[-1+Ti\ ,\ 2+Ti]$, sauf si $T-1 < \gamma_n < T$ ou $T < \gamma_n < T+1$. Dans ces deux derniers cas, on remplacera le chemin par des demi-cercles supérieur ou inférieur.

On a alors $\mathfrak{J}_n = O(x^2)$, pour tout n .

On obtient finalement :

$$\sum{}^* x^{\rho_n} = -T\,\psi(x) + O(x^2 \log T) , \tag{10}$$

où $\psi(x) = (1/2\pi)\log q$, quand $x = q^k$, et $\psi(x) = 0$, quand $x \neq q^k$ (k entier, q premier).

TURAN a démontré qu'on pouvait améliorer (10) en remplaçant x^2 par $x \log^2 x$ dans le O .

Nous utilisons maintenant (3), et le résultat de SELBERG pour obtenir

$$\sum{}^* x^{(1/2)+i\gamma_n} = -T\,\psi(x) + O(x^2\, T) , \text{ et } \sum{}^* x^{i\gamma_n} = -T\,\frac{\psi(x)}{x^{1/2}} + O(x^{3/2}\, T) .$$

<u>Calcul de la discrépance</u>. – Nous avons

$$D_T(\xi) = \sup_{\mathfrak{J}} \left|\frac{1}{N(T)} \sum{}^* i_{\mathfrak{J}}(\xi_n) - \lambda(\mathfrak{J})\right| ,$$

où $\mathfrak{J}$ est un intervalle de $I = [0\ ,\ 1[$ ou un pavé de I^s , $i_{\mathfrak{J}}$ la fonction caractéristique de $\mathfrak{J}$ et $\lambda(\mathfrak{J})$ la longueur de $\mathfrak{J}$ ou le volume.

On se servira de la formule de ERDÖS-TURAN-KOKSMA :

(11) $D_T(\xi) \leqslant C_s(\frac{1}{M} + \sum_{\|h\|\leqslant M} R^{-1}(h)\ |\Sigma^{\wedge}(h)|)$, où $\Sigma^{\wedge}(h) = \frac{1}{N(T)} \sum^{*} e(\langle h , \xi_n \rangle)$,

h appartenant au réseau $\underset{\sim}{Z}^s$ $(s \geqslant 1)$, $\|h\| = \max|h_j|$, et $R(h) = \prod_{j=1}^{s} \max(|h_j|,1)$.

Nous posons maintenant $x = z^h$ (h entier non nul), nous obtenons :

(12)
$$\Sigma^{\wedge}(h) = - T \frac{\psi(z^h)}{N(T)\ z^{h/2}} + O(\frac{z^{3h/2}}{T}) ,$$

avec l'hypothèse de Riemann, et sans supposer celle-ci, nous avons

(12')
$$\Sigma^{\wedge}(h) = - T \frac{\psi(z^h)}{N(T)\ z^{h/2}} + O(\frac{z^{3h/2}}{\log T}) .$$

Avec $s = 1$ dans (11), il vient, avec (12'),

$$D_T(\xi) \leqslant C_1(\frac{1}{M} + O(\sum_{h=1}^{M} \frac{z^{3h/2}}{h \log T})) .$$

On a $\sum_{h=1}^{M} z^{3h/2}/h = O(z^{3M/2}/M)$. Donc

$$D_T(\xi) = O(\frac{1}{M} + \frac{z^{3M/2}}{M \log T}) .$$

Posons $M = [(2/3) \times (\log \log T/\log z)] + 1$, on obtient :

(13)
$$D_T(\xi) = O(\frac{\log z}{\log \log T}) .$$

Avec l'hypothèse de Riemann, nous prendrons $M = [(2/3) \times (\log T/\log z)] + 1$, si $z \neq q^k$ (q premier), et nous obtenons :

(13')
$$D_T(\xi) = O(\frac{\log z}{\log T}) .$$

Si $z = q^k$ (q premier), $T\psi(z^h)/N(T)\ z^{h/2} = O(1/\log T)$, on obtient alors le même résultat que (13).

En dimension s $(s \geqslant 2)$, nous avons de nouveau des entiers $z_1 , \dots , z_s$ multiplicativement indépendants. On pose

$$x(h) = z_1^{h_1} \times \dots \times z_s^{h_s} , \quad h = (h_1 , \dots , h_s) \neq 0 .$$

Nous avons alors :

(14)
$$\Sigma^{\wedge}(h) = - T \frac{\psi(x(h))}{N(T)\ x^{1/2}(h)} + O(\frac{x(h)^{3h/2}}{\log T}) ,$$

où O est en $1/\log T$ sans l'hypothèse de Riemann, et en $1/T$ avec celle-ci.

Un calcul rapide nous donne

$$D_T(\xi) = O(\frac{\log(z_1 \dots z_s)}{\log \log T}) ,$$

sans l'hypothèse de Riemann, et, avec cette hypothèse,

$$D_T(\xi) = O(\frac{\log(z_1 \dots z_s)}{\log T}) .$$

Les résultats obtenus semblent mauvais, nous verrons que dans les deux cas, et donc même avec l'hypothèse de Riemann, il n'en est rien.

Pour cela, faisons maintenant $z = q^m$, et montrons que

$$D_T(\xi(q^m)) \geq \frac{1}{2} K(T) \text{, où } K(T) = \psi(q)\ q^{-(m/2)} \frac{1}{\log T} - O(q^{3m/2} \frac{1}{T}) \ .$$

Nous allons nous servir de l'égalité :

$$\exp 2i\pi x = 1 - 2i\pi \int_x^1 \exp 2i\pi t\ dt = 1 - 2i\pi \int_0^1 (\exp 2i\pi t)\ i_t(x)\ dt \ ,$$

où i_t est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0\ ,\ t[$. En prenant la partie réelle, et pour $x = \xi_1\ ,\ \dots\ ,\ \xi_n\ ,\ \dots$, on obtient :

$$\frac{1}{N(T)} \sum^* \cos 2\pi\xi_n - 1 = 2\pi \int_0^1 \sin 2\pi t (\frac{1}{N(T)} \sum^* i_t(\xi_n))\ dt \ .$$

Posons $\mathfrak{I}(t) = (1/N(T)) \sum^* i_t(\xi_n) - t$. Il vient

$$\frac{1}{N(T)} \sum^* \cos 2\pi\xi_n = 2\pi \int_0^1 \sin 2\pi t\ \mathfrak{I}(t)\ dt \ .$$

On a :

$$\int_{1/2}^1 \sin 2\pi t\ \mathfrak{I}(t)\ dt = - \int_0^{1/2} \sin 2\pi t\ \mathfrak{I}(\frac{1}{2} + t)\ dt \ .$$

On obtient alors, en posant

$$\Delta(t) = \mathfrak{I}(\frac{1}{2} + t) - \mathfrak{I}(t) = \frac{1}{N(T)} \sum^* i([t\ ,\ t + \frac{1}{2}[\ ,\ \xi_n) - \frac{1}{2} \ ,$$

$$- \frac{1}{N(T)} \sum^* \cos 2\pi\xi_n = 2\pi \int_0^{1/2} \sin 2\pi t\ \Delta(t)\ dt$$

$$\Longrightarrow - \frac{1}{N(T)} \sum^* \cos 2\pi\xi_n \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq 1/2} |\Delta(t)|\ dt \ .$$

De plus, on a

(15) $$\sup_{0 \leq t \leq 1/2} |\Delta(t)| \leq D_T(\xi) \ ,$$

d'où finalement

$$D_T(\xi) \geq \frac{1}{2} K(T) \ .$$

De (15), on déduit qu'il existe un t dans $[0\ ,\ 1[$ tel que

(16) $$\Delta(t) \geq \frac{1}{2} K(T) \ .$$

Pour ce t , on considère $A(t) = [t\ ,\ (1/2) + t]$ et son complément $B(t) = [0\ ,\ t[\ \cup\ ](1/2) + t\ ,\ 1[$, tous deux de longueur $1/2$. Nous avons

$$\lambda(A(t)) = \frac{1}{N(T)} \sum^* i(A(t)\ ,\ \xi_n) \ ,$$

$$\lambda(B(t)) = \frac{1}{N(T)} \sum^* i(B(t)\ ,\ \xi_n) \ ,$$

et trivialement

$$\lambda(A(t)) + \lambda(B(t)) = 1 \ ,$$

et de (16), il s'en suit

$$\lambda(A(t)) - \lambda(B(t)) \geq K(T) \ .$$

Donc il se trouve dans $A(t)$ au moins $C(q)\,T$ termes de la suite ξ de plus que dans $B(t)$, ceci quand T est suffisament grand ($C(q)$ ne dépend que de q).

On peut aussi comparer la suite $\xi(q^m)$ avec la suite $\xi(z)$ (z n'est pas un entier de la forme q^m). Posons $x_n = \xi_n(q^m)$, et $y_n = \xi_n(z)$. On a alors

$$\frac{1}{N(T)} \sum{}^{*}(\cos 2\pi x_n - \cos 2\pi y_n) = 2\pi \int_0^1 \sin 2\pi t\, \hat{\mathfrak{J}}(t)\, dt ,$$

où $\hat{\mathfrak{J}}(t) = (1/N(T)) \sum{}^{*}[i_t(x_n) - i_t(y_n)]$.

Posons $\hat{\Delta}(t) = (1/N(T)) \sum{}^{*}(i(A(t), x_n) - i(A(t), y_n))$. On aboutit à

$$-\frac{1}{N(T)} \sum{}^{*}(\cos 2\pi x_n - \cos 2\pi y_n) \leq 2 \sup_{0\leq t\leq 1/2} |\hat{\Delta}(t)| .$$

Et donc ici aussi, il existe un t tel que l'intervalle $A(t)$ de longueur $1/2$ possède $C(q, z)\,T$ termes de la suite $\xi(q^m)$ de plus que de termes de la suite $\xi(z)$. (C ne dépend que de q et z).

W. SCHMIDT a démontré qu'on peut de façon analogue comparer $\xi(q^m)$ et $\xi(q_1^{\ell})$, quand

$$q^{-(m/2)} \log q > q_1^{-(\ell/2)} \log q_1 .$$

On peut maintenant relier tout ceci aux trois remarques suivantes :

1° RADEMACHER a conjecturé que (16) est vrai pour $t = 1/4$;

2° On peut donner une estimation plus faible de (4) et (4'), quand z est un entier algébrique ;

3° Avec des séries L comme les fonctions zêta de Dedekind, on peut transcrire tous ces résultats. Les cas d'exceptions (q^m, q premier) deviennent $N(q^m)$, où q est un idéal premier d'un corps de nombres.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HLAWKA (E.). - Über die Gleichwerteilung gewissen Folgen, welche mit den Nullstellen der Zetafunktion zusammenhängen, Österreich. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., t. 184, 1975, p. 459-471.

[2] LANDAU (E.). - Über die Nullstellen der Zetafunction, Math. Annalen, t. 71, 1912, p. 548-564.

[3] RADEMACHER (H.). - Collected papers of Hans Rademacher. Volume 2. - Cambridge, M. I. T. Press, 1974 (Mathematicians of our Time, 4).

[4] TITCHMARSH (E. C.). - The theory of the Riemann zeta-function. 2nd edition. - Oxford, At the Clarendon Press, 1951.

(Texte reçu le 30 juin 1978)

Georges GRISO
45 rue Saint-Placide
75006 PARIS