Michel Mendès France

Les ensembles de van der Corput

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1977-1978), exp. nº 12, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A9_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année 1977/78, n° 12, 5 p.

5 décembre 1977

LES ENSEMBLES DE VAN DER CORPUT

par Michel MENDÈS FRANCE

Résumé. - VAN DER CORPUT avait remarqué que si la suite $(u_{n+h} - u_n)$ était équirépartie (mod 1) pour tout $h \in \underset{\sim}{N}$, alors (u_n) était aussi équirépartie (mod 1). Nous améliorons ce résultat en montrant que si h est restreint à ne parcourir que certains sous-ensembles de $\underset{\sim}{N}$ la conclusion persiste.

1. Définitions et résultats.

Cet exposé est un compte rendu d'un travail fait en commun avec T. KAMAE [3]. Soit $\mathbb{S}$ la famille des suites infinies de nombres réels (mod 1). Soit T l'opérateur de translation défini sur $\mathbb{S}$ par

$$u = (u_n) \longmapsto Tu = (u_{n+1}) .$$

On définit les iterées de T par la formule de récurrence $T^\nu = T \circ T^{\nu-1}$ $(\nu \geqslant 2)$, et $T^0 = I$, l'identité.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites équiréparties (mod 1). Un théorème classique de Van der Corput affirme

$$\forall\ h \in \underset{\sim}{N} = \{1 , 2 , \ldots\} , \quad (T^h - I)u \in \mathcal{E} \Longrightarrow u \in \mathcal{E} .$$

En d'autres termes

$$\bigcap_{h \in \underset{\sim}{N}} (T^h - I)^{-1} \mathcal{E} \subset \mathcal{E} .$$

Nous dirons, par définition, qu'un ensemble $H \subset \underset{\sim}{N}$ est un ensemble de Van der Corput si

$$\bigcap_{h \in H} (T^h - I)^{-1} \mathcal{E} \subset \mathcal{E} .$$

On désignera la famille des ensembles de Van der Corput par $\mathcal{H}$.

Si $a \in \underset{\sim}{N}$, $a\underset{\sim}{N} \in \mathcal{H}$ (DELANGE). Par contre, il est facile de voir que si b n'est pas multiple de a, $a\underset{\sim}{N} + b \notin \mathcal{H}$. L'appartenance à $\mathcal{H}$ ne dépend donc pas des propriétés de croissance de la suite H. On verra toutefois que $\mathcal{H}$ ne peut contenir aucune suite lacunaire au sens de HADAMARD. Il peut, par contre, contenir des ensembles de densité nulle. Nous établirons, en effet, les résultats suivants.

THÉORÈME 1. - *Soit* $H \subset \underset{\sim}{N}$. *Pour tout* $q \in \underset{\sim}{N}$, *on pose*

$$H_q = \{h \in H ; \quad h \equiv 0 \pmod{q!}\} .$$

Si

(i) *pour tout* $q \in \underset{\sim}{N}$ (*resp. il existe une infinité de* $q \in \underset{\sim}{N}$) *tel que* $H_q \neq \emptyset$,

(ii) *la suite* xH_q *est équirépartie* (mod 1) *pour tout* x *irrationnel et pour*

une infinité de q ,
alors H est un ensemble de Van der Corput.

En sens inverse, si H est un ensemble de Van der Corput, alors la condition (i) est satisfaite.

COROLLAIRE 1. - Les ensembles suivants sont des ensembles de Van der Corput.

(i) $\mathbb{N}$, $a\mathbb{N}$ $(a \in \mathbb{N})$;

(ii) $(I - I)^+ = \{i - j \ ; \ i \in I \ , \ j \in I \ , \ i > j\}$, où I est un ensemble infini d'entiers arbitraires ;

(iii) $P^+(\mathbb{N}) = \{P(n) \ ; \ n \in \mathbb{N} \ , \ P(n) > 0\}$, où P est un polynôme à coefficients entiers, qui tend vers $+\infty$ quand la variable tend vers $+\infty$, et qui admet un zéro $(\mathrm{mod}\ g)$ pour tout $g \in \mathbb{N}$;

(iv) $\mathbb{P} + 1$ et $\mathbb{P} - 1$, où $\mathbb{P}$ représente l'ensemble des nombres premiers. $\mathbb{P} + k$ n'est pas un ensemble de Van der Corput si $k \neq \pm 1$.

THÉORÈME 2. - S'il existe un ensemble A d'entiers, de densité supérieure positive, tel que $(A - A) \cap H = \emptyset$, alors H n'est pas un ensemble de Van der Corput.

COROLLAIRE 2. - Les ensembles suivants ne sont pas des ensembles de Van der Corput.

(i) Toute progression arithmétique $a\mathbb{N} + b$, où b n'est pas multiple de a , et plus généralement toute réunion finie de telles progressions ;

(ii) Toute suite d'entiers lacunaire à la Hadamard.

COROLLAIRE 3 (FURSTENBERG [2], SÁRKÖZY [4], [5], [6]). - Soit A un ensemble d'entiers de densité supérieure positive. Soit H un ensemble de Van der Corput. Alors, l'équation diophantienne

$$x - y = z \ , \quad x \in A \ , \quad y \in A \ , \quad z \in H \ ,$$

admet une solution.

2. Preuve du théorème 1.

Soit $\alpha = (\alpha(n))$ une suite infinie de nombres complexes bornés. Il existe une suite S d'indices telle que

$$\limsup_{N\to\infty} (1/N)\left|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\right| = \lim_{N\in S} (1/N)\left|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\right| ,$$

et telle que

$$\lim_{N\to\infty} (1/N) \sum_{n=1}^{N} \bar{\alpha}_n \, \alpha_{n+k} = \gamma(k)$$

existe pour tout $k \in \mathbb{Z}$. La suite γ , appelée corrélation de α , est une suite définie positive. Elle admet la représentation intégrale (BOCHNER-HERGLOTZ)

$$\gamma(k) = \int_{\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}} \exp 2i\pi kx\Lambda(dx) ,$$

où Λ est une mesure bornée positive définie sur le tore $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$. D'après un résultat de J.-P. BERTRANDIAS [1], nous avons l'inégalité suivante

(1) $$\limsup_{N\to\infty}(1/N)\left|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\right| \leqslant \sqrt{\Lambda(\{0\})} .$$

Soit f un polynôme trigonométrique, à spectre dans H, tel que $f(0) = 1$ et $|f(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$,

$$f(x) = \sum_{x\in H} c_h \exp 2i\pi hx .$$

Soit $\mathcal{P}(H)$ la famille de tels polynômes, et soit $\mathcal{P}^*(H)$ la plus petite famille d'applications $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z} \longrightarrow \underset{\sim}{C}$, qui contient $\mathcal{P}(H)$ et qui est stable pour la convergence ponctuelle des fonctions.

THÉORÈME 0. - Si, pour tout $\delta > 0$, il existe $f \in \mathcal{P}^*(H)$ tel que $\mathcal{R}e(f) \geqslant -\delta$ ($\mathcal{R}e$ = partie réelle), alors H est un ensemble de Van der Corput.

En effet, soit $u \in \bigcap_{h\in H}(T^h - I)^{-1}\,\mathcal{E}$. On pose

$$\alpha_n = \exp 2i\pi qu_n , \quad (q \in \underset{\sim}{Z}^*) .$$

A la suite $\alpha = (\alpha_n)$ on associe la corrélation γ et la mesure Λ. Puisque $u \in \bigcap_{h\in H}(T^h - I)^{-1}\,\mathcal{E}$, $\gamma(h)$ s'annule pour tout $h \in H$. Si donc $f \in \mathcal{P}(H)$,

$$\int_{\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}} f(x)\Lambda(dx) = \sum_{h\in H} c_h\, \gamma(h) = 0 ,$$

$$\Lambda(\{0\}) + \int_{(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^*} f(x)\Lambda(dx) = 0 .$$

D'après le théorème de la convergence bornée de Lebesgue, si $f \in \mathcal{P}^*(H)$,

$$\Lambda(\{0\}) = -\int_{(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^*} f(x)\Lambda(dx) \leqslant \delta .$$

Donc $\Lambda(\{0\}) = 0$. D'après (1),

$$\limsup_N (1/N) \sum_{n=1}^{N} \exp 2i\pi qu_n = 0 ,$$

donc $u \in \mathcal{E}$.

Le théorème 0 étant établi, il est aisé d'en déduire le théorème 1 et son corollaire. Soit

$$A(N , q) = \operatorname{card} \{h \leqslant N ;\ h \in H_q\} .$$

On pose

$$f_{N,q}(x) = (1/A(N , q)) \sum_{h\in H_q, h\leqslant N} \exp 2i\pi xh .$$

Il est clair que $f_{N,q} \in \mathcal{P}(H)$ et que, pour une certaine suite $S \subset \underset{\sim}{N}$,

$$\lim_{q\to\infty} \lim_{N\in S} f_{N,q}(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \underset{\sim}{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \underset{\sim}{R}\setminus\underset{\sim}{Q} \end{cases} ,$$

et que $f \in \mathcal{P}^*(H)$. Comme $\mathcal{R}e(f) \geqslant 0$, on en conclut que $H \in \mathcal{H}$.

C. Q. F. D.

La seconde partie du théorème découle de façon évidente du théorème 2, ou mieux du corollaire 2.

3. Preuve du corollaire 1.

Les assertions (i), (iii) et (iv) sont claires. Pour établir (ii), il suffit de remarquer que si $J \subset I$ est un ensemble fini, alors

$$\begin{aligned} f_J(x) &= (2/(|J|^2 - |J|)) \sum_{r\in J, s\in J, r>s} \exp 2i\pi(r-s)x \\ &= (1/(|J|^2 - |J|))|\sum_{r\in J} \exp 2i\pi rx|^2 - (1/(|J|-1)) \\ &\geq -(1/(|J|-1)) > -\delta \end{aligned}$$

sitôt que $|J|$ est suffisamment grand.

C. Q. F. D.

4. Preuve du théorème 2.

Soit A un ensemble de densité supérieure positive. Soit $v = (v_n)$ une suite infinie de nombres réels (mod 1) telle que $n \in A \Longrightarrow v_n = 0$.
Soit H tel que $(A - A) \cap H = \emptyset$. Alors

$$v_{n+h} - v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in A \text{ et } n+h \in A, \\ v_{n+h} & \text{si } n \in A \text{ et } n+h \notin A, \\ -v_n & \text{si } n \notin A \text{ et } n+h \in A, \\ v_{n+h} - v_n & \text{si } n \notin A \text{ et } n+h \notin A. \end{cases}$$

Le premier des quatre cas est inexistant. Il est alors bien clair que, pour presque tous les v, $(v_{n+h} - v_n)$ est équirépartie (mod 1) pour tout $h \in H$, alors que (v_n) n'est pas équirépartie (mod 1).

C. Q. F. D.

Le corollaire 3 est immédiat. Le corollaire 2 découle des travaux de STEWART et TIJDEMAN [7].

5. Exercices, problèmes ouverts.

1° Si $H = \{h_1, h_2, \ldots\}$ est un ensemble de Van der Corput, alors $H\setminus\{h_1\}$ est un ensemble de Van der Corput.

2° Si H est un ensemble de Van der Corput, alors aH est un ensemble de Van der Corput $(a \in \underset{\sim}{N})$.

3° Soit $\alpha > 1$ un nombre irrationnel. Alors $H = ([\alpha n])$ est un ensemble de Van der Corput.

4° Soit $\mathcal{K}$ la famille des suites d'entiers K qui ont la propriété suivante : Toute mesure Λ positive bornée telle que

$$\lim_{k\in K} \int_{\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}} \exp 2i\pi kx \Lambda(dx) = 0$$

est nécessairement diffuse. Quel rapport existe-t-il entre $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$? (KATZNELSON)

5° Caractériser la famille $\mathcal{H}$.

6° Soit $\theta > 1$. On définit l'ensemble

$$B(\theta) = \{x \; ; \; (x\theta^n) \text{ équirépartie } (\text{mod } 1)\}$$

Soit $\mathcal{H}(\theta)$ la famille des suites $H \subset \underset{\sim}{N}$ telles que

$$\bigcap_{h\in H}(1/(\theta^h - 1))B(\theta) \subset B(\theta)$$

De toute évidence $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}(\theta)$. Peut-on donner plus de précisions sur l'ensemble $\mathcal{H}(\theta)$? Remarquez qu'en particulier, si $\theta \in \underset{\sim}{N}$, alors $\mathcal{H}(\theta)$ est l'ensemble des parties non vides de $\underset{\sim}{N}$!

7° Soit C. P. P. la famille des suites à caractère presque périodique. Montrer que si $H \in \mathcal{H}$, alors

$$u \in \bigcap_{h\in H}(T^h - I)^{-1}\, \mathcal{E} \Longrightarrow \forall\, \sigma \in \text{C. P. P.} \; , \quad u \circ \sigma \in \mathcal{E} \; .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS (J.-P.). - Suites pseudo-aléatoires et critères d'équirépartition modulo 1 , Compositio Math., Groningen, t. 16, 1964, p. 23-28.

[2] FURSTENBERG (H.). - Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetical progressions, J. Analyse math., Jérusalem, t. 31, 1977, p. 204-256.

[3] KAMAE (T.) and MENDÈS FRANCE (M.). - Van der Corput's difference theorem, Israel J. Math. (soumis pour publication).

[4] SÁRKÖZY (A.). - On difference sets of sequences of integers I, Acta math. Acad. Sc. Hungar. (à paraître).

[5] SÁRKÖZY (A.). - On difference sets of sequences of integers II, Ann. Univ. Sc. Budapest Eötvös (à paraître).

[6] SÁRKÖZY (A.). - On difference sets of sequences of integers III, (à paraître).

[7] STEWART (C.) and TIJDEMAN (R.). - On infinite difference sets of sequences of integers, Canadian J. Math. (à paraître).

(Texte reçu le 13 décembre 1977)

Michel MENDÈS FRANCE
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la libération
33405 TALENCE