Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

PHILIPPE TOFFIN

Un exemple d’utilisation de la méthode de Vinogradov

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1976-1977), exp. nº G7, p. G1-G3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A14_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° G7, 3 p.

UN EXEMPLE D'UTILISATION DE LA MÉTHODE DE VINOGRADOV

par Philippe TOFFIN

Le but de l'exposé est le résultat suivant qui est une amélioration d'un lemme de HUA [1] à savoir :

Il existe A , B , C , D strictement positifs tels que, pour tout polynôme $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ de degré $n \geqslant 2$, pour tout entier N et tout entier P tel que $0 < 2n|a_n|P \leqslant 1$, enfin pour tout réel λ situé dans $]0 , 1]$, on ait :

$$\left|\sum_{x=N+1}^{N+P} e(f(x))\right| \leqslant A \exp(Cn^3 \log n)\, P^{1-(\lambda/Dn^2\log n)} + \frac{B}{|a_n|^{1/(n-\lambda)}} ,$$

où $e(u) = \exp(2i\pi u)$.

L'intérêt d'un tel résultat est dans le fait qu'il ne fait pas intervenir d'approximation diophantienne de a_n .

Nous voulons ici dégager les idées essentielles de la démonstration.

Soit donc $S = \sum_{x=N+1}^{N+P} e(f(x))$. Le seul cas non trivial est celui où l'on a

$$\frac{1}{|a_n|^{1/(n-\lambda)}} \leqslant \frac{P}{2} \quad \text{et} \quad P \geqslant 2 .$$

<u>Une première idée est de faire intervenir une somme double au lieu d'une somme simple</u> : Soit P_1 un entier situé dans $[1 , \frac{P}{2}]$, qui sera fixé ultérieurement. On a :

$$\sum_{y=N}^{N+P-P_1} \sum_{x=1}^{P_1} e(f(x + y)) = P_1 \sum_{u=N+P_1}^{N+P-P_1} e(f(u)) + O(P_1^2) = P_1\, S + O(P_1^2) .$$

D'où

$$(1) \qquad |S| \leqslant \frac{1}{P_1} \sum_{y=N}^{N+P-P_1} |S^*(y)| + O(P_1) \quad \text{où} \quad S^*(y) = \sum_{x=1}^{P_1} e(f(x + y) - f(y)) .$$

La façon d'utiliser une somme double plutôt qu'une somme simple se concrétise en appliquant l'inégalité de Hölder à (1). Soit ℓ un entier $\geqslant 1$:

$$(2) \qquad |S|^{2\ell} \leqslant P_1^{-2\ell}\, P^{2\ell-1} \sum_{y=N}^{N+P-P_1} |S^*(y)|^{2\ell} + P_1^{2\ell} .$$

On va alors parvenir à obtenir une majoration, non de $|S^*(y)|^{2\ell}$, mais de $\sum_{y=N}^{N+P-P_1} |S^*(y)|^{2\ell}$.

En posant $Y_i = f^{(i)}(y)/i!$, on a $f(x + y) - f(y) = Y_1 x + Y_2 x^2 + \dots + Y_n x^n$.

Soit $\Omega_y = \{(\alpha_1 , \dots , \alpha_n) \in \underset{\sim}{R}^n ;\ \forall\, i = 1 , \dots , n ,\ |\alpha_i - Y_i| \leqslant \frac{1}{2} P_1^{-i} P^{-\rho}\}$,

où $\rho > 0$ sera fixé ultérieurement.

$|f(x+y) - f(y) - (\alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n)| \leqslant \frac{n}{2} P^{-\rho}$. D'où, pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \underset{\sim}{R}^n$:

$$|S^*(y)|^{2\ell} \ll T^{2\ell}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + P_1^{2\ell} P^{-2\rho\ell} \tag{3}$$

où $T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{x=1}^{P_1} e(\alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n)$.

<u>L'intérêt de</u> (3) <u>est d'avoir majoré</u> $|S^*(y)|^{2\ell}$ <u>par une fonction dont l'intégrale sur</u> Ω_y <u>est assez petite</u>

$$|S^*(y)|^{2\ell} \ll \frac{1}{\mathrm{vol}\,\Omega_y} \int_{\Omega_y} |T^{2\ell}|\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n + P_1^{2\ell} P^{-2\rho\ell}$$

et

$$\int_{\Omega_y} |T|^{2\ell}\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 |T|^{2\ell}\, \tau_y(\alpha_1 \dots \alpha_n)\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

où τ_y est la fonction caractéristique de Ω_y modulo $\underset{\sim}{Z}^n$. D'où

$$\sum_{y=N}^{N+P-P_1} |S^*(y)|^{2\ell} \ll P_1^{n(n+1)/2} P^{\rho n} \Lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 |T|^{2\ell}\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n + P_1^{2\ell} P^{-2\rho\ell+1}$$

où Λ est un majorant uniforme de $\sum_{y=N}^{N+P-P_1} \tau_y(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

La méthode de VINOGRADOV parvient à deux choses :

- majorer convenablement Λ ,
- majorer $\int_0^1 \dots \int_0^1 |T|^{2\ell}\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n$.

<u>Majoration de</u> Λ .

$$Y_{n-1}(y) = na_n y + a_{n-1} ;$$

$$\tau_y(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \tau_{y_0}(\alpha_1 \dots \alpha_n) = 1 \Rightarrow \|Y_{n-1}(y) - Y_{n-1}(y_0)\| \leqslant P_1^{-(n-1)} P^{-\rho} .$$

Or $\|na_n(y-y_0)\| = |na_n(y-y_0)|$, car $2n|a_n|P \lesssim 1$.

Pour un y_0 fixé, le nombre de y situés dans $[N, N+P-P_1]$ tels que

$$\tau_y(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \tau_{y_0}(\alpha_1 \dots \alpha_n) = 1$$

pour au moins un $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ est donc majoré par le nombre de y de $[N, N+P-P_1]$ tels que $|na_n(y-y_0)| \leqslant P_1^{-(n-1)} P^{-\rho}$. Ce nombre est $\ll P_1^{-(n-1)} P^{-\rho} |a_n|^{-1}$. D'où, d'après (2) :

$$|S|^{2\ell} \ll P_1^{-2\ell+(n(n+1)/2)-(n-1)} P^{2\ell-1+\rho(n-1)} |a_n|^{-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 |T|^{2\ell}\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n + P_1^{2\ell} + P^{2\ell(1-\rho)} .$$

Or VINOGRADOV, puis récemment KARACUBA, ont obtenu une majoration non triviale de $\int_0^1 \dots \int_0^1 |T|^{2\ell}\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n$.

Pour $n \geqslant 2$, $P_1 \geqslant 1$, $\ell \geqslant C_1 n^2 \log n$ où C_1 est une constante absolue, on a

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left|\sum_{x=1}^{P_1} e(\alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n)\right|^{2\ell} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \leqslant \exp(Cn^3 \log n)\, P_1^{2\ell-n(n+1)/2} ,$$

où C est une constante absolue. D'où

$$|S|^{2\ell} \ll P_1^{-(n-1)} P^{2\ell-1+\rho(n-1)} |a_n|^{-1} \exp(Cn^3 \log n) + P_1^{2\ell} + P^{2\ell(1-\rho)} .$$

Il reste alors à choisir P_1 et ρ pour que le second membre s'écrive sous la forme attendue ; distinguons deux cas :

(α) $2^{n-\lambda} \leqslant \frac{1}{|a_n|}$. - Donc $2 \leqslant 1/|a_n|^{1/(n-\lambda)} \leqslant P/2$. On prend

$$P_1 = [1/|a_n|^{1/(n-\lambda)}] \quad \text{et} \quad \ell = [C_1 n^2 \log n] + 1 .$$

Alors,

$$|S|^{2\ell} \ll P^{2\ell-1+\rho(n-1)} |a_n|^{(\lambda-1)/(n-\lambda)} \exp(Cn^3 \log n) + P_1^{2\ell} + P^{2\ell(1-\rho)} .$$

Comme on a $|a_n|^{(\lambda-1)/(n-\lambda)} \ll P^{1-\lambda}$:

$$|S|^{2\ell} \ll P^{2\ell+\rho(n-1)-\lambda} \exp(Cn^3 \log n) + P_1^{2\ell} + P^{2\ell(1-\rho)} .$$

On prend ρ tel que $2\ell + \rho(n-1) - \lambda = 2\ell(1-\rho)$, soit $\rho = \lambda/(2\ell + n - 1)$. Le résultat final en découle.

(β) $2^{n-\lambda} > \frac{1}{|a_n|}$. - On prend $P_1 = [P^{1-\rho}]$.

$$|S|^{2\ell} \ll P^{2\ell-1+\rho(n-1)-(n-1)(1-\rho)} \exp(Cn^3 \log n) + P^{(1-\rho)2\ell}$$

soit

$$|S|^{2\ell} \ll P^{2\ell+2\rho(n-1)-n} \exp(Cn^3 \log n) + P^{2\ell(1-\rho)}$$

en prenant la même valeur pour ℓ que dans le cas (α) .

On prend alors ρ tel que $2\ell + 2\rho(n-1) - n = 2\ell(1-\rho)$, soit $\rho = n/2(\ell+n-1)$. Le résultat en découle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HUA (L. K.). - Additive theory of prime numbers. Translated from the Chinese. - Providence, American mathematical society, 1965 (Translations of mathematical Monographs, 13).

[2] TITCHMARSCH (E. C.). - The theory of the Riemann Zeta-function. - Oxford, at the Clarendon Press, 1951.

[3] VINOGRADOV (I. M.). - The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. Translated from the Russian. - London, New York, Interscience Publishers, 1954.

(Texte reçu le 13 juillet 1977)

Philippe TOFFIN
UER de Sciences
Université de Caen
Esplanade de la Paix
14032 CAEN CEDEX