Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Christian Radoux

Divisibilité de $\sigma_k(n)$ par un nombre premier

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1977-1978), exp. nº 3, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 3, 5 p.

DIVISIBILITÉ DE $\sigma_k(n)$ PAR UN NOMBRE PREMIER

par Christian RADOUX

Résumé. - Cet article expose une méthode de calcul du nombre $N_k(x\ ,\ p)$ d'entiers $n \leqslant x$ pour lesquels $\sigma_k(n)$ n'est pas divisible par p (premier impair).

Soit $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$. Soit $x > 1$.
Appelons $N_k(x\ ,\ p)$ le nombre d'entiers n $(1 \leqslant n \leqslant x)$ pour lesquels $\sigma_k(n)$ n'est pas divisible par p (premier impair). Dans tout ce qui suit, $(m\ ,\ n)$ désignera le p. g. c. d. de m et n .

THÉORÈME. - *Soit* p *premier* > 2 . *Posons*

(1) $$q = (p - 1)/(k\ ,\ p - 1)\ .$$

Il existe des constantes C_1 , C_2 , *dépendant seulement de* k *et* p , *effectivement calculables telles que, si* $x \longrightarrow \infty$, *alors*

(2) $$N_k(x\ ,\ p) \simeq C_1\ x/(\log x)^{1/q}\ ,\ \text{si}\ q\ \text{est pair},$$

(3) $$N_k(x\ ,\ p) \simeq C_2\ x\ ,\ \text{si}\ q\ \text{est impair}.$$

N. B. - Si k est impair, q est évidemment pair. Si $k = p - 1$, évidemment $q = 1$.

Démonstration.

1° Posons

(4) $$\delta_k(n\ ,\ p) = \begin{cases} 0\ ,\ \text{si}\ p|\sigma_k(n)\ , \\ 1\ ,\ \text{si}\ p\nmid\sigma_k(n)\ . \end{cases}$$

$\sigma_k(n)$ étant une fonction multiplicative de n , il en va de même pour $\delta_k(n\ ,\ p)$.

(5) $$[(m\ ,\ n) = 1] \Longrightarrow [\delta_k(mn\ ,\ p) = \delta_k(m\ ,\ p)\ \delta_k(n\ ,\ p)]\ .$$

En outre, si t est premier, on a

$$\sigma_k(t^i) = \sum_{j=0}^{i} t^{jk} = \frac{t^{(i+1)k} - 1}{t^k - 1}\ .$$

Ainsi, $\delta_k(t^i\ ,\ p)$ est nul

(6) $$\text{lorsque}\ t^k \equiv 1\ (\text{mod}\ p)\ \text{et}\ (i + 1) \equiv 0\ (\text{mod}\ p)\ ,$$

(7) $$\text{lorsque}\ t^k \not\equiv 1\ (\text{mod}\ p)\ \text{et}\ t^{(i+1)k} \equiv 0\ (\text{mod}\ p)\ .$$

(8) $$\delta_k(t^i\ ,\ p) = 1\ \text{dans tous les autres cas.}$$

Si $t \neq p$, soit r une racine primitive modulo p . Soit donc α_t tel que

(9) $$r^{\alpha_t} \equiv t\ (\text{mod}\ p)\ ,\ 0 \leqslant \alpha_t < p - 1\ .$$

Posons encore

$$\beta_t = \begin{cases} p & \text{si } q \mid \alpha_t \\ q/(q\ ,\ \alpha_t) & \text{si } q \nmid \alpha_t\ . \end{cases} \tag{10}$$

En d'autres termes, β_t est l'ordre de t^k modulo p , excepté dans le cas où $t^k \equiv 1 \pmod p$, auquel cas $\beta_t = p$. Par conséquent, (6) (7) et (8) peuvent être rassemblées en une seule ligne.

$$[\delta_k(t^i\ ,\ p) = 0] \Longleftrightarrow [i + 1 \equiv 0 \pmod{\beta_t}]\ . \tag{11}$$

2° A la fonction $\delta_k(n\ ,\ p)$, associons la série de Dirichlet

$$L_\delta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_k(n\ ,\ p)}{n^s}\ , \quad (s = \sigma + i\tau)\ . \tag{12}$$

Vu la définition de $\delta_k(n\ ,\ p)$, et vu ce que l'on sait de la fonction ζ de Riemann, il est clair que f_δ est holomorphe sur le demi-plan ouvert $\sigma > 1$. Ainsi, pour $\sigma > 1$, d'après (5), on peut développer L_δ en produit eulérien :

$$\begin{aligned}
L_\delta(s) &= \prod_{t \text{ premier}} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_k(t^m\ ,\ p)t^{-ms} \\
&= \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \delta_k(p^m\ ,\ p)p^{-ms}\Big)\Big(\prod_{t \text{ premier}\neq p} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_k(t^m\ ,\ p)t^{-ms}\Big) \\
&= \Big(\sum_{m=0}^{\infty} p^{-ms}\Big)\Big(\prod_{t \text{ premier}\neq p} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} t^{-ms} - \sum_{\substack{m\geq 0 \\ \delta_k(t^m,p)=0}} t^{-ms}\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{t \text{ premier}\neq p} \Big(\frac{1}{1-t^{-s}} - \sum_{\substack{m\geq 0 \\ m+1\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,\beta_t)}} t^{-ms}\Big) \quad [\text{vu } (11)] \\
&= \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{t \text{ premier}\neq p} \Big(\frac{1}{1-t^{-s}} - \sum_{m=1}^{\infty} t^{-s(-1+m\beta_t)}\Big) \\
&= \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{t \text{ premier}\neq p} \Big(\frac{1}{1-t^{-s}} - t^{s}\,\frac{t^{-s\beta_t}}{1-t^{-s\beta_t}}\Big) \\
&= \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{t \text{ premier}\neq p} \Big(\frac{1 - t^{-s\beta_t} - t^{-s(\beta_t-1)} + t^{-s\beta_t}}{(1-t^{-s})(1-t^{-s\beta_t})}\Big) \\
&= \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{t \text{ premier}\neq p} \frac{1 - t^{-s(\beta_t-1)}}{(1-t^{-s})(1-t^{-s\beta_t})}\ ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire encore, d'après l'identité d'Euler pour la fonction ζ ,

$$L_\delta(s) = \zeta(s) \prod_{t \text{ premier}\neq p} (1 - t^{-s(\beta_t-1)})/(1 - t^{-s\beta_t}) \quad (\sigma > 1)\ . \tag{13}$$

Il est évident que d'après sa définition même (cf. (10)), β_t ne peut être pair lorsque q est impair. D'autre part, β_t est toujours évidemment un entier strictement supérieur à 1 . Donc

$$(14) \qquad [\ q \ \text{ impair}] \Longrightarrow [\beta_t \geqslant 3] .$$

Mais alors, de (13) et (14), on déduit que,
si q est impair, $L_\delta(s)$ est méromorphe sur le demi-plan ouvert $\sigma > \frac{1}{2}$, avec un seul pôle (simple) en $s = 1$, de résidu $\prod_{t \text{ premier} \neq p}((1 - t^{1-\beta_t})/(1 - t^{-\beta_t}))$, et cela en vertu de propriétés bien connues de $\zeta(s)$. Du théorème taubérien de Ikehara résulte alors l'existence de la constante C_2 annoncée en (3).

3° Examinons maintenant le cas où q est pair : Dans ce cas, $\beta_t = 2$ chaque fois que α_t est un multiple impair de $q/2$, et le raisonnement précédent n'est donc plus valable.
Soit alors $\chi(n)$ le caractère de Dirichlet modulo p défini par

$$(14) \quad \chi(n) = \begin{cases} \exp(2i\pi/q)\alpha_n , & \text{où } n \equiv r^{\alpha_n} \pmod p \ \ (\text{cf. } (9)), \text{ si } n \not\equiv 0 \pmod p \\ 0 , & \text{si } n \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

(d'où

$$(15) \qquad \chi(mn) = \chi(m)\,\chi(n) , \text{ quels que soient } m \text{ et } n \text{).}$$

Posons encore

$$(16) \qquad L_{\chi^j}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi^j(n)/n^s$$

et

$$(17) \qquad F(s) = \prod_{j=1}^{q} L_{\chi^j}(s)/L_{\chi^{2j}}(s) .$$

Vu (15),

$$(18) \qquad F(s) = \prod_{j=1}^{q} \prod_{t \text{ premier} \neq p} (1 - \chi^{2j}(t)t^{-s})/(1 - \chi^j(t)t^{-s})$$

Soit t un nombre premier, $t \neq p$, pour lequel $q \nmid \alpha_t$, c'est-à-dire (10) pour lequel $\beta_t = q/(q , \alpha_t)$.
Alors

$$(\alpha_t , \tfrac{q}{2}) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\alpha_t , q) & \text{si } \beta_t \text{ est impair} \\ (\alpha_t , q) & \text{si } \beta_t \text{ est pair.} \end{cases}$$

En effet, β_t est impair si, et seulement si, α_t est divisible par 2 au moins autant de fois que q.
Par conséquent,

$$\prod_{j=1}^{q} \frac{1 - \chi^{2j}(t)t^{-s}}{1 - \chi^j(t)t^{-s}} = \prod_{j=1}^{q} \frac{1 - (\exp(4i\pi j\alpha_t)/q)t^{-s}}{1 - (\exp(2i\pi j\alpha_t)/q)t^{-s}}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } \beta_t \text{ est impair} \\ \left(\dfrac{(1 - t^{-s\beta_t/2})^2}{1 - t^{-s\beta_t}}\right. & \text{si } \beta_t \text{ est pair.} \end{cases}$$

De sorte que, vu (18),

(19) $$F(s) = \prod_{\substack{t \text{ premier} \neq p \\ \beta_t \text{ pair}}} \left(\frac{(1 - t^{-s\beta_t/2})^2}{1 - t^{-s\beta_t}}\right)^{q/\beta_t}$$

Mais alors, d'après (13),

(20) $$L_\delta(s) = \zeta(s)(F(s))^{1/q}\, G(s) \ ,$$

où $G(s)$ est holomorphe sur le demi-plan ouvert $\sigma > \frac{1}{2}$ et borné sur le demi-plan fermé $\sigma \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$. En effet, $G(s)$ est un produit infini de puissances de facteurs $1/(1 - t^{-\beta_t s})$, où $\beta_t \geqslant 2$.

4° Rappelons maintenant quelques résultats concernant les séries de Dirichlet. Soit la série $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, où

(a) $\forall\, n\ ,\ a_n \geqslant 0$.

(b) $L(s)$ est holomorphe sur le demi-plan ouvert $\sigma > 1$.

(c) $L(s) = (\zeta(s))^{1-(1/q)}\, M(s)$,

avec $M(s)$ holomorphe sur le domaine $D(c\ ,\ \rho)$ défini par

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma > 1 - (c/(\log|\tau|)^{\rho})\ , & \text{pour } |\tau| \geqslant 3 \\ \sigma > 1 - (c/(\log 3)^{\rho})\ , & \text{pour } |\tau| \leqslant 3 \end{array}\right\} \quad (c\ ,\ \rho > 0)\ .$$

(d) Sur $D(c\ ,\ \rho)$, lorsque $|\tau| \longrightarrow \infty$, $M(s) = O((\log|\tau| + 3)^{\gamma})$, avec $\gamma > 0$.

Alors,

(21) $$\sum_{n=1}^{x} a_n \simeq \frac{x M(1)}{\Gamma(1 - (1/q))(\log x)^{1/q}} \quad \text{(cf. [4])}.$$

En outre, si $\chi(n)$ est un caractère de Dirichlet modulo p distinct du caractère principal, il existe des constantes positives γ_1, γ_2, c_1, c_2 telles que pour tout s dans $D(c\ ,\ \rho)$,

(22) $$c_1(\log|\tau| + 3)^{-\gamma_1} \leqslant |L_\chi(s)| \leqslant c_2(\log|\tau| + 3)^{\gamma_2}\ .$$

Ce résultat est dû, dans le cas où $|\tau| \leqslant 3$ à E. LANDAU [2]. Il y prend $\rho = 7$, $\gamma_1 = 5$, $\gamma_2 = 1$. (22) s'en déduit facilement.

De (22) et de (20), on déduit que $L_{\delta(s)}$ vérifie les hypothèses de (21) pour des constantes positives c, γ, ρ convenables. En effet, la contribution des séries L, associées au caractère principal modulo p, c'est-à-dire à

$$\chi(n) = \begin{cases} 1\ , & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod p \\ 0\ , & \text{si } n \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

dans (17), est $(1 - p^{-s})^{-1}(\zeta(s))^{-1}$. On en tire (2), avec

(23) $$C_1 = \frac{M(1)}{\Gamma(1 - (1/q))}\ .$$

En outre, en rassemblant (13), (19) et (20), on obtient

$$G(1) = \Big(\prod_{\substack{t \text{ premier} \neq p \\ \beta_t > 2}} \frac{1 - p^{1-\beta_t}}{1 - p^{-\beta_t}}\Big)\Big(\prod_{\substack{t \text{ premier} \neq p \\ \beta_t > 2, \beta_t \text{ pair}}} \Big(\frac{1 + t^{-\frac{1}{2}\beta_t}}{1 - t^{-\frac{1}{2}\beta_t}}\Big)^{1/\beta_t}\Big)\Big(\prod_{\substack{t \text{ premier} \neq p \\ \beta_t = 2}} \Big(1 - \frac{1}{t^2}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big).$$

D'autre part, vu(20),

$$M(1) = G(1) \lim_{s \downarrow 1} (\zeta(s)(F(s))^{1/q} ,$$

c'est-à-dire, d'après (17)

$$M(1) = \frac{G(1)}{(1 - p^{-1})^{1/q}} \left(\frac{\prod_{j=1}^{q-1} L_{\chi^j}(1)}{\prod_{j=1}^{(q/2)-1} L_{\chi^{2j}}(1)} \right)^{1/q} \tag{24}$$

(23) et (24) permettent enfin le calcul de C_1 .

BIBLIOGRAPHIE

On trouvera des résultats concernant des fonctions multiplicatives plus générales dans [3]. Voir aussi [1].

[1] DELANGE (H.). - Généralisation du théorème de Ikehara, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 71, 1954, p. 213-242.

[2] LANDAU (E.). - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Bände 1 und 2. - Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909.

[3] SCOURFIELD (E. J.). - Non-divisibility of some multiplicative functions, Acta Arithm., Warszawa, t. 22, 1973, p. 287-314.

[4] WATSON (G. N.). - Über Ramanujansche Kongruenzeigenschaften der Zerfällungsanzahlen, I, Math. Z., t. 39, 1935, p. 712-731.

(Texte reçu le 21 novembre 1977)

Christian RADOUX
Faculté des Sciences
Université de l'Etat à Mons
15 avenue Maistriau
B-7000 MONS (Belgique)