Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Éric Reyssat

Mesures de transcendance de nombres liés aux fonctions elliptiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, n° 2 (1976-1977), exp. n° G22, p. G1-G3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A18_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° G22, 3 p.

23 mai 1977

MESURES DE TRANSCENDANCE
DE NOMBRES LIÉS AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES

par Éric REYSSAT

Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques. On note (ω_1, ω_2) une base du réseau des périodes de $\wp$, et η_1, η_2 les quasi-périodes correspondantes de la fonction ζ associée à $\wp$. D'après les travaux de D. MASSER, on sait que l'espace vectoriel engendré sur $\overline{\mathbb{Q}}$ par les nombres $1, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi$ est de dimension 4 ou 6 suivant qu'il y a ou non multiplication complexe, et on sait même minorer une forme linéaire à coefficients algébriques du type

$$\Lambda = \alpha_0 + \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \beta_1 \eta_1 + \beta_2 \eta_2 + \gamma 2i\pi$$

lorsque α_0 est non nul (Cf. [1], Th. IV).

On présente ici des minorations de $|\Lambda|$ dans deux cas particuliers où α_0 est nul. De manière précise, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 1. - Il existe deux constantes c et c' ne dépendant que de $\wp$ et ω_1 telles que, pour tout nombre algébrique α de degré d et hauteur H,

(1) $$|\omega_1 - \alpha\eta_1| > \exp\{-cd(d^2 \log^2(d+1) + \log H) \log(1 + d + \log H)\}$$

(2) $$|\omega_1 - \alpha\pi| > \exp\{-c'(\log H + d \log(1 + d \log H))^2\} .$$

On donnera le schéma de la démonstration en ne détaillant que la fin (contradiction) qui diffère de beaucoup de démonstrations de transcendance. On reprend pour cela une idée de D. MASSER. La même méthode permet de traiter également le cas où l'on remplace ω_1 par un point algébrique de $\wp$, c'est-à-dire un nombre complexe u tel que $\wp(u)$ soit algébrique. Nous ne donnons ici que l'analogue de l'inégalité (1), celui de (2) étant notablement moins bon que dans le cas $u = \omega_1$; la dépendance en d n'a pas été calculée :

THÉORÈME 2. - Soit u un point algébrique de $\wp$, α un nombre algébrique de degré d et hauteur H. Il existe une constante c'' ne dépendant que de $\wp$, u et d, telle que

$$|u - \alpha\zeta(u)| > \exp\{-(\log H) \exp(c'' \sqrt{\log \log H})\} .$$

Nous n'esquissons que la démonstration du théorème 2, le principe des autres démonstrations étant le même.

On procède par l'absurde, en supposant le théorème 2 faux. Alors :

1° L_1, L_2, M, K étant des paramètres entiers fonctions de d, H, $\wp$, u, on construit un polynôme non nul

$$P(X\ ,\ Y) = \sum_{\ell_1=0}^{L_1-1} \sum_{\ell_2=0}^{L_2-1} p(\ell_1\ ,\ \ell_2)\ X^{\ell_1}\ Y^{\ell_2}$$

à coefficients entiers rationnels, avec la propriété suivante :

Si $f(z) = z - \alpha\zeta(z)$, et si D^k désigne la dérivation d'ordre k , alors

$$|D^k(P(f\ ,\ \wp)(mu))| \leqslant \varepsilon_1 \quad \text{pour} \quad k \leqslant K \quad \text{et} \quad m \leqslant M\ ,$$

où ε_1 est une quantité très petite, fonction des paramètres précédents. Dans le cas $u = \omega_1$, on peut utiliser la périodicité de la fonction $\wp$ pour montrer que ε_1 ne dépend pratiquement pas de M , ce qui permet un résultat plus fin pour le théorème 1.

2° En utilisant le fait que les fonctions $\wp$ et f sont méromorphes d'ordre $\leqslant 2$, un procédé d'interpolation dû à HERMITE permet de déduire de la construction précédente que la fonction $F = P(f\ ,\ \wp)$ prend des valeurs très petites (inférieures en module à ε_2 , fonction des paramètres) dans un disque D de rayon $c_1\ L_1$ privé d'un voisinage convenable des pôles de $\wp$ (ici, c_1 est une constante ne dédendant que de $\wp$, u , d).

3° On veut maintenant trouver une contradiction à partir de la majoration des valeurs de F . On cherche pour cela à en déduire que tous les coefficients $p(\ell_1, \ell_2)$ sont inférieurs à 1/2 en valeur absolue, donc sont nuls, ce qui contredira la construction de P . Sachant que le polynôme P prend des valeurs très petites aux points $(f(z)\ ,\ \wp(z))$ pour z dans D d'après le pas 2°, la majoration cherchée des nombres $p(\ell_1\ ,\ \ell_2)$ s'obtiendra grâce au lemme suivant, qui permet de majorer les coefficients d'un polynôme en fonction des valeurs qu'il prend en certains points.

LEMME. - Soient $Q(X) = \sum_{\ell=1}^{L} a_\ell\ X^\ell \in \mathbb{C}[X]$, $\sigma_0\ , \dots ,\ \sigma_L$ des nombres complexes, δ et S deux nombres réels tels que

$$0 < \delta \leqslant \min_{i\neq j}(|\sigma_i - \sigma_j|\ ,\ 1) \quad \text{et} \quad S \geqslant \max_i(|\sigma_i|\ ,\ 1)\ .$$

Alors

$$\max_\ell |a_\ell| \leqslant (c_2\ S/\delta)^L\ \max_i |Q(\sigma_i)|\ ,$$

où c_2 est une constante absolue.

(Pour la démonstration, Cf. [1], lemme 1.3.)

Pour pouvoir appliquer ce lemme, valable en une seule variable, on considère les points $z(r_1\ ,\ r_2) = \omega/4 + r_1\ \omega + r_2\ \varepsilon_3$ avec ε_3 très petit, où ω est une période de $\wp$ dont la quasi-période η associée vérifie $\eta u \neq \omega\ \zeta(u)$ (ω existe d'après la relation de Legendre), et où r_1 et r_2 sont des entiers rationnels vérifiant $|r_i| \leqslant 2L_i$ $(i = 1\ ,\ 2)$. Alors, lorsque r_2 est fixé, $f(z(r_1\ ,\ r_2))$ est une fonction affine de r_1 et donc $F(z(r_1\ ,\ r_2))$ est un polynôme Q_{r_2} en r_1 , de degré $L_1 - 1$. Par ailleurs, $z(r_1\ ,\ r_2)$ appartient à D , ce qui permet d'appliquer la majoration du 2° . Le lemme précédent donne alors une majoration des coefficients $q_{r_2}(\ell_1)$ $(\ell_1 = 0 , \ldots , L_1 - 1)$ du polynôme Q_{r_2}. Mais ces coefficients eux mêmes sont de la forme

$$q_{r_2}(\ell_1) = \sum_{\ell_2=0}^{L_2-1} p(\ell_1 , \ell_2) \quad (\wp(\frac{\omega}{4} + r_2 \, \varepsilon_3))^{\ell_2} .$$

D'après le développement de Taylor de $\wp$ au voisinage de $\omega/4$, les valeurs $\wp(\frac{\omega}{4} + r_2 \, \varepsilon_3)$ varient de façon non négligeable avec r_2, ce qui permet d'appliquer à nouveau le lemme à $q_{r_2}(\ell_1)$. On obtient ainsi une majoration de $|p(\ell_1 , \ell_2)|$ en fonction de L_1, L_2, ε_2, ε_3. Des valeurs bien choisies des paramètres donnent une borne inférieure à 1/2 ce qui est bien la contradiction cherchée.

Nous avons vu dans la première partie de la démonstration pourquoi le premier résultat du théorème 1 était meilleur que celui du théorème 2. Dans le cas de $\omega_1 - \alpha\pi$, on remplace dans la démonstration la fonction $f(z) = z - \alpha\zeta(z)$ par $\exp(2i\pi z/\omega_1)$, ou $\exp(2iz/\alpha)$. Chaque dérivation de cette fonction fait apparaître un nouveau facteur α, ce qui n'arrivait pas avec $f(z)$. Cela explique que l'inégalité (2) est moins bonne en fonction de H que l'inégalité (1).

Pour terminer, remarquons que le cas où $\wp$ admet une multiplication complexe permet d'obtenir d'autres résultats :

- Les formes linéaires $\omega_2 - \alpha\eta_1$ et $\eta_1 - \alpha\eta_2$ s'écrivent sous la forme $\lambda\omega_1 + \mu\eta_1$ où λ et μ sont deux nombres algébriques non tous deux nuls (seulement si $g_2 \, g_3 \neq 0$ pour la deuxième). On obtient donc des minorations de ces formes à partir de l'inégalité (1).

- L'expression $\omega_1 - \alpha\pi$ peut s'écrire $\omega_1(\alpha_0 + \alpha_1 \, \omega_1 + \beta_1 \, \eta_1)$ où α_0 est non nul. La minoration des formes linéaires de D. MASSER ([1], Th. IV) donne alors une minoration de $\omega_1 - \alpha\pi$ plus fine en fonction de H que l'inégalité (2).

RÉFÉRENCES

[1] MASSER (D.). - Elliptic functions and transcendence. - Berlin, Springer-Verlag, 1975 (Lecture Notes in Mathematics, 437).

[2] SCHNEIDER (T.). - Einführung in die transzendenten Zahlen. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 81).

(Texte reçu le 27 juillet 1977)

Éric REYSSAT
85 boulevard Brune
75014 PARIS