Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Marc Laborde

Equirépartition des solutions du problème de Waring

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1976-1977), exp. nº 20, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° 20, 16 p.

21 mars 1977

EQUIRÉPARTITION DES SOLUTIONS DU PROBLÈME DE WARING

par Marc LABORDE

1. Introduction.

1.1. - On se propose d'étudier ici une extension intéressante du problème de Waring : il s'agit de montrer que l'on peut représenter tout entier assez grand comme somme de s puissances k-ièmes "presques proportionnelles" à des nombres fixés à l'avance.

Pour démontrer ce résultat, on utilisera, après une approche géométrique du problème, une variante de la méthode du cercle de Hardy-Littlewood-Vinogradov.

Ce problème a déjà été étudié par E. M. WRIGHT ([4], [5]) par deux méthodes différentes de celle proposée ici, et les résultats obtenus étaient différents de ceux que nous obtiendrons.

1.2. - Nous allons maintenant préciser les données du problème et nous ramener à des conditions équivalentes plus maniables.

Soit donc k un entier supérieur ou égal à 3, et s un entier tel que tout entier n assez grand puisse s'écrire comme somme de s puissances k-ièmes ; il existe $n_1, \ldots, n_s$ entiers tels que $n = |n_1|^k + \ldots + |n_s|^k$. En se plaçant dans l'espace vectoriel $\underset{\sim}{R}^s$, muni de la norme L^k : si $x = (x_1, \ldots, x_s)$,

$$N(x) = (|x_1|^k + \ldots + |x_s|^k)^{1/k},$$

ceci veut dire que le point de coordonnées $\frac{n_1}{n^{1/k}}, \ldots, \frac{n_s}{n^{1/k}}$ appartient à la sphère S de rayon 1. Soit alors Ω un domaine quarrable (dont la fonction caractéristique est Riemann-intégrable) de la sphère S. Le problème que l'on se pose est de déterminer le nombre asymptotique, quand n tend vers l'infini, de s-uplets $(n_1, \ldots, n_s)$ tels que $(\frac{n_1}{n^{1/k}}, \ldots, \frac{n_s}{n^{1/k}}) \in \Omega$.

Si $m_1, \ldots, m_s$ sont des réels positifs de somme égale à 1, et si $\varepsilon > 0$, le domaine particulier

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_s) \in S ; \quad |x_i^k - m_i| < \varepsilon\}$$

correspond, par définition, au cas des solutions presque-proportionnelles aux nombres $m_1, \ldots, m_s$.

On se propose de montrer que le nombre de représentations de n "appartenant" à Ω est asymptotiquement proportionnel à la mesure de Ω. Plus précisément, soit $R(n)$ le nombre total de représentations de n sous la forme $n = |n_1|^k + \ldots + |n_s|^k$, $n_i \in \underset{\sim}{Z}$ et ν la mesure uniforme normalisée (invariante par rotation et de masse totale égale à 1) sur S ; on veut montrer que, quel que soit le domaine quarrable Ω, on a, pour s assez grand,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{R(n)} \operatorname{card}\{(n_1, \dots, n_s) \in \underset{\sim}{Z}^s ; (\frac{n_1}{n^{1/k}}, \dots, \frac{n_4}{n^{1/k}}) \in \Omega\} = \nu(\Omega) ,$$

ce qui signifie que les différentes représentations de n se répartissent régulièrement sur la surface de la sphère S quand n tend vers l'infini.

Par une démonstration analogue à celle du critère de Weyl d'équirépartition modulo 1, on montre que ceci est équivalent au fait que, pour toute fonction continue $f : S \longrightarrow \underset{\sim}{C}$, on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{R(n)} \sum_{n_i \in \underset{\sim}{Z}, n=\sum|n_i|^k} f(\frac{n_1}{n^{1/k}}, \dots, \frac{n_s}{n^{1/k}}) = \int_S f(x)\, d\nu(x)$$

ou, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, au fait que, pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_s) \in \underset{\sim}{N}^s$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{R(n)} \sum_{n_i \in \underset{\sim}{Z}, n=\sum|n_i|^k} \frac{n_1^{\lambda_1} \times \dots \times n_s^{\lambda_s}}{n^{(\lambda_1+\dots+\lambda_s)/k}} = \int_S x_1^{\lambda_1} \times \dots \times x_s^{\lambda_s}\, d\nu(x) .$$

En considérant uniquement les représentations positives, on est ramené à montrer que, pour s assez grand, on a, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \underset{\sim}{N}^s$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r(n)} \sum_{n_i \in \underset{\sim}{N}, n=\sum n_i^k} \frac{n_1^{\lambda_1} \times \dots \times n_s^{\lambda_s}}{n^{(\lambda_1+\dots+\lambda_s)/k}} = \int_Q x_1^{\lambda_1} \times \dots \times x_s^{\lambda_s}\, d\mu(x) ,$$

où

$r(n)$ est le nombre de s-uplets $(n_1, \dots, n_s) \in \underset{\sim}{N}^s$ tels que $n = n_1^k + \dots + n_s^k$,

Q est l'ensemble des points de S à coordonnées positives ou nulles,

μ est la mesure uniforme normalisée sur Q.

En appelant $s_0(k)$ le plus petit entier s pour lequel ceci est vérifié, on montrera que

$s_0(k)$ existe,

pour tout $k \geqslant 3$, $s_0(k) \leqslant 2^k + 1$,

$s_0(k) \ll k^2 \log k$, lorsque k tend vers l'infini.

1.3. - Pour cela, on applique la méthode du cercle, et on écrit

$$\sum_{n_i \in \underset{\sim}{N}, n=\sum n_i^k} \frac{n_1^{\lambda_1} \times \dots \times n_s^{\lambda_s}}{n^{(\lambda_1+\dots+\lambda_s)/k}}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{[n^{1/k}]} \dots \sum_{n_s=0}^{[n^{1/k}]} \frac{n_1^{\lambda_1} \times \dots \times n_s^{\lambda_s}}{n^{(\lambda_1+\dots+\lambda_s)/k}} \int_0^1 \exp(2i\pi(n_1^k + \dots + n_s^k - n)x)\, dx$$

$$= \int_0^1 g_1(x) \times \dots \times g_s(x) \exp(-2i\pi m x)\, dx \;,$$

avec $$g_i(x) = \sum_{m=0}^{[n^{1/k}]} \left(\frac{m}{n^{1/k}}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi m^k x) \;.$$

On découpe alors l'intervalle $[0\,,\,1]$ en arcs majeurs et arcs mineurs. Pour cela, on pose

$$P = n^{1/k} \quad \text{et} \quad \tau = 2kP^{k-1} \;.$$

Si $q \leqslant P^{1-(1/k)}$, et si $0 \leqslant a \leqslant q$, $(a\,,\,q) = 1$, on définit l'arc majeur

$$M(a\,,\,q) = \{x \in [0\,,\,1] \;;\; x = \frac{a}{q} + y \;,\; |y| \leqslant \frac{1}{q\tau}\} \;.$$

L'ensemble $\mathfrak{M}$ des arcs mineurs est défini par

$$\mathfrak{M} = \{x \in [0\,,\,1] \;;\; x = \frac{a}{q} + y \;,\; P^{1-(1/k)} < q \leqslant \tau \;,$$
$$0 < a \leqslant q \;,\; (a\,,\,q) = 1 \;,\; |y| \leqslant \frac{1}{q\tau}\} \;.$$

On sait alors que deux arcs majeurs ne se recoupent pas, et que tout point de l'intervalle $[0\,,\,1]$ se trouve soit sur un arc majeur, soit sur un arc mineur [1].

2. Contribution des arcs majeurs.

On suppose donc que x est un point de $[0\,,\,1]$ tel que

$$x = \frac{a}{q} + y \;,\; q \leqslant P^{1-(1/k)} \;,\; 0 \leqslant a \leqslant q \;,\; (a\,,\,q) = 1 \;,\; |y| \leqslant \frac{1}{q\tau} \;.$$

On commence par utiliser un lemme de VAN DER CORPUT ([6], p. 226).

LEMME. - *Soit $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ sur $[a\,,\,b]$ et que $f'(x)$ soit monotone.*

Soit $s : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone.

Alors il existe une constante absolue A telle que

$$\left| \sum_{a<n\leqslant b} s(n) \exp(2i\pi\, f(n)) - \int_a^b s(x) \exp(2i\pi\, f(x))\, dx \right| \leqslant A \max(s(a)\,,\, s(b)) \;.$$

On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - *Si on pose*

$$J_i(y) = \int_0^P \left(\frac{u}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi u^k y)\, du \quad \text{et} \quad S(a\,,\,q) = \sum_{r=0}^{q-1} \exp(2i\pi r^k (a/q)) \;,$$

on a

$$g_i(x) = \frac{1}{q} S(a\,,\,q)\, J_i(y) + O(q) \;.$$

Démonstration. - On a

$$g_i(x) = \sum_{m=0}^{[P]} \left(\frac{m}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi m^k x) = \sum_{m=0}^{[P]} \left(\frac{m}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi m^k (\frac{a}{q} + y)) \;.$$

D'où, en écrivant $m = jq + r$, $r \in \{0 , 1 , \dots , q - 1\}$,

$$g_i(x) = \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{[(P-r)/q]} \left(\frac{jq + r}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi(jq + r)^k (\frac{a}{q} + y))$$

$$= \sum_{r=0}^{q-1} \exp(2i\pi r^k (\frac{a}{q})) \sum_{j=0}^{[(P-r)/q]} \left(\frac{jq + r}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi(jq + r)^k y) .$$

On applique alors le lemme de Van der Corput à la dernière somme, avec

$$f(x) = (qx + r)^k y \quad \text{et} \quad s(x) = \left(\frac{qx + r}{P}\right)^{\lambda_i} .$$

En effet, on a alors

$$|f'(x)| = k\, q(qx + r)^{k-1} |y| \leqslant k\, qP^{k-1} |y| \leqslant \frac{1}{2}$$

et

$$\max(s(a) , s(b)) = \max(s(0) , s([(P - r)/q])) = (q[(P - r)/q] + r)^{\lambda_i} P^{-\lambda_i} \leqslant 1 .$$

d'où

$$\sum_{j=0}^{[(P-r)/q]} \left(\frac{jq + r}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi(jq + r)^k y)$$

$$= \int_0^{(P-r)/q} \left(\frac{qx + r}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi(qx + r)^k y)\, dx + O(1)$$

$$= \frac{1}{q} \int_0^P \left(\frac{u}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi u^k y)\, du + O(1) .$$

On en déduit donc que

$$g_i(x) = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} \exp(2i\pi r^k (\frac{a}{q}))\, J_i(y) + O(q) = \frac{1}{q} S(a , q)\, J_i(y) + O(q) .$$

Il faut maintenant trouver une approximation du produit $g_1(x) \times \dots \times g_s(x)$. D'où le lemme suivant.

LEMME. - <u>Si</u> a_i <u>et</u> b_i $(i = 1 , 2 , \dots , s)$ <u>sont des nombres complexes, on a</u>

$$\prod_{i=1}^{s} a_i - \prod_{i=1}^{s} b_i \ll (\max|a_i - b_i|).(\max^{s-1}(|a_i| , |b_i|)) .$$

<u>Démonstration</u>. - En posant $c_i = a_i - b_i$, il vient $\prod a_i = \prod (b_i + c_i)$ et, en développant le dernier produit en une somme de 2^s produits, on obtient tout d'abord le produit $\prod b_i$, puis des produits contenant chacun au moins un des c_i et qui sont donc majorés par $(\max|c_i|).(\max(|b_i| , |b_i + c_i|))^{s-1}$.

Pour pouvoir appliquer ce lemme, il nous faut maintenant des estimations de $J_i(y)$ et de $S(a , q)$.

Or le fait que l'on ait, pour tout $k \geqslant 3$, $S(a , q) \ll q^{1-(1/k)}$ est un résultat classique.

Pour $J_i(y)$, on a l'estimation suivante.

PROPOSITION 2. - $J_i(y) \ll \min(P\ ,\ |y|^{-1/k})$.

Démonstration. - On a évidemment $J_i(y) \ll P$.

En supposant $y > 0$, ce qui est possible puisque $J_i(-y) = \overline{J_i(y)}$, et en posant $v = uy^{1/k}$, on obtient d'autre part

$$J_i(y) = \int_0^P \left(\frac{u}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi u^k y)\, du = (Py^{1/k})^{-\lambda_i}\, y^{-1/k} \int_0^{Py^{1/k}} v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k)\, dv .$$

On peut, de plus, supposer que $Py^{1/k} \geqslant 1$, car sinon $\min(P\ ,\ y^{-1/k}) = P$, et l'estimation est triviale. La dernière intégrale s'écrit alors

$$\int_0^{Py^{1/k}} v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k)\, dv = \int_1^{Py^{1/k}} v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k)\, dv + \mathcal{O}(1)$$

$$= \int_1^{Py^{1/k}} \frac{v^{\lambda_i - k+1}}{2ki\pi} (2ki\pi v^{k-1} \exp(2i\pi v^k)\, dv + \mathcal{O}(1)$$

$$= \left[\frac{v^{\lambda_i - k+1}}{2ki\pi} \exp(2i\pi v^k)\right]_1^{Py^{1/k}} - \frac{\lambda_i - k + 1}{2ki\pi} \int_1^{Py^{1/k}} v^{\lambda_i - k} \exp(2i\pi v^k)\, dv + \mathcal{O}(1)$$

$$\ll (Py^{1/k})^{\lambda_i - k+1} + 1 + (\lambda_i - k + 1) \int_1^{Py^{1/k}} v^{\lambda_i - k}\, dv \ll (Py^{1/k})^{\lambda_i - k+1} + 1 ,$$

d'où,

$$J_i(y) \ll (Py^{1/k})^{-\lambda_i}\, y^{-1/k} \left((Py^{1/k})^{\lambda_i - k+1} + 1\right)$$

$$\ll y^{-1/k} \left((Py^{1/k})^{-k+1} + (Py^{1/k})^{-\lambda_i}\right)$$

$$\ll y^{-1/k} .$$

Soient maintenant, si $s \geqslant 2k + 1$,

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} J_1(y) \times \dots \times J_s(y) \exp(-2i\pi my)\, dy ,$$

$$A(q) = q^{-s} \sum_{a=1,(a,q)=1}^{q} \exp\left(-2i\pi m\left(\frac{a}{q}\right)\right) S^s(a\ ,\ q)$$

et

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q) .$$

On a alors, en suivant la méthode classique du cercle [1]

$$g_1(x) \times \dots \times g_s(x) = q^{-s} S^s(a\ ,\ q)\, J_1(y) \times \dots \times J_s(y) + \mathcal{O}(q^{-1} \min{}^{s-1}(P, |y|^{-1/k})) ,$$

puis

$$\int_{M(a,q)} g_1(x) \times \dots \times g_s(x) \exp(-2i\pi mx)\, dx$$

$$= \exp\left(-2i\pi m\left(\frac{a}{q}\right)\right) q^{-s} S^s(a\ ,\ q)\, L + \mathcal{O}(q^{-1} P^{s-k-1}) ,$$

et, en admettant provisoirement que $L \ll P^{s-k}$, on en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - Si $s \geqslant 2k+1$, on a

$$\int_{\text{arcs majeurs}} g_1(x) \times \dots \times g_s(x) \exp(-2i\pi mx)\, dx = I\mathfrak{S} + O(P^{s-k-1/2k}) .$$

Etudions maintenant le comportement de $g_i(x)$ sur les arcs mineurs.

3. Contribution des arcs mineurs.

LEMME FONDAMENTAL. - Soient A et $B \in \mathbb{Z}$, et P un polynôme de degré μ ; si $ax \notin \mathbb{Z}$ et si, pour tout $X \in [A , B+\mu]$ et pour tout $\nu \leqslant \mu$, on a $|P^{(\nu)}(X)| \leqslant Q_\nu$, alors

$$\left|\sum_{A\leqslant n\leqslant B} P(n) \exp(2i\pi(an+b)x)\right| \ll \frac{Q_0}{\|ax\|} + \frac{Q_1}{\|ax\|^2} + \dots + \frac{Q_\mu}{\|ax\|^{\mu+1}}$$

(on a posé $\|u\| = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |n-u|$).

Démonstration. - On a, en posant $Y = \exp(2i\pi ax)$ (d'où $Y \neq 1$),

$$\sum_{A\leqslant n\leqslant B} P(n) \exp(2i\pi(an+b)x) = \exp(2i\pi bx) \sum_{A\leqslant n\leqslant B} P(n)\, Y^n .$$

Il suffit donc de montrer le lemme pour $b = 0$.

On considère tout d'abord le cas des polynômes de la forme $P(n)=(n+1)(n+2)..(n+p)$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_{A\leqslant n\leqslant B} P(n)\, Y^n &= \frac{\partial^p}{\partial Y^p} \sum_{A\leqslant n\leqslant B} Y^{n+p} \\ &= \frac{\partial^p}{\partial Y^p} \frac{Y^{B+p+1} - Y^{A+p}}{Y-1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu \frac{\varphi_\nu(B+1)\, Y^{B+\nu+1} - \varphi_\nu(A)\, Y^{A+\nu}}{(Y-1)^{\nu+1}} ,\end{aligned}$$

avec $\varphi_\nu(X) = \frac{p!}{(p-\nu)!}(X+p)(X+p-1)\dots(X+\nu+1)$.

On a alors

$$\varphi_\nu(x) = \varphi_{\nu-1}(X+1) - \varphi_{\nu-1}(X) = \sum_{\ell=0}^{\nu} (-1)^\ell \binom{\nu}{\ell} P(X+p-\ell) ,$$

puisque $\varphi_0(X) = P(X)$.

Retournons maintenant au cas d'un polynôme quelconque.

En prenant la dernière expression comme définition de $\varphi_\nu(X)$, la formule donnant $\sum P(n)\, Y^n$ reste valable, par linéarité, pour un polynôme quelconque.

Or on montre, par application répétée du théorème de Rolle, qu'il existe $\theta \in \,]0 , 1[$ tel que

$$\sum_{\ell=0}^{\nu} (-1)^\ell \binom{\nu}{\ell} P(X+p-\ell) = P^{(\nu)}(X+\theta\nu) .$$

Le lemme en résulte immédiatement, puisque

$$|Y - 1| = |\exp(2i\pi ax) - 1| = 2\,|\sin \pi ax| \geq 2\,\|ax\| .$$

En suivant alors la méthode de Weyl [2], on obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 4. - En posant $\mu = 2^{k-1}\lambda_i$ et $P' = [P]$, on a

$$|g_i(x)|^{2^{k-1}} \ll P^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k+\varepsilon} \sum_{r=1}^{k!P'^{k-1}} \min\left(P , \frac{1}{\|rx\|} + \dots + \frac{P^{-\mu}}{\|rx\|^{\mu+1}}\right) .$$

Démonstration. - L'application de la méthode de Weyl nous donne

$$|g_i(x)|^2 = g_i(x)\,\overline{g_i(x)} = \sum_{m_1=0}^{P'} \sum_{m_2=0}^{P'} \left(\frac{m_1}{P}\right)^{\lambda_i} \left(\frac{m_2}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi(m_1^k - m_2^k)x)$$

$$\leq P + 2 \sum_{0\leq m_2<m_1\leq P'} \left(\frac{m_1}{P}\right)^{\lambda_i} \left(\frac{m_2}{P}\right)^{\lambda_i} \mathrm{Re}(\exp(2i\pi(m_1^k - m_2^k)x))$$

$$\leq P + 2 \sum_{r=0}^{P'} \left| \sum_{m_2=0}^{P'-r} \left(\frac{m_2}{P}\right)^{\lambda_i} \left(\frac{m_2 + r}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi r(km_2^{k-1} + \dots)x)\right| ,$$

en posant $m_1 = m_2 + r$, les pointillés désignant une somme de termes dont le degré en m_2 est $\leq k - 2$. Plus généralement, on obtient

$$|g_i(x)|^{2^{k-1}}$$

$$\ll P^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k} \sum_{1\leq r_1,\dots,r_{k-1}\leq P'} \left| \sum_{m=0}^{P'-r_1-\dots-r_{k-1}} \left(\frac{m}{P}\right)^{\lambda_i} \left(\frac{m + r_1}{P}\right)^{\lambda_i} \dots \right.$$

$$\left. \dots\left(\frac{m + r_{k-1}}{P}\right)^{\lambda_i} \dots \left(\frac{m + r_1 + \dots + r_{k-1}}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi r_1 \times \dots \times r_{k-1}\ (k!\, m + \rho)x)\right|$$

où ρ désigne un nombre indépendant de m .

Comme m et chacun des facteurs $(m + r_j)$, ... , $(m + r_1 + \dots + r_{k-1})$ restent compris entre 0 et P , la valeur au point m de la dérivée d'ordre ν du polynôme de degré $\mu = 2^{k-1}\lambda_i$ en m , $\prod_{\varepsilon_j=0\,ou\,1}((m + \varepsilon_1 r_1 + \dots + \varepsilon_{k-1} r_{k-1})/P)^{\lambda_i}$ est un $\mathcal{O}(P^{-\nu})$.

En appliquant alors le lemme précédent, on en déduit que

$$|g_i(x)|^{2^{k-1}} \ll P^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k} \sum_{1\leq r_j\leq P'} \min\left(P , \frac{1}{\|rx\|} + \dots + \frac{P^{-\mu}}{\|rx\|^{\mu+1}}\right) ,$$

avec $r = k!\, r_1 \times \dots \times r_{k-1}$.

On regroupe alors les termes qui donnent à r la même valeur : ceux-ci sont en nombre au plus égal à $d(r)$, nombre des diviseurs de r . Comme on a, pour tout $\varepsilon > 0$, $d(r) \ll r^{\varepsilon} \ll P'^{k\varepsilon}$, on en déduit la proposition.

On divise alors la somme $U = \sum_{r=1}^{k!P'^{k-1}}$ en sommes de la forme $U_m = \sum_{r=mq+1}^{(m+1)q}$, l'idée étant que, si $x = a/q + y$ avec $|y| \leqslant 1/q^2$, alors $\|rx\|$ est à peu près déterminé par le résidu de r modulo q. On obtient ainsi $[(1/q)k!\, P'^{k-1}]$ sommes de la forme U_m, plus éventuellement une somme ayant moins de q termes.

En posant $t = r - mq - 1$ et $\beta = x(mq+1)$, il vient

$$U_m = \sum_{t=0}^{q-1} \min\left(P\ ,\ \frac{1}{\|xt+\beta\|} + \dots + \frac{P^{-\mu}}{\|xt+\beta\|^{\mu+1}}\right) .$$

La proposition suivante va nous donner une majoration de U_m.

PROPOSITION 5. - Soit α un réel tel que $0 \leqslant \alpha < 1$. Alors on a

$$U_m \ll Pq^{\alpha} + q \log q + \frac{q^{(1-\alpha)+1}}{P} + \dots + \frac{q^{\mu(1-\alpha)+1}}{P^{\mu}}$$

Démonstration. - Soit M l'entier (ou l'un des entiers) le plus proche de βq

$$\beta = \frac{M}{q} + \frac{z}{q}\ , \qquad |z| \leqslant \frac{1}{2} .$$

Comme on a, d'autre part,

$$\left|xt - \frac{a}{q}t\right| = t\left|x - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{t}{q^2} < \frac{1}{q}\ ,$$

il vient

$$xt + \beta = \frac{at+M}{q} + \frac{\theta(t)}{q} \quad \text{avec} \quad |\theta(t)| < \frac{3}{2} .$$

En désignant par $\rho(t)$ le résidu de $at + M$ modulo q, $\rho(t) \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, on obtient donc

$$\|xt+\beta\| = \left\|\frac{\rho(t)+\theta(t)}{q}\right\| .$$

De plus, quand t varie de 0 à $q-1$, $\rho(t)$ varie aussi de 0 à $q-1$, puisque $(a\ ,\ q) = 1$.

Considérons tout d'abord les termes de la somme U_m pour lesquels on a

$$3q^{\alpha} \leqslant \rho(t) \leqslant q - 3q^{\alpha} .$$

Pour ces termes, on a

$$\frac{3}{2} \leqslant 3q^{\alpha} - \frac{3}{2} \leqslant \rho(t) - \frac{3}{2} < \rho(t) + \theta(t) < \rho(t) + \frac{3}{2} \leqslant q - 3q^{\alpha} + \frac{3}{2} \leqslant q - \frac{3}{2}$$

et donc

$$\frac{\rho(t)+\theta(t)}{q} \in \,]0\ ,\ 1[\ .$$

D'où

$$\|xt+\beta\| = \left\|\frac{\rho(t)+\theta(t)}{q}\right\| = \min\left(\frac{\rho(t)+\theta(t)}{q}\ ,\ 1 - \frac{\rho(t)+\theta(t)}{q}\right)$$

$$\geqslant \min\left(\frac{\rho(t)-(3/2)}{q}\ ,\ 1 - \frac{\rho(t)+(3/2)}{q}\right)$$

$$= \min\left(\frac{2\rho(t) - 3}{2q}, \frac{2q - 2\rho(t) - 3}{q}\right)$$

$$\geqslant \min\left(\frac{\rho(t)}{2q}, \frac{q - \rho(t)}{2q}\right) .$$

On en déduit que, pour tout $\nu \leqslant \mu + 1$, $\nu \geqslant 1$, on a

$$\sum_{3q^\alpha \leqslant \rho(t) \leqslant q - 3q^\alpha} \frac{1}{\|xt + \beta\|^\nu} \leqslant (2q)^\nu \sum_{3q^\alpha \leqslant \rho \leqslant q - 3q^\alpha} \max\left(\frac{1}{\rho^\nu}, \frac{1}{(q-\rho)^\nu}\right)$$

$$\leqslant (2q)^\nu \sum_{3q^\alpha \leqslant \rho \leqslant q - 3q^\alpha} \left(\frac{1}{\rho^\nu} + \frac{1}{(q-\rho)^\nu}\right) = (2q)^\nu \, 2 \sum_{3q^\alpha \leqslant \rho \leqslant q - 3q^\alpha} \frac{1}{\rho^\nu}$$

$$\leqslant \begin{cases} 4q \log q & \text{si } \nu = 1 , \\ 2(2q)^\nu \dfrac{1}{\nu - 1} (3q^\alpha - 1)^{1-\nu} & \text{si } \nu \geqslant 2 , \end{cases}$$

soit, pour $\nu \geqslant 2$,

$$\sum_{3q^\alpha \leqslant \rho(t) \leqslant q - 3q^\alpha} \frac{1}{\|xt + \beta\|^\nu} \ll q^{(\nu-1)(1-\alpha)+1} .$$

On en déduit immédiatement le résultat de la proposition, puisque chacun des termes négligés est $\leqslant P$, et que leur nombre est inférieur à $6q^\alpha$.

On peut maintenant en déduire une majoration de $|g_i(x)|$ sur les arcs mineurs.

PROPOSITION 6. - Si x est un point d'un arc mineur, c'est-à-dire si

$$x = \frac{a}{q} + y , \quad |y| \leqslant \frac{1}{q\tau} , \quad P^{1-1/k} \leqslant q \leqslant \tau = 2kP^{k-1} ,$$

on a

$$|g_i(x)| \ll P^{1-\sigma+\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\sigma} = k2^{k-1} ,$$

ceci pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. - Comme on a $\log q \ll P^\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, et

$$U \ll \frac{P^{k-1}}{q} U_m ,$$

il vient

$$U \ll P^k q^{-(1-\alpha)} + P^{k-1} \left(P^\varepsilon + \frac{q^{1-\alpha}}{P} + \dots + \left(\frac{q^{1-\alpha}}{P}\right)^\mu\right) .$$

En tenant compte de ce que $q^{-1} \ll P^{-(k-1)/k}$ et de ce que $q \ll P^{k-1}$, on obtient

$$U \ll P^k P^{-(k-1)(1-\alpha)/k} + P^{k-1} (P^\varepsilon + P^{(k-1)(1-\alpha)-1} + \dots + (P^{(k-1)(1-\alpha)-1})^\mu) .$$

En choisissant alors α tel que $(k - 1)(1 - \alpha) = 1$, il vient

$$U \ll P^{k-(1/k)} + P^{k-1} (P^\varepsilon + 1) \ll P^{k-(1/k)} .$$

En utilisant la proposition 4, on en déduit que

$$|g_i(x)|^{2^{k-1}} \ll P^{2^{k-1}-1} + P^{2^{k-1}-k+\varepsilon} P^{(k-1)/k} \ll P^{2^{k-1}-(1/k)+\varepsilon} .$$

La proposition en résulte immédiatement.

PROPOSITION 7. - Si $s \geqslant k^2\, 2^{k-1} + 1$, on a

$$\int_0^1 g_1(x) \times \dots \times g_s(x) \exp(-2i\pi n x)\, dx = L\mathfrak{S} + o(n^{(s/k)-1}) .$$

Démonstration. - Si x est un point d'un arc mineur et si

$$s \geqslant k^2\, 2^{k-1} + 1 = \frac{k}{\sigma} + 1 ,$$

on a, d'après la proposition précédente,

$$|g_1(x) \times \dots \times g_s(x)| \ll P^{s-s\sigma+\varepsilon} \ll P^{s-k-\sigma+\varepsilon} = o(P^{s-k}) = o(n^{(s/k)-1}) .$$

Le résultat découle alors du fait que l'intégrale sur les arcs mineurs est, elle aussi, un $\sigma(n^{(s/k)-1})$ et du calcul de l'intégrale sur les arcs majeurs (proposition 3).

Pour achever la démonstration de l'existence de $s_0(k)$, il reste donc

- à calculer $L = L(\lambda_1 , \dots , \lambda_s)$, et à vérifier que $L \ll n^{(s/k)-1}$,
- à montrer que ceci est bien la formule qu'on attendait.

4. Calcul explicite de L , et existence de $s_0(k)$.

LEMME. - On a

$$\int_{0\leqslant \sum t_i \leqslant 1,\, t_i \geqslant 0} \int t_1^{\alpha_1-1} \times \dots \times t_s^{\alpha_s-1}\, dt_1 \times \dots \times dt_s = \frac{\Gamma(\alpha_1) \times \dots \times \Gamma(\alpha_s)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_s + 1)} .$$

Démonstration. - C'est un résultat classique.

On a alors
$$J_i(y) = \int_0^P \left(\frac{u}{P}\right)^{\lambda_i} \exp(2i\pi u^k y)\, du ,$$

soit, en posant $u = Pv$ et $z = P^k y$,

$$J_i(y) = P \int_0^1 v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k z)\, dv .$$

D'où, puisque $n = P^k$,

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} J_1(y) \times \dots \times J_s(y) \exp(-2i\pi n y)\, dy$$
$$= P^{s-k} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi z) \left(\prod_{i=1}^{s} \int_0^1 v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k z)\, dv\right) dz .$$

On considère alors la fonction

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{s} \int_0^1 v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k z)\, dv\right) \exp(-2i\pi z c)\, dz ,$$

et, plus précisément,

$$\Phi(c) = \int_0^c \varphi(t)\, dt \ , \quad c \geqslant 0 \ .$$

Comme, d'après la proposition 2, l'intégrale donnant $\varphi(t)$ est absolument convergente, on peut changer l'ordre d'intégration entre z et t ; on obtient

$$\Phi(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\prod_{i=1}^{s} \int_0^1 v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k z)\, dv\Big) \frac{1 - \exp(-2i\pi zc)}{2i\pi z}\, dz$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \Big(\prod_{i=1}^{s} \int_0^1 v^{\lambda_i} \exp(2i\pi v^k z)\, dv\Big) \frac{1 - \exp(-2i\pi zc)}{2i\pi z}\, dz$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^1\!\!\cdots\!\int_0^1 v_1^{\lambda_1} \times\cdots\times v_s^{\lambda_s} \Big(\int_{-A}^{A} \frac{\exp(2i\pi Xz) - \exp(2i\pi(X-c)z)}{2i\pi z}\, dz\Big)\, dv_1 \times\cdots\times dv_s \ ,$$

où l'on a posé $X = v_1^k + \dots + v_s^k$.

On a donc

$$\Phi(c) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^1\!\!\cdots\!\int_0^1 v_1^{\lambda_1} \times\cdots\times v_s^{\lambda_s} \Big(\int_0^A \Big(\frac{\sin 2\pi Xz}{z} - \frac{\sin 2\pi(X-c)z}{z}\Big) dz\Big)\, dv_1 \times \dots \times dv_s$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^1\!\!\cdots\!\int_0^1 v_1^{\lambda_1} \times\cdots\times v_s^{\lambda_s} \Big(\int_0^\infty \Big(\frac{\sin 2\pi Xz}{z} - \frac{\sin 2\pi(X-c)z}{z}\Big) dz\Big)\, dv_1 \times\cdots\times dv_s \ ,$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, puisque la fonction à intégrer est dominée, sur $[0\ ,\ 1]^s$, par $2K$, où K est une constante telle que, pour tout a , on ait

$$\Big|\int_0^a \frac{\sin t}{t}\, dt\Big| \leqslant K \ .$$

Comme on a

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha > 0 \ , \\ 0 & \text{si} \quad \alpha = 0 \ , \\ -1 & \text{si} \quad \alpha < 0 \ , \end{cases}$$

on en déduit

$$\Phi(c) = \frac{1}{2} \int_0^1\!\!\cdots\!\int_0^1 (\operatorname{sgn} X - \operatorname{sgn}(X - c))\, v_1^{\lambda_1} \times \dots \times v_s^{\lambda_s}\, dv_1 \times \dots \times dv_s$$

$$= \underset{0\leqslant X\leqslant c}{\int_0^1\!\!\cdots\!\int_0^1} v_1^{\lambda_1} \times \dots \times v_s^{\lambda_s}\, dv_1 \times \dots \times dv_s \ .$$

En faisant le changement de variable $v_i = u_i^{1/k} c^{1/k}$, il vient

$$\Phi(c) = k^{-s} c^{((\lambda_1+\dots+\lambda_s)/k)+1} \underset{\sum u_i\leqslant 1}{\int_0^{1/c}\!\!\cdots\!\int_0^{1/c}} u_1^{((\lambda_1+1)/k)-1} \dots u_s^{((\lambda_s+1)/k)-1}\, du_1 \dots du_s \ .$$

Or les conditions $\sum u_i \leqslant 1$ et $u_i \geqslant 0$ impliquent $u_i \leqslant 1$, pour tout i . Si on suppose de plus que $c \leqslant 1$, l'intégrale est alors égale à l'intégrale sur $[0\ ,\ 1]^s$, et on peut appliquer le lemme ; d'où

$$\Phi(c) = k^{-s}\, c^{((\lambda_1+\dots+\lambda_s+s)/k)+1}\, \frac{\Gamma((\lambda_1+1)/k) \times \dots \times \Gamma((\lambda_s+1)/k)}{\Gamma(((\lambda_1+\dots+\lambda_s+s)/k)+1)}\ , \text{ si } c \leqslant 1\ .$$

En dérivant, il vient

$$\varphi(t) = k^{-s}\, t^{(\lambda_1+\dots+\lambda_s+s)/k}\, \frac{\Gamma((\lambda_1+1)/k) \times \dots \times \Gamma((\lambda_s+1)/k)}{\Gamma((\lambda_1+\dots+\lambda_s+s)/k)}\ , \text{ si } 0 < t < 1\ .$$

Comme $L = P^{s-k}\, \varphi(1)$ et que φ est continue au point 1, on en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 8. - *En posant*

$$\gamma(\lambda_1\ , \dots\ , \lambda_s) = \frac{\Gamma((\lambda_1+1)/k) \times \dots \times \Gamma((\lambda_s+1)/k)}{\Gamma((\lambda_1+\dots+\lambda_s+s)/k)}\ ,$$

on a $L = \gamma(\lambda_1\ , \dots\ , \lambda_s)\, n^{(s/k)-1}$.

En rassemblant les résultats obtenus, on a donc montré que

$$\sum_{n=\sum n_i^k,\, n_i \geqslant 0} \frac{n_1^{\lambda_1} \times \dots \times n_s^{\lambda_s}}{n^{(\lambda_1+\dots+\lambda_s)/k}} = \gamma(\lambda_1\ , \dots\ , \lambda_s)\, \mathfrak{S}(n)\, n^{(s/k)-1} + o(n^{(s/k)-1})\ .$$

En faisant $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$, il vient

$$r(n) = \gamma(0\ , \dots\ , 0)\, \mathfrak{S}(n)\, n^{(s/k)-1} + o(n^{(s/k)-1})\ .$$

Or on sait qu'il existe une constante c_k ne dépendant que de k , telle que, si $s \geqslant 4k$ (ou, pour $k = 3$, si $s \geqslant 8$), on ait

$$\mathfrak{S}(n) \geqslant c_k > 0\ .$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r(n)} \sum_{n=\sum n_i^k,\, n_i \geqslant 0} \frac{n_1^{\lambda_1} \times \dots \times n_s^{\lambda_s}}{n^{(\lambda_1+\dots+\lambda_s)/k}} = \frac{\gamma(\lambda_1\ , \dots\ , \lambda_s)}{\gamma(0\ , \dots\ , 0)}\ .$$

Il reste donc à montrer que ceci est bien égal à ce que l'on attendait, c'est-à-dire à

$$\int_Q x_1^{\lambda_1} \dots x_s^{\lambda_s}\, d\mu(x)\ .$$

Or on a, pour $p > 0$,

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{p-1}\, dt = k \int_0^\infty e^{-u^k}\, u^{kp-1}\, du\ .$$

D'où

$$\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_s) = k^s \int_0^\infty \!\!\dots\! \int_0^\infty \exp(-(u_1^k + \dots + u_s^k))\, u_1^{kp_1-1} \dots u_s^{kp_s-1}\, du_1 \dots du_s$$

$$= k^s \int_0^\infty e^{-r^k} \left(\int_{Q(r)} u_1^{kp_1-1} \dots u_s^{kp_s-1}\, dS_r\right) dr\ ,$$

où $Q(r) = \{x = (x_1 , \ldots , x_s) , x_i \geqslant 0 , x_1^k + \ldots + x_s^k = r^k\}$ et où dS_r est la mesure induite sur $Q(r)$ par la mesure $du_1 \ldots du_s$ sur $\underset{\sim}{R}^s$.

En faisant le changement de variable $u_i = r\xi_i$ dans l'intégrale interne, pour se ramener à $Q(1) = Q$, il vient

$$\Gamma(p_1) \ldots \Gamma(p_s) = k^s \left(\int_0^\infty r^{k(p_1+\ldots+p_s)-s} e^{-r^k} r^{s-1} dr\right)\left(\int_Q \xi_1^{kp_1-1} \ldots \xi_s^{kp_s-1} dS\right) .$$

D'où

$$\int_Q \xi_1^{kp_1-1} \ldots \xi_s^{kp_s-1} dS = \frac{\Gamma(p_1) \ldots \Gamma(p_s)}{\Gamma(p_1 + \ldots + p_s)} k^s .$$

On en déduit donc que

$$\int_Q x_1^{\lambda_1} \ldots x_s^{\lambda_s} d\mu(x) = \frac{\int_Q x_1^{\lambda_1} \ldots x_s^{\lambda_s} dS}{\int_Q dS} = \frac{\gamma(\lambda_1 , \ldots , \lambda_s)}{\gamma(0 , \ldots , 0)} .$$

On a donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Pour tout $k \geqslant 3$, $s_0(k)$ existe et $s_0(k) \leqslant k^2\, 2^{k-1} + 1$.

5. Majorations de $s_0(k)$.

La première majoration concernera essentiellement les petites valeurs de k .

Rappelons tout d'abord un théorème de HUA [2].

LEMME. - Si $g(x) = \sum_{h=0}^{[P]} \exp(2i\pi h^k x)$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^1 |g(x)|^{2^k} dx \ll P^{2^k-k+\varepsilon} .$$

COROLLAIRE. - Soit $N(P , k , s)$ le nombre de solutions de l'équation

$$h_1^k + \ldots + h_s^k = h_1'^k + \ldots + h_s'^k , \quad 0 \leqslant h_i \leqslant P , \quad 0 \leqslant h_i' \leqslant P ;$$

Soit, de plus, $t = 2^{k-1}$; alors on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$N(P , k , t) \ll P^{2^k-k+\varepsilon} .$$

Démonstration. - On a en effet

$$N(P , k , s) = \sum_{0\leqslant h_i,h_i'\leqslant P} \int_0^1 \exp(2i\pi(h_1^k + \ldots + h_s^k - h_1'^k - \ldots - h_s'^k)x)\, dx ,$$

puisque l'intégrale vaut 1 quand le coefficient de x vaut 0, et vaut 0 sinon. On en déduit que

$$N(P , k , t) = \int_0^1 (g(x))^t\, (\overline{g(x)})^t\, dx = \int_0^1 |g(x)|^{2t}\, dx \ll P^{2^k-k+\varepsilon} ,$$

d'après le lemme de Hua.

On a encore besoin de la proposition suivante.

PROPOSITION 9. - Pour tout $s \in \underset{\sim}{N}^*$, on a

$$\int_0^1 |g_1(x) \ldots g_{2s}(x)| \, dx \leq N(P , k , s) .$$

<u>Démonstration</u>. - On a tout d'abord, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz ,

$$\left(\int_0^1 |g_1(x)\ldots g_{2s}(x)| \, dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 |g_1(x)\ldots g_s(x)|^2 \, dx\right).\left(\int_0^1 |g_{s+1}(x)\ldots g_{2s}(x)| \, dx\right) .$$

On a alors

$$\int_0^1 |g_1(x) \ldots g_s(x)|^2 \, dx = \int_0^1 g_1(x) \ldots g_s(x) \, \overline{g_1(x)} \ldots \overline{g_s(x)} \, dx$$

$$= \sum_{0 \leq h_i , h'_i \leq P} \left(\frac{h_1 h'_1}{P^2}\right)^{\lambda_1} \ldots \left(\frac{h_s h'_s}{P^2}\right)^{\lambda_s} \int_0^1 \exp(2i\pi(h_1^k + \ldots + h_s^k - h_1'^k - \ldots - h_s'^k)x) \, dx$$

$$= \sum_{\substack{0 \leq h_i , h'_i \leq P \\ h_1^k + \ldots + h_s^k = h_1'^k + \ldots + h_s'^k}} \left(\frac{h_1 h'_1}{P^2}\right)^{\lambda_1} \ldots \left(\frac{h_s h'_s}{P^2}\right)^{\lambda_s}$$

$$\leq \sum_{\substack{0 \leq h_i , h'_i \leq P \\ h_1^k + \ldots + h_s^k = h_1'^k + \ldots + h_s'^k}} 1 = N(P , k , s) .$$

On peut maintenant démontrer la première majoration de $s_0(k)$.

THÉORÈME 2. - <u>Pour tout</u> $k \geq 3$, <u>on a</u> $s_0(k) \leq 2^k + 1$.

<u>Démonstration</u>. - D'après la proposition précédente et le corollaire du lemme de Hua , on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^1 |g_1(x) \ldots g_{2^k}(x)| \, dx \ll P^{2^k - k + \varepsilon} .$$

Or, d'après la proposition 6, on sait que, sur un arc mineur, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|g_i(x)| \ll P^{1-\sigma+\varepsilon} .$$

On en déduit que, si $s \geq 2^k + 1$,

$$\int_{\mathfrak{m}} g_1(x)\ldots g_s(x) \exp(-2i\pi mx) \, dx \leq \left(\sup_{x \in \mathfrak{m}} |g_{2^k+1}(x)\ldots g_s(x)|\right) \int_0^1 |g_1(x)\ldots g_{2^k}(x)| \, dx$$

$$\ll P^{(s-2^k)(1-\sigma+\varepsilon)} \, P^{2^k - k + \varepsilon} = o(P^{s-k}) .$$

Comme l'estimation sur les arcs majeurs et la minoration de $\mathfrak{S}(n)$ sont valables pour $s \geq 2^k + 1$, on en déduit que, si $s \geq 2^k + 1$,

$$\int_0^1 g_1(x)\ldots g_s(x) \exp(-2i\pi mx) \, dx = \gamma(\lambda_1 , \ldots , \lambda_s) \, \mathfrak{S}(n) \, n^{(s/k)-1} + o(n^{(s/k)-1}) ,$$

et donc que $s_0(k) \leqslant 2^k + 1$.

Passons maintenant à la seconde majoration de $s_0(k)$, qui concerne le comportement asymptotique de $s_0(k)$ quand k tend vers l'infini.

THÉORÈME 3. - <u>On a</u> $s_0(k) \ll k^2 \log k$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $s \geqslant 10\, k^2 \log k$. On sait alors [3] que la formule asymptotique $r(n) = \gamma(0\,,\ldots,\,0)\, \mathfrak{S}(n)\, n^{(s/k)-1} + o(n^{(s/k)-1})$ est valable pour s .

On a alors

$$N(P\,,\,k\,,\,s) \leqslant \sum_{0\leqslant n\leqslant sP^k}' (r(n))^2 .$$

En effet, le nombre de solutions de

$$h_1^k + \ldots + h_s^k = h_1'^k + \ldots + h_s'^k\ , \quad 0 \leqslant h_i \leqslant P\ , \quad 0 \leqslant h_i' \leqslant P$$

est égal au nombre de solutions de

$$\left\{\begin{matrix} n = h_1^k + \ldots + h_s^k \\ n = h_1'^k + \ldots + h_s'^k \end{matrix}\right\}\ , \quad 0 \leqslant h_i \leqslant P\ , \quad 0 \leqslant h_i' \leqslant P\ , \quad 0 \leqslant n \leqslant sP^k\ ,$$

qui est inférieur ou égal au nombre de solutions de

$$\left\{\begin{matrix} n = h_1^k + \ldots + h_s^k \\ n = h_1'^k + \ldots + h_s'^k \end{matrix}\right\}\ , \quad 0 \leqslant n \leqslant sP^k\ ,$$

c'est-à-dire à $\displaystyle\sum_{0\leqslant n\leqslant sP^k} (r(n))^2$.

On a donc, si $s \geqslant 10\, k^2 \log k$,

$$N(P\,,\,k\,,\,s) \ll \sum_{n=0}^{sP^k} (n^{(s/k)-1})^2 \ll (P^k)^{2(s/k)-1} = P^{2s-k} .$$

On en déduit alors, en reprenant la démonstration du théorème 2, que

$$s_0(k) \leqslant 20\, k^2 \log k + 1 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AYOUB (R.). - An introduction to the analytic theory of numbers. - Princeton, American mathematical Society, 1963 (Mathematical Surveys, 10).

[2] DAVENPORT (H.). - Analytic methods for diophantine equations and diophantine inequalities. - Ann Arbor, Ann Arbor Publishers, 1963.

[3] VINOGRADOV (I. M.). - The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. Translated from Russian. - London, Interscience Publishers, s. d.

[4] WRIGHT (E. M.). - An extension of Waring's problem, Phil. Trans. Royal. Soc., t. 232, 1933, p. 1-26.

[5] WRIGHT (E. M.). - Proportionality conditions in Waring's problem, Math. Z., t. 38, 1934, p. 730-746.

[6] ZYGMUND (A.). - Trigonometric series, I. 2nd edition. - Cambridge, at the University Press, 1959.

(Texte reçu le 9 mai 1977)

Marc LABORDE
Château de Breteuil
CHOISEL
78460 CHEVREUSE