JEAN-LOUP MAUCLAIRE

Sur certaines fonctions arithmétiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1976-1977), exp. nº 26, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° 26, 7 p.
16 mai 1977

SUR CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Jean-Loup MAUCLAIRE

On appelle fonction additive une application $f : \underset{\sim}{N}^* \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ telle que $f(mn) = f(m) + f(n)$ lorsque $(m , n) = 1$; si $f(mn) = f(m) + f(n)$ quels que soient m et n, f est dite "complètement additive".

I

P. ERDÖS a démontré que, si f est additive, et si $\{f(n)\}$ est une suite croissante, alors $f(n) = c \log n$ (voir [1]).

On peut étendre ce résultat de la façon suivante :

THÉORÈME I. - Si f est additive, s'il existe a et b entiers tels que $(a , b) = 1$ et que $\{f(an + b)\}$, $n \in \underset{\sim}{N}^*$ soit une suite croissante, alors il existe c tel que $f(n) = c \log n$ pour $(n , a) = 1$.

Remarquons que la condition $(a , b) = 1$ n'est introduite que pour simplifier l'énoncé du théorème (à ce sujet, voir [2], p. 6).

Preuve du théorème I. - L'outil essentiel sera le résultat suivant ([3], § 5, p. 47, Théorème 2.1) :

(R) Si $x , y , z \in \underset{\sim}{N}^* - \{1\}$, et si (x , y , z) sont multiplicativement indépendants, si f est une fonction telle que

$$f(x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}) = f(x^{\alpha_1}) + f(y^{\alpha_2}) + f(z^{\alpha_3}) , \quad \text{où} \quad \alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 \in \underset{\sim}{N} ,$$

si f est croissante sur l'ensemble $\mathfrak{N} = \{n = x^k y^\ell z^m , \ k , \ell , m \in \underset{\sim}{N}\}$, alors $f(n) = c \log n$ quand $n \in \mathfrak{N}$.

On suppose $a \neq 1$ (le cas $a = 1$ a été traité par I. KATAÏ dans [4]).

1° On démontre que si $(a , n_1) = 1$, $f(n_1^{\varphi(a)}) = \varphi(a) f(n_1)$, où φ est l'indicateur d'Euler.

En effet, soient $p_1 , \ldots , p_{\varphi(a)}$, $\varphi(a)$ nombres premiers distincts tels que

$$p_i \, n_1 \equiv 1 \mod a , \quad 1 < i \leq \varphi(a) ,$$

et n_2 , n_3 , n_4 trois entiers premiers avec n_1 , avec $p_1 , p_2 , \ldots , p_{\varphi(a)}$ premiers entre eux deux à deux, et tels que

$$n_2 \equiv 1 \mod a ,$$
$$n_3 \equiv 1 \mod a ,$$
$$n_4 \equiv b \mod a .$$

La fonction $f(.\, n_4) - f(n_4)$ est croissante sur $\{(n_1 p_i)^{\alpha_1}\, n_2^{\alpha_2}\, n_3^{\alpha_3},\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \underset{\sim}{N})\}$, et égale $f(.)$ sur cet ensemble.

On applique R , et l'on a

$$f(n_1\, p_i) = c \log(n_1\, p_i) \ , \quad (1 \leqslant i \leqslant \varphi(a)) \ , \text{ avec } \ c = \frac{f(n_2)}{\log n_2} = \frac{f(n_3)}{\log n_3} \ .$$

On en déduit

$$\varphi(a)\, f(n_1) + f(\prod_{i=1}^{\varphi(a)} p_i) = \varphi(a)\, c \log n_1 + c \log(\prod_{i=1}^{\varphi(a)} p_i) \ .$$

De même, $f(.\, n_4) - f(n_4)$ est croissante sur

$$\{(p_1 \times \dots \times p_{\varphi(a)})^{\alpha_1}\, n_2^{\alpha_2}\, n_3^{\alpha_3}\} \ ,$$

d'où, par R ,

$$f(\prod_{i=1}^{\varphi(a)} p_i) = c \log(\prod_{i=1}^{\varphi(a)} p_i) \ .$$

Enfin, $f(.\, n_4) - f(n_4)$ est croissante sur $\{(n_1^{\varphi(a)})^{\alpha_1}\, n_2^{\alpha_2}\, n_3^{\alpha_3}\}$. On obtient, par R ,

$$f(n_1^{\varphi(a)}) = \varphi(a)\, c \log n_1 \ ,$$

d'où $f(n_1^{\varphi(a)}) = \varphi(a)\, f(n_1)$.

2° Si $m \leqslant n$, $(mn\, , a) = 1$, $f(m) \leqslant f(n)$.

En effet, soit $\ell \equiv b \mod a$, $(\ell\, , mn) = 1$. On a

$$f(m^{\varphi(a)}\, \ell) \leqslant f(n^{\varphi(a)}\, \ell) \ .$$

D'où

$$f(m^{\varphi(a)}) \leqslant f(n^{\varphi(a)}) \ ,$$

et d'après le 1°,

$$f(m) \leqslant f(n) \ .$$

3° D'après le 2°, f est croissante sur $\{p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \dots ,\ p_i$ premier, $p_i \nmid a\}$; d'après (R), on a $f(n) = c \log n$ sur cet ensemble, ce qui établit le résultat annoncé.

II

On doit à E. WIRSING le résultat suivant [4] :

Si f est complètement additive, et si $f(n+1) - f(n) = o(\log n)$,

$$f(n) = c \log n \ .$$

On peut le généraliser de la façon suivante :

THÉORÈME II. - Si f et g sont complètement additives, s'il existe a , b , $(a\, , b) = 1$, tels que

$$f(an + b) - g(n) = o(\log n) \ ,$$

alors,

$$g(n) = c \log n$$

<u>et</u>

$$f(n) = c \log n \quad \underline{\text{pour}} \quad (n\,,\,a) = 1\,.$$

<u>Preuve</u>.

1° On a $f(an + b) - g(n) = o(\log n)$. On pose $b = \varepsilon|b|$, $\varepsilon = \pm 1$.

Alors, pour $n = |b|m$,

$$f((am + \varepsilon)|b|) - g(|b|m) = o(\log(|b|m))\,,$$

d'où

$$f(am + \varepsilon) - g(m) = o(\log m)\,.$$

2° On démontre

$$g((a + 1)n + \varepsilon) - g(n) = o(\log n)\,.$$

En effet, pour $m = (a + 1)n + \varepsilon$, on a

$$am + \varepsilon = a((a + 1)n + \varepsilon) + \varepsilon = (a + 1)(an + \varepsilon)\,.$$

Comme

$$f(am + \varepsilon) - g(m) = o(\log m)\,,$$

on a

$$(f(a + 1) + f(an + \varepsilon)) - g((a + 1)n + \varepsilon) = o(\log n)\,.$$

Or $f(an + \varepsilon) - g(n) = o(\log n)$, donc

$$g((a + 1)n + \varepsilon) - g(n) = o(\log n)\,.$$

3° On démontre que $g(n) = c \log n$.

On utilisera le fait que, si $g((a + 1)n + \varepsilon) - g(n) = o(\log n)$, alors $g(an + \varepsilon) - g(n) = o(\log n)$; c'est une conséquence du résultat suivant : si $g((a + 1)n + \varepsilon) - g(n) = o(\log n)$, alors $g((a + 1)n - \varepsilon) - g(n) = o(\log n)$.

Ce dernier résultat s'établit comme suit : si $\varepsilon = +1$, on a

$$g((a + 1)[(a + 1)^2 n^3] + 1) - g((a + 1)^2 n^3) = o(\log n)\,,$$

i. e. $g((a + 1)n + 1) + g((a + 1)^2 n^2 - (a + 1)n + 1) - 3g(n) = o(\log n)$. Mais

$$g((a + 1)n + 1) - g(n) = o(\log n)$$

et

$$g((a + 1)^2 n^2 - (a + 1)n + 1) = g[(a + 1)([a + 1)n - 1]n) + 1]$$
$$= g((a + 1)n - 1) + g(n) + o(\log n)\,,$$

d'où, par substitution,

$$g((a + 1)n - 1) - g(n) = o(\log n)\,.$$

Si $\varepsilon = -1$, on a

$$g((a + 1)((a + 1)n^2) - 1) - 2g(n) = o(\log n)\,,$$

i. e. $g((a+1)n+1) + g((a+1)n-1) - 2g(n) = o(\log n)$, et par conséquent, comme $g((a+1)n-1) = g(n) + o(\log n)$,

$$g((a+1)n+1) - g(n) = o(\log n) .$$

Ainsi, si $g((a+1)n+\varepsilon) - g(n) = o(\log n)$, on a simultanément

$$g((a+1)n-1) - g(n) = o(\log n) ,$$

et

$$g((a+1)n+1) - g(n) = o(\log n) .$$

Alors,

$$\begin{aligned} g((a+1)n+1) + g(a) &= g(a(a+1)n+a) \\ &= g((a+1)(an+1)-1) \\ &= g(an+1) + o(\log n) . \end{aligned}$$

Mais $g((a+1)n+1) + g(a) = g(n) + o(\log n)$; donc $g(an+1) - g(n) = o(\log n)$, et naturellement

$$g(an-1) - g(n) = o(\log n) .$$

En itérant, on obtient $g(n+1) - g(n) = o(\log n)$, et, par le résultat de WIRSING, précédemment cité, $g(n) = c \log n$.

4° Notre hypothèse devient

$$f(an+\varepsilon) - c \log n = o(\log n) .$$

Si $\varepsilon = -1$, on a $f(a^2 n^2 - 1) = 2c \log n + o(\log n)$; or,

$$f(a^2 n^2 - 1) = f(an+1) + f(an-1) = f(an+1) + c \log n + o(\log n) ;$$

donc $f(an+1) = c \log n + o(\log n)$.

On a donc, de toute façon, $f(an+1) = c \log n + o(\log n)$.

Soit alors m tel que $(m , a) = 1$; à tout $k \in \underset{\sim}{N}^*$, on associe $\rho(m,k) \in [1,a[$ tel que $m^k \rho(m , k) \equiv 1 \mod a$. Alors,

$$f(m^k \rho(m , k)) = c \log(m^k \rho(m , k)) + o(\log(m^k \rho(m , k))) ,$$

d'où

$$\frac{f(m^k)}{\log n^k} = c + o(1) , \quad (k \to +\infty) ,$$

et par conséquent $f(m) = c \log m$.

III

Pour terminer, mentionnons quelques résultats dont les démonstrations se trouvent dans [2] .

THÉORÈME III. 1. - α <u>étant un entier</u> $\geqslant 0$, <u>on désigne par</u> δ_α <u>la fonction additive définie de la façon suivante</u> :

$$\delta_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2 \mid n \\ 0 & \text{si } 2 \nmid n \end{cases}$$

pour $\alpha > 0$,

$$\delta_\alpha(n) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 2^{\alpha+1} \mid n \\ -1/2 & \text{si } 2^\alpha \| n \\ 0 & \text{si } 2^\alpha \nmid n . \end{cases}$$

Soient f et g deux fonctions additives. On suppose que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(an + \varepsilon b) - g(n) - \ell| = 0 ,$$

où $a , b \in \underset{\sim}{N}^*$, $(a , b) = 1$, $\varepsilon = \pm 1$ (fixé).

1° Cas où a est pair. - Il existe une fonction complètement additive g' satisfaisant à

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |g'(kn + \varepsilon) - g'(n) - g'(k)| = 0 \quad \text{pour tout } k \geqslant a ,$$

et une fonction additive h satisfaisant à

$$h(n) = h((n , b)) \quad \text{pour tout} \quad n \in \underset{\sim}{N}^* .$$

(i. e. $h(p^r) = 0$ si $r \geqslant 1$ et $p \nmid b$, et $h(p^r) = h(p^\alpha)$ si $r \geqslant \alpha$ et $p^\alpha \| b$, $a \geqslant 1$), telles que

$$g(n) = g'(n) + h(n) \quad \text{pour tout} \quad n \in \underset{\sim}{N}^* ,$$

et

$$f(n) = g'(n) + h(n) \quad \text{pour} \quad (n , a) = 1 ;$$

on a $\ell = g'(a)$.

2° Cas où a est impair. - b peut être pair ou impair. On suppose que $2^\alpha \| b$, $\alpha \geqslant 0$.

Il existe une fonction g' et une fonction h satisfaisant aux conditions indiquées plus haut, et une constante λ , telles que

$$g(n) = g'(n) + h(n) + \lambda\delta_\alpha(n) \quad \text{pour tout} \quad n \in \underset{\sim}{N}^* ,$$

et

$$f(n) = g'(n) + h(n) - \lambda\delta_\alpha(n) \quad \text{pour} \quad (n , a) = 1 .$$

On a

$$\lambda = 2g(2^{\alpha+1}) - g(2^{\alpha+2}) - g(2^\alpha) ,$$

$$\ell = g'(a) \quad \text{si } b \text{ est pair,}$$

$$\ell = g'(a) - \lambda \quad \text{si } b \text{ est impair.}$$

THÉORÈME III. 2. - *Si* f *et* g *sont deux fonctions additives, et si* $f(an + \varepsilon b) - g(n) = O(1)$, *où* $a , b \in \underset{\sim}{N}^*$, $(a , b) = 1$, $\varepsilon = \pm 1$ (*fixé*), *il existe* d *tel que*

$$g(n) - d \log n \quad \textit{est bornée sur} \quad \underset{\sim}{N}^* ,$$

et

$$f(n) - d \log n \quad \textit{est bornée sur l'ensemble des } n \textit{ tels que } (n , a) = 1 .$$

On remarquera que le théorème III.2 donne une condition nécessaire et suffisante pour que $f(an + \varepsilon b) - g(n) = O(1)$.

THÉORÈME III. 3. - Si les hypothèses du théorème III. 1 ont lieu avec $a = 1$, il existe c tel que $g'(n) = c \log n$.

La preuve est immédiate, moyennant que le théorème 1 soit établi. On a en effet

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} |g'(n + \varepsilon) - g'(n)| = 0 ,$$

et par un résultat de I. KATAÏ, on a $g'(n) = c \log n$.

THÉORÈME III. 4. - Soient f et g deux fonctions additives.

Etant donnés a et $b \in \underset{\sim}{N}^*$ avec $(a , b) = 1$, et $\varepsilon = \pm 1$ (fixé), on suppose que $f(an + \varepsilon b) - g(n)$ tend vers une limite finie ℓ quand n tend vers $+ \infty$.

1° Si a est pair, il existe une constante c et une fonction additive h satisfaisant à

$$h(n) = h((n , b)) \quad \text{pour tout} \quad n \in \underset{\sim}{N}^*$$

(autrement dit, telle que, si $p \nmid b$, $h(p^r) = 0$ pour tout $r \geqslant 1$, et, si $p^\alpha \| b$, avec $\alpha > 0$, $h(p^r) = h(p^\alpha)$ pour $r \geqslant \alpha$), telles que

$$g(n) = c \log n + h(n) \quad \text{pour tout} \quad n \in \underset{\sim}{N}^*$$

et

$$f(n) = c \log n + h(n) \quad \text{lorsque} \quad (n , a) = 1 .$$

2° Si a est impair, et $2^\alpha \| b$ avec $\alpha \geqslant 0$, il existe deux constantes c et λ , et une fonction h du type indiqué ci- dessus, telles que

$$g(n) = c \log n + h(n) + \lambda\delta_\alpha(n) \quad \text{pour tout} \quad n \in \underset{\sim}{N}^*$$

et

$$f(n) = c \log n + h(n) - \lambda\delta_\alpha(n) \quad \text{lorsque} \quad (n , a) = 1 ,$$

où δ_α est la fonction définie précédemment dans l'énoncé du théorème III. 1.

On a

$$\ell = c \log a \quad \text{dans le cas où } b \text{ est pair,}$$

$$\ell = c \log a - \lambda \quad \text{dans le cas où } b \text{ est impair.}$$

RÉFÉRENCES

[1] ERDÖS (P.). - On the distribution function of additive functions, Annals of Math., t. 47, 1946, p. 1-20.

[2] MAUCLAIRE (J.-L.). - Contribution à la théorie des fonctions additives, Publications mathématiques d'Orsay, n° 215-7665.

[3] PISOT (C.) et SCHOENBERG (I. J.). - Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation, Illinois J. of Math., t. 8, 1964, p. 40-56.

[4] WIRSING (E.). -- Additive number theoretic functions, "Journées sur la théorie additive des nombres" [1977. Bordeaux].

(Texte reçu le 5 septembre 1977)

Jean-Loup MAUCLAIRE
Mathématiques, Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
Campus universitaire
91405 ORSAY