SERGE LANG

Relations de distributions et exemples classiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1977-1978), exp. n° 40, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A14_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 40, 6 p.

22 mai 1978

RELATIONS DE DISTRIBUTIONS ET EXEMPLES CLASSIQUES

par Serge LANG

A la suite des travaux d'IWASAWA sur les limites projectives de classes d'idéaux et d'unités cyclotomiques, MAZUR a extrait la notion de "distribution" sur un système projectif. Cette structure algébrique élémentaire est comme la prose de Mr Jourdain : Nous en avons tous vu, sans lui avoir donné ce nom. Le but de cet exposé est de donner la définition, et de l'illustrer avec un tas d'exemples classiques. Nous énoncerons aussi un théorème fondamental de Kubert donnant la structure des distributions universelles sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (et plus généralement sur $\mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k$), qui sont les plus fréquentes.

Soient $\{X_n\}$ une suite d'ensembles, et $\pi_{n+1} : X_{n+1} \longrightarrow X_n$ des applications surjectives, de sorte qu'on peut considérer la limite projective

$$X \longrightarrow \dots \longrightarrow X_{n+1} \longrightarrow X_n \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 .$$

Soit A un groupe abélien. Pour chaque n , supposons donnée une fonction

$$\varphi_n : X_n \longrightarrow A .$$

On dit que la famille $\{\varphi_n\}$ est une <u>distribution</u> si, pour chaque n et $x \in X_n$, on a la relation

$$\varphi_n(x) = \sum_{\pi_{n+1} y=x} \varphi_{n+1}(y) .$$

La somme est prise sur tous les éléments $y \in X_{n+1}$ au-dessus de x .

Soit f une fonction sur X_m pour un entier m donné, à valeur dans un anneau d'opérateurs sur A . Alors, on peut considérer f comme étant définie sur X_n , pour tout $n \geqslant m$ en composant avec la projection naturelle de X_n sur X_m . On conclut alors de la relation de distribution que

$$\sum_{x \in X_n} f(x)\varphi_n(x) = \sum_{x\in X_m} f(x)\varphi_m(x) .$$

Soit X la limite projective des X_n . Une fonction f , comme ci-dessus, est appelée localement constante. On peut alors définir son intégrale

$$\int f \, d\varphi = \sum_{x\in X_n} f(x)\varphi_n(x)$$

d'où le nom de distribution.

On a indexé lesystème projectif par les entiers positifs. On peut, bien entendu, prendre d'autres indices. Dans les applications que nous avons en vue, on prendra les entiers ordonnés par divisibilité. L'exemple le plus standard est alors le système $\{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$, isomorphe au système $\{((1/N)\mathbb{Z})/\mathbb{Z}\}$, avec le diagramme commutatif pour $M|N$:

$$\begin{array}{ccc} ((1/N)\underset{\sim}{Z})/\underset{\sim}{Z} & \xrightarrow{N} & \underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z} \\ \text{mult. par } N/M \big\downarrow & & \big\downarrow r_M = \text{réduction mod } M \\ ((1/M)\underset{\sim}{Z})/\underset{\sim}{Z} & \xrightarrow{M} & \underset{\sim}{Z}/M\underset{\sim}{Z} \end{array}$$

On notera que le système projectif $\{(1/N)\underset{\sim}{Z}/\underset{\sim}{Z}\}$ a aussi une structure injective, car tous les $(1/N)\underset{\sim}{Z}/\underset{\sim}{Z}$ sont contenus dans $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$. Une fonction φ sur $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$ sera appelée une <u>distribution ordinaire</u> si sa restriction à chaque $(1/N)\underset{\sim}{Z}/\underset{\sim}{Z}$ satisfait à la relation de distribution, à savoir si on a, pour chaque entier positif N, la relation

$$\sum_{i=0}^{N-1} \varphi(x + \frac{i}{N}) = \varphi(Nx) \text{ , pour tout } x \in \underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z} \text{ .}$$

On dira que c'est une distribution de <u>poids</u> d si

$$N^d \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(x + \frac{i}{N}) = \varphi(Nx) \text{ .}$$

Il arrive, dans la pratique, que ces relations de distributions sont satisfaites, sauf quand $Nx = 0$ dans $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$, auquel cas on dira alors que la distribution est <u>trouée</u>.

Si une distribution prend ses valeurs dans un groupe tel que la multiplication par 2 est inversible, alors on peut former sa partie paire et sa partie impaire.

L'image holomorphe d'une distribution est une distribution, et l'on peut donc parler de la distribution universelle ordinaire, par exemple.

<u>Exemple</u> 1 : <u>Distribution de Bernoulli</u>. - Si $t \in \underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$, on note $\langle t \rangle$ le nombre tel que $0 \leqslant \langle t \rangle < 1$ et $\langle t \rangle \equiv t \mod \underset{\sim}{Z}$. Pour chaque entier positif k, il existe un polynôme monique B_k, de degré k, tel que le système de fonctions

$$x \longmapsto N^{k-1} B_k(\langle \frac{x}{N} \rangle) \text{ , pour } x \in \underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z} \text{ ,}$$

soit une distribution, et ce polynôme est le polynôme de Bernoulli, défini classiquement par la série

$$\frac{t \exp tX}{(\exp t) - 1} = \sum B_k(X) \frac{t^k}{k!} \text{ .}$$

<u>Exemple</u> 2 : <u>Distribution de Bernoulli-Fourier</u>. - Pour θ réel, on a

$$B_k(\langle \theta \rangle) = - \frac{k!}{(2\pi i)^k} \sum_{n \neq 0} \frac{\exp 2\pi i n\theta}{n^k} \text{ .}$$

On peut donc définir la fonction de distribution sur $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$, par la série de Fourier, et la relation de distribution de poids $k - 1$ est satisfaite sur $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$. On peut aussi ne prendre qu'une partie de la série de Fourier, par exemple la partie holomorphe,

$$f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} \text{ ,}$$

avec $z \doteqdot \exp 2\pi i\theta$, de sorte que $\{N^{k-1} f_k\}$ définit une distribution. La partie réelle, pour k pair, et la partie imaginaire, pour k impair, sont des images holomorphes de celle-ci, et donnent lieu à la distribution de Bernoulli.

Exemple 3 : Fonctions zêta partielles. - Soit

$$\zeta(s\ ,\ u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^s}$$

la fonction de Hurwitz, avec $0 < u \leq 1$. On pose $\{t\}$ égal au nombre réel dans la classe de t mod $\mathbb{Z}$ tel que $0 < \{t\} \leq 1$. Alors, il est immédiat que la fonction

$$x \longmapsto N^{-s}\ \zeta(s\ ,\ \{\tfrac{x}{N}\})\ ,\ \text{pour}\ \ x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\ ,$$

définit une distribution trouée.

Exemple 4 : La distribution gamma. - Posons $G(z) = (1/\sqrt{2\pi})\Gamma(z)$. Une relation classique de la fonction gamma donne

$$\prod_{i=0}^{N-1} G(x + \tfrac{i}{N}) = N^{\frac{1}{2}-Nx}\ G(Nx)\ ,$$

si x est un nombre complexe tel que $Nx \neq 0$ mod $\mathbb{Z}$. Si on considère que les valeurs de $G(x)$ sont prises dans $\mathbb{C}^*/\mathbb{Q}_a^*$ (groupe facteur de $\mathbb{C}^*$ par les nombres algébriques $\neq 0$), alors on voit que G définit une distribution trouée, sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, car le facteur $N^{\frac{1}{2}-Nx}$ est alors algébrique. De plus, c'est une distribution impaire, i. e.

$$G(-x) = G(x)^{-1}\ .$$

ROHRLICH a conjecturé que G est la distribution impaire trouée universelle, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'autres relations que les relations de distribution, et la pariité. Ceci est une conjecture appartenant à la théorie des nombres transcendants. Elle mène à la question (d'indépendance algébrique) si les relations de distribution et la parité (ainsi que l'équation fonctionnelle) engendrent un idéal de définition sur les nombres algébriques, pour toutes les relations algébriques des valeurs de la fonction gamma prises pour x rationnel $\neq 0$.

D'une manière générale, on s'attend à ce que toutes les distributions sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, qu'on rencontre de façon "naturelle" soient universelles. On verra plus loin qu'il suffit de déterminer leur rang pour le démontrer.

Exemple 5 : Unités cyclotomiques. - L'application

$$x \longmapsto (\exp 2\pi i x) - 1\ ,\ \text{avec}\ \ x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\ ,\quad x \neq 0\ ,$$

définit une distribution paire ordinaire trouée à valeurs dans $\mathbb{C}^*/\mu$. C'est immédiat, à partir de la relation

$$X^N - 1 = \prod(\zeta X - 1)\ ;$$

le produit étant pris sur toutes les racines N-ièmes de l'unité.

Exemple 6 : Unités modulaires. - Les fonctions de Siegel g_a , indexées par $a \in \mathbb{Q}^2/\mathbb{Z}^2$, $a \neq 0$, définissent une distribution ordinaire trouée sur $\mathbb{Q}^2/\mathbb{Z}^2$, si on considère ces fonctions modulo les racines de l'unité (relations de KLEIN, RAMACHANDRA, ROBERT).

Il existe maints autres exemples semblables à ceux-ci, dans la théorie des unités locales, et dans la K-théorie. Ceux-ci sont en train de s'élaborer en une théorie générale, encore à son début, et nous ne désirons pas entrer dans des considérations plus techniques pour le présent exposé.

Exemple 7 : Distribution de Lobačevskij. - MILNOR a été conduit aux relations de distributions en étudiant les volumes de tétraèdres en géométrie hyperbolique. Je lui dois l'exposé de cet exemple. Considérons la fonction de Lobačevskij

$$\lambda(x) = -\int_0^x \log|2 \sin t|\, dt .$$

Essentiellement, c'est l'intégrale

$$\int_0^x \log|(\exp 2\pi i t) - 1|\, dt ,$$

et l'on vérifie immédiatement que λ définit une distribution impaire trouée de poids 1 sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

D'autre part, considérons l'espace hyperbolique à coordonnées (x_1 , x_2 , y) , avec $x_1 , x_2 \in \mathbb{R}$ et $y > 0$. Etant donnés 4 points distincts dans le plan (x_1 , x_2) , c'est-à-dire des points à l'infini, on peut former le tétraèdre dont les arêtes sont des demi-cercles joignant ces points dans le demi-espace supérieur. C'est un théorème classique que les angles (dits diédraux) cotoyant les arêtes opposées sont égaux. On a donc trois paires d'angles α , β , γ . C'est un théorème classique que le volume V du tetraèdre T est donné par la formule

$$V = \iiint_T dx_1\, dx_2\, dy/y^3 = \lambda(\alpha) + \lambda(\beta) + \lambda(\gamma) .$$

MILNOR conjecture que la relation de parité et les relations de distribution forment une base des relations pour la fonction de Lobačevskij sur $\mathbb{Q}$.

En vertu d'un théorème de Kubert, que nous allons énoncer, ceci équivaudrait à dire que la fonction de Lobačevskij est la distribution universelle impaire de poids 1 sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Théorème de Kubert et distributions universelles. - Considérons d'abord les distributions ordinaires de poids zéro. Soit F le groupe abélien libre dont les générateurs sont les éléments de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (on peut appeler les éléments de ce groupe diviseurs). Alors F contient le sous-groupe engendré par les relations de distribution D , et on désire connaître la structure du groupe facteur F/D .

Pour chaque N , on peut aussi considérer le groupe libre F_N , engendré par les éléments de $(1/N)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, modulo les relations de distribution sur $(1/N)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, soit F_N/D_N . KUBERT montre que F_N/D_N est libre de rang $\phi(N)$ (fonction d'Euler), et construit une base "canonique" comme suit.

Posons $Z_N = (1/N)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Soit

$$N = \prod p_i^{n_i}$$

la factorisation de N en facteurs premiers. Ecrivons un élément de Z_n sous la forme

$$\sum a_i/p_i^{n_i} \quad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}\ .$$

Soit T_N l'ensemble de ces éléments tels que :
ou bien a_i est premier à p_i et $a_i \neq 1$;
ou bien $a_i = 0$.

THÉORÈME. – Les éléments de T_N forment une base sur $\mathbb{Z}$ de F_N/D_N .

On voit donc que, si $M|N$ et $(M , N/M) = 1$ la base T_M est contenue dans la base T_N . Le système de bases est compatible pour les niveaux croissants par divisibilité.

Pour la démonstration, ainsi que la généralisation à $\mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k$, et l'énoncé analogue pour les distributions de poids $\geqslant 1$ (voir l'article à paraître de KUBERT [Ku 2], voir aussi mon livre récent [La]).

Pour les distributions universelles de poids $\geqslant 1$, il se trouve que les éléments primitifs de $(1/N)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ forment une base pour F_N/D_N sur $\mathbb{Q}$. MILNOR avait déjà remarqué, pour $k = 1$, que les éléments primitifs engendrent sur $\mathbb{Q}$ le groupe des diviseurs modulo les relations de distribution de poids 1 , et KUBERT a démontré le théorème général sur $\mathbb{Q}$ par récurrence (C'est faux en poids 0 .).

Pour obtenir la distribution universelle paire ou impaire, si on se limite aux distributions à valeurs dans des groupes où la multiplication par 2 est inversible, alors on obtient les théorèmes analogues comme corollaires immédiats.

Pour l'analyse de la 2-torsion, voir le papier de Kubert, qui nécéssite la cohomologie $H(\pm \mathrm{id} , U)$ de $\pm \mathrm{id}$ dans la distribution universelle.

Puisque la distribution universelle est "libre", chaque fois qu'on veut démontrer qu'une distribution sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est universelle, il suffit de démontrer qu'elle a le rang approprié, c'est-à-dire $\phi(N)$ sur $(1/N)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, et la moitié de ça, pour la distribution paire ou impaire.

Pour cela, on peut étendre les scalaires, et se ramener aux composantes correspondant aux caractères de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Pour la distribution de Bernoulli, on voit alors qu'elle a le bon rang par le résultat classique que $B_{k,\chi} \neq 0$, quand k et χ ont la même parité. La distribution des unités cyclotomiques a le rang maximal par le théorème de Dirichlet, et l'on retrouve de cette façon un théorème de Bass. Les unités modulaires ont le bon rang d'après KUBERT-LANG, qui ramènent la question à des nombres de Bernoulli sur un groupe de Cartan, puis aux nombres de Leopoldt-Bernoulli $B_{k,\chi}$ ordinaires. On obtient ainsi des distributions paires. Pour la distribution universelle impaire, voir l'article de YAMAMOTO [Ya]. On notera que, comme dans BASS, la question de 2-torsion n'est pas traitée de façon appropriée.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] BASS (H.). - Generators and relations for cyclotomic units, Nagoya math. J., t. 27, 1966, p. 401-407.

[Ku 1] KUBERT (D.). - A system of free generators for the universal even ordinary distribution on $\underset{\sim}{Q}^{2k}/\underset{\sim}{Z}^{2k}$, Math. Annalen, t. 224, 1976, p. 21-31.

[Ku 2] KUBERT (D.). - The universal ordinary distribution (à paraître).

[Ku 3] KUBERT (D.). - Cohomology of $\pm$ id in the universal ordinary distribution (à paraître).

[K-L] KUBERT(D.) and LANG (S.). - Distributions on toroidal groups, Math. Z., t. 148, 1976, p. 33-51.

[La] LANG (S.). - Cyclotomic fields. - Berlin, Springer-Verlag, 1978 (Graduate Texts in Mathematics) (à paraître).

[Ya] YAMAMOTO (K.). - The gap group of multiplicative relationships of gaussian sums, "Symposia mathematica", Vol. 15, p. 427-440. - London, Academic Press, 1975 (Istituto nazionale di alta Matematica).

(Texte reçu le 22 mai 1978)

Serge LANG
Mathematics
Yale University, Box 2155 Yale Station
NEW HAVEN, Conn. 06520 (Etats Unis)