Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

SERGE LANG

Classes d'idéaux et classes de diviseurs

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1976-1977), exp. nº 28, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A9_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° 28, 9 p.
6 juin 1977

CLASSES D'IDÉAUX ET CLASSES DE DIVISEURS

par Serge LANG

Cet exposé représente un travail en commun avec D. KUBERT.

La théorie classique des corps cyclotomiques (KUMMER, EISENSTEIN, STICKELBERGER) bénéficie depuis quelques années de points de vue qui ont grandement augmenté sa portée.

1° Les travaux de LEOPOLDT et IWASAWA sur les corps cyclotomiques eux-mêmes, les classes d'idéaux et les unités.

2° Les travaux de NOVIKOV, ROBERT, COATES-WILES dans le cas analogue des corps quadratiques imaginaires et de la multiplication complexe.

3° Les travaux de COATES et COATES-SINNOTT dans le cas analogue de la K-théorie, visant aux conjectures de BIRCH-TATE et LICHTENBAUM.

4° La série KUBERT-LANG sur les classes de diviseurs à l'infini et les unités des corps de fonctions modulaires.

5° Le théorème de RIBET, démontrant la réciproque du théorème d'Herbrand reliant l'existence de classes d'idéaux d'ordre p et la p-divisibilité des nombres de Bernoulli.

6° L'analyse par SERRE des propriétés de congruences du terme constant dans le q-développement des formes modulaires (comprenant en particulier les nombres de Bernoulli pour le cas le plus classique).

7° Le lien entre certains éléments d'anneaux d'entiers cyclotomiques et endomorphismes de variétés abéliennes ou jacobiennes, en particulier de courbes de Fermat ou de courbes modulaires.

Il semble que les progrès en cours dépendent de plus en plus des relations étroites entre le cas cyclotomique classique et la géométrie algébrique. En outre, certains aspects entièrement algébriques ont été mis en évidence, indépendamment de leurs applications arithmétiques. Nous nous proposons d'en décrire quelques uns. Dans une certaine mesure, des problèmes classiques et contemporains consistent à remplir les cases vides de la table suivante, i. e. dans chaque cas, décrire les objets de la colonne de gauche.

	Cyclotomique	Fermat	Modulaire	Dim $\geqslant 2$
Classes de diviseurs, Structure galoisienne				
Indice de Stickelberger				
Unités				
Unités spéciales				
Correspondance				

Les unités spéciales sont les unités cyclotomiques, modulaires, elliptiques, unités de Stark (conjecturalement, voir [St]), constituant un groupe distingué dont le groupe facteur dans toutes les unités est fort intéressant.

Dans chaque cas, on analyse une situation où un groupe Γ, essentiellement de Cartan, opère sur un module X, qui est alors un module sur l'anneau du groupe $\mathbb{Z}[\Gamma]$. On conjecture, ou on démontre, que X est cyclique sur l'anneau du groupe, et même que Γ opère de façon simplement transitive sur des générateurs de X. On obtient alors un homomorphisme

$$\mathbb{Z}[\Gamma] \longrightarrow X ,$$

dont le noyau est appelé <u>idéal de Stickelberger</u>, et dont on essaie de déterminer la structure exacte, y compris par exemple l'indice dans $\mathbb{Z}[\Gamma]$. Ce schéma général doit bien entendu être précisé. On peut prendre $\mathbb{Z}_p$ au lieu de $\mathbb{Z}$, ou bien aussi une extension (non ramifiée si possible) de $\mathbb{Z}_p$ qui permet d'effectuer une décomposition par rapport aux caractères de Γ.

Enfin, on n'a pas seulement qu'un seul groupe Γ, mais on se place dans une tour de Galois, avec une limite projective de groupes

$$\Gamma = \lim \Gamma_n ,$$

avec une théorie pour chaque étage, et des théorèmes portant sur la limite, en partie résumant des propriétés valables en chaque étage, mais allant aussi au delà, dans l'algèbre limite dite d'Iwasawa,

$$\Lambda = \lim \mathbb{Z}(p^n) [\Gamma_n] ,$$

qui est voisine d'une algèbre de séries formelles $\mathbb{Z}_p[[T_1 , \dots , T_s]]$, avec $s = 1$ dans le cas le plus classique.

Nous toucherons ici surtout ce qui a trait aux diviseurs, laissant de côté les unités, théorie de Kummer, etc.

Nous allons maintenant donner des exemples concrets.

1. Idéaux de Stickelberger.

Commençons par un aspect purement algébrique. Soit k un entier $\geqslant 1$, p un nombre premier qu'on prendra impair pour simplifier. On pose $N = p^n$. Soit

$$G \cong \underset{\sim}{Z}(N)^* \quad \text{si } k \text{ est impair et } G \cong \underset{\sim}{Z}(N)^*/\pm 1 \quad \text{si } k \text{ est pair.}$$

On écrit les éléments de G comme σ_a, $a \in \underset{\sim}{Z}(N)^*$ où $\underset{\sim}{Z}(N)^*/\pm 1$,

$$R = \underset{\sim}{Z}[G] \quad \text{et} \quad R_p = \underset{\sim}{Z}_p[G] ,$$

$\deg : R \longrightarrow \underset{\sim}{Z}$ le degré, c'est-à-dire l'homomorphisme d'augmentation qui envoie un élément sur la somme de ses coefficients.

$$\underset{\sim}{B}_k(X) = k\text{-ième polynôme de Bernoulli.}$$

Par exemple,

$$\underset{\sim}{B}_1(X) = X - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{B}_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6} ;$$

$$\theta_k(N) = N^{k-1} \sum_{a\in G} \frac{1}{k} \underset{\sim}{B}_k(\langle\tfrac{a}{N}\rangle)\, \sigma_a^{-1} ;$$

$$\theta'_k(N) = N^{k-1} \sum_{a\in G} \frac{1}{k} \underset{\sim}{B}'_k(\langle\tfrac{a}{N}\rangle)\, \sigma_a^{-1} ;$$

La notation $\langle\frac{a}{N}\rangle$ signifie le plus petit nombre rationnel $\geqslant 0$ dans la classe de $a/N \bmod \underset{\sim}{Z}$. On a posé $\underset{\sim}{B}'_k(X) = \underset{\sim}{B}_k(X) - \underset{\sim}{B}_k(0)$.

Pour tout caractère χ de G, on a $\chi(\theta) = \frac{1}{k} \underset{\sim}{B}_{k,\chi}$ (définition des nombres de Bernoulli généralisés de Leopoldt).

$I^{(k)}(N)$ = idéal de R engendré par les éléments $\sigma_c - c^k$ avec les entiers c premiers à N. De même, $I_p^{(k)}(N)$ = idéal de R_p engendré par ces mêmes éléments.

THÉORÈME 1. 1.

(i) On a $R\theta'_k \cap R = I^{(k)}\,\theta'_k$. En fait, si un élément ξ de R est tel que $\xi\theta' \in R$, alors $\xi \in I^{(k)}$.

(ii) On a $R_p\,\theta_k \cap R_p = I_p^{(k)}\,\theta_k$. En fait, si un élément $\xi \in R_p$ est tel que $\xi\theta \in R_p$, alors $\xi \in I_p^{(k)}$.

Pour $k = 1$, ce théorème est essentiellement dû à IWASAWA [Iw 7]. Pour $k > 1$, le fait que $I^{(k)}$ intégralise θ_k (c'est-à-dire l'inclusion $I^{(k)}\,\theta_k \subset R$), est dû **essentiellement** à MAZUR et COATES-SINNOTT (voir [L3], Chapitre XIII, § 2, formule E2, et [C-S 1], [C-S 2]). La réciproque se trouve dans KUBERT-LANG [K-L 8]. On écrit

$$\xi = \sum z(b)\, \sigma_b \quad \text{avec} \quad z(b) \in \underset{\sim}{Z} \quad \text{ou} \quad \underset{\sim}{Z}_p ,$$

puis

$$\xi\theta' = N^{k-1} \sum_c \sum_b z(b)\, \frac{1}{k}\, B'_k(\langle\tfrac{bc}{N}\rangle)\, \sigma_c^{-1} ,$$

d'où l'on conclut que

$$\frac{N^{k-1}}{k} \sum_b z(b)\, B'_k(\langle\tfrac{b}{N}\rangle) \quad \text{est} \quad p\text{-intégral.}$$

En regardant une formule élémentaire pour les polynômes de Bernoulli semblable à la formule du binôme, et en regardant le terme dominant (le premier terme), on trouve les conditions qui permettent d'affirmer que ξ est dans $I^{(k)}$ ou $I_p^{(k)}$ selon le cas.

Soit R_0 l'idéal d'augmentation dans R , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de degré 0 . Soit t le plus grand entier tel que

$$k \equiv 0 \mod \varphi(p^t) ,$$

où φ est la fonction d'Euler.

THÉORÈME 1. 2.

(i) Si k est pair, on a

$$(R_0 : R_0 \cap R\theta) = Np^{\operatorname{ord}_p k - t} \prod_{\chi \neq 1} -\frac{1}{k} B_{k,\chi} ,$$

(ii) Si k est impair, on a

$$(R^- : R\theta \cap R) = Np^{\operatorname{ord}_p k} \prod_{\chi \text{ impair}} -\frac{1}{2k} B_{k,\chi} .$$

Pour $k = 1$, le théorème est dû à IWASAWA [Iw 7]. Pour $k > 1$, il se trouve dans KUBERT-LANG [K-L 8]. On a noté R^- le sous-module de R qui est l'espace de valeur propre -1 pour σ_{-1} .

L'intersection $R_0 \cap R\theta$ ou $R\theta \cap R$ est l'idéal de Stickelberger, noté $\mathcal{S}_k$ ou $\mathcal{S}_k(N)$.

On notera que pour $k = 1$, SINNOTT [Si] a donné une formule pour l'indice de l'idéal de Stickelberger également dans le cas où N est composé, c'est-à-dire n'est pas nécessairement la puissance d'un nombre premier.

2. Applications.

La première application, la plus classique, est celle du cas $k = 1$. La factorisation de sommes de Gauss (Cf. par exemple [L 1], Chapitre IV, ou [L 4], chapitre I) montre que certains idéaux sont principaux, et l'on tire :

Soit $K = \mathbb{Q}(\mu_N)$ et $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Alors l'idéal de Stickelberger avec $k = 1$ annule $\mathrm{Cl}(K)$ (groupe des classes d'idéaux de K).

La conjecture d'Iwasawa-Leopoldt [Iw 7], [Le 10] dit que $\mathrm{Cl}(K)$ est engendré par un seul élément sur l'anneau du groupe $\mathbb{Z}[G]$, et donc qu'on doit avoir un isomorphisme :

$$\mathbb{Z}[G]^- \approx C_K^- .$$

La conjecture de Kummer dit que $C_K^{+,(p)} = 0$.

Pour $k = 2$, COATES et SINNOTT [C-S 2] montrent que l'idéal de Stickelberger $\mathcal{S}_2$ annule $K_2\, \mathfrak{o}$, où $\mathfrak{o}$ est l'anneau des entiers dans le corps cyclotomique réel.

Pour $k = 2$, KUBERT et LANG [K-L 7] montrent que l'on a un isomorphisme de $R_0/\mathcal{S}_2$ avec un groupe de classes de diviseurs à l'infini (cuspidaux) sur la courbe modulaire $X_1(N)$.

Ceci conduit à penser que, dans le cas traité par COATES-SINNOTT, on a également un isomorphisme, c'est-à-dire que $K_2\,\mathfrak{o}$ est cyclique sur l'anneau du groupe.

Dans les deux cas précédents, on a $G \cong \underset{\sim}{Z}(N)^*/\pm 1$. Pour traiter des classes de diviseurs cuspidaux sur la courbe modulaire $X(N)$ (et pas seulement $X_1(N)$), il faut considérer un groupe de Cartan $C(N)/\pm 1$, avec $C(p^n)$ = unités dans l'extension non ramifiée de degré 2 sur $\underset{\sim}{Z}_p$ mod p^n (Voir [K-L 2], [K-L 6], [K-L 7]).

Pour $k > 2$, l'identification du module facteur par l'idéal de Stickelberger avec un objet associé aux domaines bornés symétriques reste à faire.

3. Twistings.

On devrait dire "torsion", mais comme on sait, le mot en français a été employé pour désigner des éléments d'ordre fini dans des groupes. On se servira donc du mot anglais, prière de ne pas prévenir le ministre de la langue française !

COATES et SINNOTT, dans le papier déjà cité, montrent que l'idéal de Stickelberger avec $k = 2$ annule $K_2\,\mathfrak{o}$ en établissant un isomorphisme de $K_2\,\mathfrak{o}$ avec un twist du groupe des classes d'idéaux dans le cas cyclotomique.

On peut extraire une discussion algébrique générale qui illumine la situation, comme suit, sans référence à la K-théorie.

On pose encore $N = p^n$ avec p premier, mais on permet $p = 2$ ici. On pose

$$G_n = \underset{\sim}{Z}(p^n)^* .$$

Pour c premier à p , posons maintenant

$$\theta_{k,c}(p^n) = \sigma_c^{-1}(\sigma_c - c^k)\ \theta_k(p^n) \in \underset{\sim}{Z}(p^n)\,[G_n] ,$$

donc nous considérons l'élément de Stickelberger (modifié par c) comme ayant ses coefficients dans $\underset{\sim}{Z}(p^n)$.

Soit V un $\underset{\sim}{Z}(p^n)\,[G_n]$-module. On définit son twist comme étant le produit tensoriel avec les racines de l'unité

$$V(1) = V \otimes \mu_N .$$

Alors un élément σ dans G opère diagonalement,

$$\sigma(v \otimes \gamma) = \sigma v \otimes \sigma\gamma \quad \text{et} \quad \sigma_a(v \otimes \gamma) = a(\sigma_a\, v \otimes \gamma) .$$

Comme conséquence des définitions, on obtient la formule

$$\theta_{k,c}(v \otimes \gamma) = \theta_{k-1,c}\, v \otimes \gamma ,$$

voir la formule $\underset{\sim}{E2}$ de [L3], Chapitre XIII, due à MAZUR, suivant les travaux d'IWASAWA.

En particulier, si $\theta_{k-1,c}$ annule V , alors $\theta_{k,c}$ annule $V(1)$.

L'argument extrait dans un contexte général celui donné par COATES-SINNOTT dans le cas des classes d'idéaux et de la K-théorie.

Prenons $V = \underset{\sim}{Z}(p^n)\,[G_n]$, soit γ un générateur de μ_N , de sorte que $\sigma_1 \otimes \gamma$ est un générateur de V sur l'anneau du groupe.

L'application $\xi \longmapsto \xi(\sigma_1 \otimes \gamma)$ donne un isomorphisme

$$\underset{\sim}{Z}(p^n)\,[G_n] \longrightarrow \underset{\sim}{Z}(p^n)\,[G_n] \otimes \mu_{p^n} .$$

Soit $\mathcal{S}_k(p^n)$ = idéal de $\underset{\sim}{Z}(p^n)\,[G_n]$ engendré par les éléments $\theta_{k,c}(p^n)$. Alors l'isomorphisme ci-dessus induit une bijection

$$\mathcal{S}_k(p^n) \longrightarrow \mathcal{S}_{k-1}(p^n) \otimes \mu_{p^n} .$$

Donc on trouve un isomorphisme

$$\Lambda_n/\mathcal{S}_k(p^n) \longrightarrow \Lambda_n(1)/\mathcal{S}_{k-1}(p^n) \otimes \mu_{p^n} ,$$

où l'on a posé $\Lambda_n = \underset{\sim}{Z}(p^n)\,[G_n]$.

On peut alors passer à la limite projective. La limite des Λ_n est l'algèbre d'Iwasawa, isomorphe à $\underset{\sim}{Z}_p[[T]]$.

Si $\mathcal{S}_k$ est l'idéal engendré par les éléments $\theta_{k,c}$ limites de $\theta_{k,c}(p^n)$, on obtient un isomorphisme

$$\Lambda/\mathcal{S}_k \longrightarrow \Lambda(1)/\mathcal{S}_{k-1}(1) .$$

Cet isomorphisme permute les espaces propres pour l'action de μ_{p-1} .

Les conjectures de KUMMER et IWASAWA-LEOPOLDT dans le cas cyclotomique permettraient d'identifier la situation de la limite projective des classes d'idéaux avec la situation "générique" décrite ci-dessus (Voir [Le 10] et [KL 9]).

Dans le cas de la tour modulaire, on sait le faire puisque la série [K-L] donne des réponses précises aux questions de la structure du groupe des unités et des classes de diviseurs cuspidaux.

4. Correspondances.

Pour terminer, notons que la ligne du bas dans la table "correspondance", en fait doit se placer dans l'espace à trois dimensions, car il s'agit d'établir des relations entre les objets associés à chaque cas (cyclotomique, modulaire, Fermat) ou bien par spécialisation allant du cas de la géométrie algébrique dans le cas du corps de nombres, ou bien en remontant le corps de nombres dans le cas de la géométrie algébrique.

Pour la courbe de Fermat, voir ROHRLICH [Roh] pour la détermination de la structure du groupe des classes de diviseurs engendrés par les points à l'infini. Contrairement au cas modulaire ou cyclotomique, où le premier étage a un groupe d'ordre premier à p (d'ordre $p - 1$ ou $(p^2 - 1)/2$), le groupe pour la courbe de

Fermat de niveau p est d'ordre p^3. C'est le groupe d'automorphismes évident par les p-ièmes racines de l'unité, de la courbe projective

$$x^p + y^p + z^p = 0 .$$

BIBLIOGRAPHY

[Co 1] COATES (J.). - On K_2 and some classical conjectures in algebraic number theory, Annals of Math., t. 95, 1972, p. 99-116.

[Co 2] COATES (J.). - K-theory and Iwasawa's analogue of the jacobian, "Algebraic K-theory, II", p. 502-520. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 342).

[Co 3] COATES (J.). - p-adic L-functions and Iwasawa's theory, "Conference on algebraic number theory and class field theory" [1976. Tokyo].

[Co 4] COATES (J.). - Fonctions zéta partielles d'un corps de nombres totalement réel, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° 1, 9 p.

[C - L] COATES (J.) and LICHTENBAUM (S.). - On ℓ-adic zeta functions, Annals of Math., t. 98, 1973, p. 498-550.

[C-S 1] COATES (J.) and SINNOTT (W.). - On p-adic L-functions over real quadratic fields, Invent. Math., Berlin, t. 25, 1974, p. 253-279.

[C-S 2] COATES (J.) and SINNOTT (W.). - An analogue of Stickelberger's theorem for higher K-groups, Invent. Math., Berlin, t. 24, 1974, p. 149-161.

[C-S 3] COATES (J.) and SINNOTT (W.). - Integrality properties of the values of partial zeta functions, Proc. London math. Soc., t. 34, 1977, p. 365-384.

[C-W 1] COATES (J.) and WILES (A.). - Explicit reciprocity laws, "Journées arithmétiques de Caen [1976. Caen]", Astérisque, 1977, p. 7.

[C-W 2] COATES (J.) and WILES (A.). - On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math., Berlin, t. 39, 1977, p. 223-251.

[C-W 3] COATES (J.) and WILES (A.). - Kummer's criterion for Hurwitz numbers (à paraître).

[Iw 1] IWASAWA (K.). - On Γ-extensions of algebraic number fields, Bull. Amer. math. Soc., t. 65, 1959, p. 183-226.

[Iw 2] IWASAWA (K.). - A note on the group of units of an algebraic number field, J. Math. pures et appl., t. 35, 1956, p. 189-192.

[Iw 3] IWASAWA (K.). - Sheaves for algebraic number fields, Annals of Math., t. 69, 1959, p. 408-413.

[Iw 4] IWASAWA (K.). - On some properties of Γ-finite modules, Annals of Math., t. 70, 1959, p. 291-312.

[Iw 5] IWASAWA (K.). - On the theory of cyclotomic fields, Annals of Math., t. 70, 1959, p. 530-561.

[Iw 6] IWASAWA (K.). - On some invariants of cyclotomic fields, Amer. J. Math., t. 80, 1958, p. 773-783.

[Iw 7] IWASAWA (K.). - A class number formula for cyclotomic fields, Annals of Math., t. 76, 1962, p. 171-179.

[Iw 8] IWASAWA (K.). - On some modules in the theory of cyclotomic fields, J. Math. Soc. Japan, t. 16, 1964, p. 42-82.

[Iw 9] IWASAWA (K.). - Some results in the theory of cyclotomic fields, "Theory of numbers", p. 66-69. - Providence, American mathematical Society, 1965 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 8).

[Iw 10] IWASAWA (K.). - On explicit formulas for the norm residue symbol, J. Math. Soc. Japan, t. 20, 1968, p. 151-165.

[Iw 11] IWASAWA (K.). - On p-adic L-functions, Annals of Math., t. 89, 1969, p. 198-205.

[Iw 12] IWASAWA (K.). - On Z_ℓ-extensions of algebraic number fields, Annals of Math., t. 98, 1973, p. 246-326.

[Iw 13] IWASAWA (K.). - A note on cyclotomic fields, Invent. Math., Berlin, t. 36, 1976, p. 115-123.

[Iw 14] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L-functions. - Princeton, Princeton University Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 74).

[KL 1] KUBERT (D.) and LANG (S.).- Units in the modular function field, I, Math. Annalen, t. 218, 1975, p. 67-96.

[KL 2] KUBERT (D.) and LANG (S.). - Units in the modular function field, II, Math. Annalen, t. 218, 1975, p. 175-189.

[KL 3] KUBERT (D.) and LANG (S.). - Units in the modular function field, III, Math. Annalen, t. 218, 1975, p. 273-285.

[KL 4] KUBERT (D.) and LANG (S.). - Units in the modular function field, IV, Math. Annalen, t. 227, 1977, p. 223-242.

[KL 5] KUBERT (D.) and LANG (S.). - Distributions on toroidal groups, Math. Z., t. 148, 1976, p. 33-51.

[KL 6] KUBERT (D.) and LANG (S.). - The p-primary component of the cuspidal divisor class group on the modular curve X(p) , Math. Annalen (à paraître).

[KL 7] KUBERT (D.) and LANG (S.). - The index of Stickelberger ideals of order 2 and cuspidal class numbers (à paraître).

[KL 8] KUBERT (D.) and LANG (S.). - Stickelberger ideals (à paraître).

[KL 9] KUBERT (D.) and LANG (S.). - Iwasawa theory in the modular tower (à paraître).

[Ku-L] KUBOTA (T.) and LEOPOLDT (H.). - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, J. für reine und angew. Math., t. 214/215, 1964, p. 328-339.

[L 1] LANG (S.). - Algebraic numbet theory. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1970.

[L 2] LANG (S.). - Elliptic functions. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1973.

[L 3] LANG (S.). - Introduction to modular forms. - Berlin, Springer-Verlag, 1976 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 222).

[L 4] LANG (S.). - Introduction to cyclotomic fields (à paraître).

[Le 1] LEOPOLDT (H. W.). - Zur Geschlechtertheorie in abelschen Zahlkörpern, Math. Nach., t. 9, 1953, p. 351-362.

[Le 2] LEOPOLDT (H. W.). - Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller Zahlkörper, Abh. Deutschen Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math., 1953, n° 2, 48 p.

[Le 3] LEOPOLDT (H. W.). - Über ein Fundamentalproblem der Theorie der Einheiten algebraischer Zahlkörper, Sitzungsb. bayerischen Akademie Wiss., 1956, p. 41-48.

[Le 4] LEOPOLDT (H. W.). - Eine Verallgemeinorung der Bernoullischen Zahlen, Abh. Math. Sem. Hamburg, t. 22, 1958, p. 131-140.

[Le 5] LEOPOLDT (H. W.). - Zur Struktur der ℓ-Klassengruppe galoisscher Zahlkörper, J. für reine und angew. Math., t. 199, 1958, p. 165-174.

[Le 6] LEOPOLDT (H. W.). - Über Klassenzahlprimteiler reeller abelscher Zahlkörper ..., Abh. Math. Sem. Hamburg, t. 23, 1959, p. 36- 47.

[Le 7] LEOPOLDT (H. W.). - Über die Hauptordnung der ganzen Elemente eines abelschen Zahlkörpers, J. für reine und angew. Math., t. 201, 1959,

p. 119-149.

[Le 8] LEOPOLDT (H. W.). - Über Fermatquotienten von Kreiseinheiten und Klassenzahlformeln modulo p, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 9, 1960, p. 39-50.

[Le 9] LEOPOLDT (H. W.). - Zur Approximation des p-adischen Logarithmus, Abh. Math. Sem. Hamburg, t. 25, 1961, p. 77-81.

[Le 10] LEOPOLDT (H. W.). - Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern, J. für reine und angew. Math., t. 209, 1962, p. 54-71.

[Li] LICHTENBAUM (S.). - Values of zeta functions, etale cohomology, and algebraic K-theory, "Algebraic K-theory, II", p. 489-501. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 342).

[Lu] LUBIN (J.). - One parameter formal Lie groups over p-adic integer rings, Annals of Math., t. 80, 1964, p. 464-484.

[L-T] LUBIN (J.) and TATE (J.). - Formal complex multiplication in local fields, Annals of Math., t. 8, 1965, p. 380-387.

[No] NOVIKOV (A. P.). - Sur le nombre de classes des extensions abéliennes d'un corps quadratique imaginaire [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., t. 31, 1967, p. 717-726.

[Mi] MILNOR (J.). - Introduction to algebraic K-theory. - Princeton, Princeton University Press, 1971 (Annals of Mathematics Studies, 72).

[Qu 1] QUILLEN (D.). - Finite generation of the groups K_i of rings of algebraic integers, "Algebraic K-theory, I", p. 179-198. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 341).

[Qu 2] QUILLEN (D.). - Higher algebraic K-theory I, "Algebraic K-theory, I", p. 85-147. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 341).

[Ri] RIBET (K.). - A modular construction of unramified p-extensions of $\underset{\sim}{Q}(\mu_p)$, Invent. Math., Berlin, t. 34, 1976, p. 151-162.

[Rob] ROBERT (G.). - Nombres de Hurwitz et unités elliptiques (à paraître).

[Roh] ROHRLICH (D.). - Modular functions and the Fermat curve, Invent. Math., Berlin, 1977 (à paraître).

[Se 1] SERRE (J.-P.). - Classes des corps cyclotomiques, d'après Iwasawa, Séminaire Bourbaki, 11e année, 1958/59, n° 174, 11 p.

[Se 2] SERRE (J.-P.). - Formes modulaires et fonctions zeta p-adiques, "Modular functions of one variable, III", p. 191-268. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

[Si] SIEGEL (C. L.). - Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Göttingen Nachrichten, t. 3, 1970, p. 15-56.

[Si] SINNOTT (W.). - The index of the Stickelberger ideal (à paraître).

[St] STARK (H.). - L-functions at $s = 1$, III : Totally real fields and Hilbert's twelfth problem (à paraître).

[Ta 1] TATE (J.). - Letter to Iwasawa on a relation between K_2 and Galois cohomology, "Algebraic K-theory, II", p. 524-527. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 342).

[Ta 2] TATE (J.). - Relations between K_2 and Galois cohomology, Invent. Math., Berlin, t. 36, 1976, p. 257-274.

[Ta 3] TATE (J.). - Symbols in arithmetic, "Actes du Congrès international des Mathématiciens [1970. Nice]", Tome 1, p. 201-211. - Paris, Gauthier-Villars, 1971.

(Texte reçu le 2 mai 1977)

Serge LANG
Department of Mathematics
Yale University
Box 2155 Yale Station
NEW HAVEN, Conn. 06520 (Etats-Unis)