

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARTINE PATHIAUX

Classification en sous familles fermées de n-uples de nombres algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, n° 2 (1976-1977),
exp. n° G23, p. G1-G3

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A19_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CLASSIFICATION EN SOUS FAMILLES FERMÉES
 DE n-UPLES DE NOMBRES ALGÈBRIQUES

par Martine PATHIAUX

Introduction. - On appelle Σ^n l'ensemble des n-uples $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ où θ_i pour $i = 1, 2, \dots, n$ est un nombre algébrique de module > 1 dont tous les conjugués, autres que θ_j pour $j \neq i$, sont de module < 1 . Soit $P(z)$ le polynôme primitif de $\mathbb{Z}[z]$, de plus bas degré, dont $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ sont racines, et $Q(z)$ le polynôme réciproque de $P(z)$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$; Σ_q^n désigne alors l'ensemble des éléments de Σ^n tels que $Q(0) = q$.

On remarque que :

1° $\Sigma_1^1 = S =$ ensemble des nombres de Pisot et S est fermé ;

2° Si $q = 1, n > 1$, l'ensemble Σ_1^n a été étudié par CANTOR [1], qui n'est pas arrivé à démontrer que Σ_1^n est fermé. Cette question reste toujours ouverte.

3° Si $q \neq 1, n = 1$, on ne sait pas si Σ_q^1 est fermé. Par contre C. PISOT [3] a défini un ensemble S_q^1 fermé contenu dans Σ_q^1 . J'ai démontré [2] que

$$\Sigma^1 = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} S_q^1.$$

De façon analogue, je vais définir des ensembles S_q^n fermés, contenus dans Σ_q^n , et tels que $\Sigma^n = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} S_q^n$.

Définition. - Soit $q \in \mathbb{N}^*$, S_q^n est l'ensemble des n-uples $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, où θ_i , pour $i = 1, 2, \dots, n$, sont des nombres algébriques de module > 1 auxquels on peut associer deux polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ de $\mathbb{Z}[z]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $Q(0) = q$,
- (ii) $\frac{1}{\theta_1}, \frac{1}{\theta_2}, \dots, \frac{1}{\theta_n}$ sont les seuls zéros de $Q(z)$ dans $|z| \leq 1$,
- (iii) $A(\frac{1}{\theta_i}) \neq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$,
- (iv) $|\frac{A(z)}{Q(z)}| \leq 1$ si $|z| = 1$,
- (v) $\frac{A(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \dots$ avec

$$\begin{vmatrix} u_0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & u_0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_i & u_{i-1} & \dots & u_0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & u_0 & u_1 & \dots & u_i \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & u_0 & \dots & u_{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & u_0 \end{vmatrix} \neq 0$$

pour $i = 0, 1, \dots, n-1$

On peut démontrer les résultats suivants :

THÉOREME 1. - S_q^n est fermé.

La démonstration consiste à associer à tout élément de S_q^n la fraction $A(z)/Q(z)$ qui sert à le définir, et ensuite on utilise les résultats de SCHUR [4] pour caractériser les fractions rationnelles vérifiant les conditions (iv) et (v), et ayant n pôles dans $|z| < 1$.

THÉOREME 2. - $\Sigma^n = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} S_q^n$.

La démonstration utilise encore les résultats de SCHUR et le lemme suivant.

LEMME 1. - Soit $A(z)$ un polynôme de $\mathbb{R}[z]$, ayant toutes ses racines dans $|z| > 1$, alors quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $A_\varepsilon(z)$ de $\mathbb{Q}[z]$, ayant toutes ses racines dans $|z| > 1$ et tel que

(i) $|A_\varepsilon(z)| < |A(z)|$ si $|z| = 1$,

(ii) $\|A_\varepsilon - A\| < \varepsilon$.

($\|A\|$ désigne le sup de la valeur absolue des coefficients de A .)

THÉOREME 3. - Si (θ_1, θ_2) est point limite de S_q^2 , alors $|\theta_1| \neq 1$ et $|\theta_2| \neq 1$.

La démonstration consiste à montrer dans une première étape que si $(\theta_1, \theta_2) \in S_q^2$, alors $|\theta_1| - 1$ et $|\theta_2| - 1$ restent supérieurs à une constante $\neq 0$, ne dépendant que de u_0, u_1, u_2, θ_1 et θ_2 , où u_i sont les coefficients du développement en série entière de la fraction rationnelle associée à (θ_1, θ_2) .

THÉOREME 4. - Soit (θ_1, θ_2) un élément de S_1^2 , alors (θ_1, θ_2) est point limite de S_1^2 si, et seulement si, il existe deux polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ vérifiant les propriétés de définition, l'égalité $|A(z)| = |Q(z)|$ n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points de $|z| = 1$.

La démonstration se fait de façon analogue au cas où $n = 1$, et utilise le théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CANTOR (D.). - On sets of algebraic integer whose remaining conjugates lie in the unit circle, Trans. Amer. Math. Soc., t. 105, 1962, p. 391-406.
- [2] PATHIAUX (Martine). - Familles fermées de nombres algébriques dont la réunion est l'ensemble des nombres algébriques de module > 1 , tous leurs conjugués étant de module < 1 , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 1319-1320.
- [3] PISOT (C.). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 81, 1964, p. 165-189.
- [4] SCHUR (J.). - Über Potenzreihen die im Innern des Einheitskreiss beschränkt sind, J. für reine und angew. Math., t. 147, 1917, p. 205-232.

(Texte reçu le 27 juin 1977)

Martine PATHIAUX
187 boulevard Bineau
92200 NEUILLY
