

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL MENDÈS FRANCE

Indépendance statistique, somme des chiffres, mesure spectrale

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, n° 2 (1976-1977),
exp. n° G9, p. G1-G4

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A15_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INDÉPENDANCE STATISTIQUE, SOMME DES CHIFFRES, MESURE SPECTRALE

par Michel MENDÈS FRANCE

1. Indépendance statistique.

Soient $f_1 = (f_1(n))$ et $f_2 = (f_2(n))$ deux suites complexes.

Elles sont dites indépendantes si les trois limites

$$Mf_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f_1(n)$$

$$Mf_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f_2(n)$$

$$Mf_1 f_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f_1(n) f_2(n)$$

existent, et

$$Mf_1 f_2 = Mf_1 \cdot Mf_2 .$$

Plus généralement, les s suites f_1, f_2, \dots, f_s sont indépendantes si, pour tout $t \leq s$ et tout t -uplet $(i_1, i_2, \dots, i_t) \in \{1, 2, \dots, s\}^t$ de nombres distincts deux à deux, les moyennes $M \prod_{k=1}^t f_{i_k}$ existent et

$$M \prod_{k=1}^t f_{i_k} = \prod_{k=1}^t Mf_{i_k}$$

(M et \prod commutent !).

Une famille infinie \mathcal{F} de suites complexes f est dite indépendante si toute sous-famille finie est indépendante.

2. La fonction somme des chiffres.

Soit $q \geq 2$ un entier fixé. Tout entier $n \geq 0$ peut s'exprimer en base q :

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) q^k ,$$

où $e_k(n) \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, et où

$$e_k(n) = 0 \text{ pour } k \geq \left[\frac{\log n}{\log q} \right] + 1 .$$

La suite $e_k = (e_k(n))$ (k fixé) est une suite périodique de période q^{k+1} .

La famille $\mathcal{E} = \{e_k ; k = 0, 1, 2, \dots\}$ est une famille indépendante ainsi qu'on peut le vérifier de façon élémentaire :

$$Me_k = \frac{q-1}{2} ; Me_k e_l = \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 \text{ si } k \neq l ; \dots$$

Plus généralement, soit $\Phi = \{\varphi_k ; k = 0, 1, 2, \dots\}$ une famille d'applications $\varphi_k : \{0, 1, \dots, q-1\} \rightarrow \mathbb{C}$. La famille $\Phi \circ \mathcal{E} = \{\varphi_k \circ e_k ; k=0,1,2,\dots\}$

est indépendante :

$$\prod_{k=0}^s \varphi_k \cdot e_k = \prod_{k=0}^s M_{\varphi_k} \cdot e_k = \prod_{k=0}^s \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \varphi_k(a) .$$

Il est tout à fait remarquable que la formule soit encore presque vraie pour s infini, pourvu que $|\varphi_k| = 1$ et $\varphi_k(0) = 1$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$. On montre qu'en effet [10] ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} \prod_{k=0}^{\infty} \varphi_k \cdot e_k(n) \right| = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q} \left| \sum_{a=0}^{q-1} \varphi_k(a) \right| .$$

Le cas particulier où $\varphi_k(x) = \exp 2i\pi x c_k$ mérite attention. Dans ce cas, posant

$$\zeta_c(n) = \exp 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(n) ,$$

on voit que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} \zeta_c(n) \right| = \prod_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\sin \pi q c_k}{q \sin \pi c_k} \right| ,$$

où on convient que

$$\left| \frac{\sin \pi q n}{q \sin \pi n} \right| = 1 \quad \text{si } n \in \underline{\mathbb{Z}} .$$

Le produit infini converge si, et seulement si, $\sum_{k=0}^{\infty} \|c_k\|^2 < \infty$, où

$$\|x\| = \min_{n \in \underline{\mathbb{Z}}} |x - n| .$$

Cette remarque conduit au résultat suivant [9] dont on trouvera une généralisation dans [3].

THÉORÈME 1. - Soit $\theta > 1$ un nombre réel. La suite λ_{θ}

$$\lambda_{\theta}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) c_k$$

est équirépartie (mod 1) si, et seulement si, θ n'est pas un nombre de Pisot.

3. Propriétés spectrales de certaines suites arithmétiques.

La caractérisation précédente peut être complétée comme suit.

Soit $\zeta = (\zeta(n))$ une suite infinie bornée appartenant à la classe S de Wiener ([11], chapitre 4, Generalized harmonic analysis), c'est-à-dire, admettant une corrélation γ :

$$\gamma(m) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \overline{\zeta(n)} \zeta(n+m)$$

existe pour tout $m \in \underline{\mathbb{N}}$. On prolonge γ à $\underline{\mathbb{Z}}$ par l'égalité $\gamma(-m) = \overline{\gamma(m)}$.

Un résultat classique établit l'existence d'une mesure positive bornée $d\sigma$ (appelée mesure spectrale de ζ) telle que

$$\gamma(m) = \int_0^1 \exp 2i\pi m x \, d\sigma(x) .$$

On sait que $d\sigma$, comme toute mesure, est somme de trois termes : une mesure ato-

mique $d\sigma^a$, une mesure absolument continue $f dx$, $f \in L^1(0, 1)$, une mesure purement singulière $d\sigma^s$. La nature de $d\sigma$ nous renseigne sur le comportement de la suite ζ . Ainsi, si la composante diffuse $f dx + d\sigma^s$ est nulle, alors ζ est presque-périodique (au sens de J.-P. BERTRANDIAS [2]). Si par contre la composante atomique $d\sigma^a$ est nulle, ζ est pseudo-aléatoire [1].

On peut montrer que la suite $\zeta = \prod_{j=0}^{\infty} \varphi_j \circ e_j$ dont on a vu quelques propriétés au paragraphe 2, appartient à la classe S de WIENER ([4], [7], [8]). Il s'ensuit que ζ admet une mesure spectrale.

THÉOREME 2. - La suite $\zeta = \prod_{j=0}^{\infty} \varphi_j \circ e_j$ est ou bien presque-périodique, ou bien pseudo-aléatoire à spectre purement singulier [6].

Dans le cas particulier où $\varphi_j(x) = \exp 2i\pi x c_j$, on obtient l'énoncé suivant qui prolonge et précise les résultats établis dans [4] et [5].

COROLLAIRE 1. - Soit ζ_c la suite

$$\zeta_c(n) = \exp 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(n) .$$

Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k - qc_{k-1}\|^2$ converge, ζ_c est presque-périodique. Si la série diverge, ζ_c est pseudo-aléatoire à mesure spectrale purement singulière.

COROLLAIRE 2. - Soit $\theta > 1$ un nombre réel, et soit ζ_θ la suite

$$\zeta_\theta(n) = \exp 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k e_k(n)$$

Si θ est un nombre de Pisot, alors ζ_θ est presque-périodique. Si θ n'est pas un nombre de Pisot, alors ζ_θ est pseudo-aléatoire à mesure spectrale purement singulière.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BASS (J.). - Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 1-69.
- [2] BERTRANDIAS (J.-P.). - Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p , Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 5, 1966, 106 p.
- [3] COQUET (J.). - Remarques sur les nombres de Pisot-Vijayaraghavan, Acta Arithm., Warszawa, t. 32, 1977, p. 79-87.
- [4] COQUET (J.) et MENDES FRANCE (M.). - Suites à spectre vide et suites pseudo-aléatoires, Acta Arithm., Warszawa, t. 32, 1977, p. 99-106.
- [5] KAKUTANI (S.). - Strictly ergodic symbolic dynamical systems, "Proceeding of the 6th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability", vol. 2, p. 319-326. - Berkeley, University of California Press, 1972.
- [6] KAMAE (T.), COQUET (J.) et MENDES FRANCE (M.) [**scaris au Bull. Soc. math. France**]
- [7] MAHLER (K.). - On the translation properties of a simple class of arithmetical functions, J. of Math. and Phys., t. 6, 1927, p. 158-163.
- [8] MENDES FRANCE (M.). - Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-

- aléatoires, J. Anal. math., Jerusalem, t. 20, 1967, p. 1-56 (Thèse Sc. math. Paris, 1967).
- [9] MENDES FRANCE (M.). - Deux remarques concernant l'équirépartition des suites, Acta Arithm., Warszawa, t. 14, 1968, p. 163-167.
- [10] MENDES FRANCE (M.). - Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1, J. Number Theory, t. 5, 1973, p. 1-15.
- [11] WIENER (N.). - The Fourier integral and certain of its applications. - New York, Dover publications, 1958.

(Texte reçu le 10 janvier 1977)

Michel MENDES FRANCE
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE
