Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

GEORGES RHIN

Sur la répartition modulo 1 de quelques suites arithmétiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1976-1977), exp. nº G3, p. G1-G4
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A12_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° G3, 4 p.

18 octobre 1976

SUR LA RÉPARTITION MODULO 1 DE QUELQUES SUITES ARITHMÉTIQUES

par Georges RHIN

1. Rappels.

Définition. - Soit x un réel, $[x]$ sa partie entière, et $\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire. Une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels est équirépartie modulo 1 (E. R. (1)) si quels que soient $0 \leqslant a < b < 1$

$$\lim_{N\to+\infty} D_N(a , b , (x_n)) = 0 ,$$

où $ND_N(a , b , (x_n)) = F_N(a , b , (x_n)) - (b - a)N$, et $F_N(a , b , (x_n))$ est le nombre d'entiers n $(1 \leqslant n \leqslant N)$ tels que $a \leqslant \{x_n\} < b$.

On appelle discrépance de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la fonction

$$D_N((x_n)) = \sup_{0\leqslant a<b<1} D_N(a , b , (x_n)) .$$

L'inégalité d'Erdös-Turan [4] donne une relation entre la discrépance et certaines sommes trigonométriques : Pour tout $m \geqslant 1$,

$$ND_N((x_n)) \leqslant K(\frac{N}{m + 1} + \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h} |\sum_{n=1}^{N} e(hx_n)|) ,$$

où K est une constante numérique et $e(t) = \exp(2\pi i t)$.

2. Répartition modulo 1 de quelques suites arithmétiques.

Nous donnons ici quelques exemples de suites $(f(n))_{n\geqslant 1}$, où f est un polynôme ou une fonction entière. L'étude de ces suites se fait avec la méthode de I. M. VINOGRADOV [7].

La suite $(n\alpha)_{n\geqslant 1}$ est E. R. (1) si, et seulement si, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. La suite $(f(n))_{n\geqslant 1}$, où f est un polynôme, est E. R. (1) si, et seulement si, $f(X) - f(0)$ a un coefficient irrationnel. Le premier résultat utilise l'inégalité

$$|\sum_{n=M}^{N} e(\alpha_n)| \leqslant \frac{1}{2\|\alpha\|} \text{ si } N > M ,$$

où $\|\alpha\| = \min(\{\alpha\} , 1 - \{\alpha\})$, et pour le deuxième résultat, on fait une récurrence sur le degré du polynôme en utilisant la formule ([4], page 45) :

$$|\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e(hf(n))|^2 \leqslant \frac{N + H - 1}{NH}$$
$$+ 2 \frac{N + H - 1}{N^2 H^2} \sum_{h=1}^{H-1} (H - h)|\sum_{n=1}^{N-H} e(h(f(n) - f(n + h))| .$$

Enfin si f est une fonction entière réelle sur l'axe réel, non polynomiale, telle que

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{Log}\log M(r)}{\operatorname{Log}\log r} < \frac{5}{4} ,$$

où $M(r) = \sup_{|z|\leqslant r} |f(z)|$, alors $(\lambda f(n))_{n\geqslant 1}$ est E. R. (1) pour tout réel λ non nul [4]. On a le même résultat si $f(x) = \exp(c(\log x)^{\gamma})$ avec $c > 0$ et $0 < \gamma < \frac{3}{2}$ [2].

Si dans les suites précédentes, on remplace la suite des entiers par la suite des nombres premiers, on obtient les résultats suivants, qui se démontrent en utilisant les majorations des sommes trigonométriques doubles de I. M. VINOGRADOV.

Lorsque f est un polynôme, la suite $(f(p_n))_{n\geqslant 1}$ (où $(p_n)_{n\geqslant 1}$ désigne la suite croissante des nombres premiers) est E. R. (1) si, et seulement si, $f(X) - f(0)$ a un coefficient irrationnel. Ce résultat a été démontré quand f est de degré 1 par TURAN en supposant vraie l'hypothèse de Riemann puis par I. M. VINOGRADOV, en 1937.

Pour les degrés supérieurs, voir I. M. VINOGRADOV [7] et G. RHIN [5]. Si f est une fonction entière la suite $(f(p_n))_{n\geqslant 1}$ est E. R. (1) à condition de remplacer la constante $\frac{5}{4}$ par $\frac{7}{6}$ [6].

Nous donnons, dans le paragraphe suivant, une idée des démonstrations de ces résultats.

3. Schéma des démonstrations.

Il faut majorer une somme du type

$$S = \sum_{p\leqslant N} e(f(p))$$

où f est l'une des fonctions définies au paragraphe précédent. Prenons le cas simple où $f(x) = \alpha x$.

Soit $0 < \varepsilon < 0{,}01$, et posons $\tau = N \exp(-r^{\varepsilon})$ où $r = \log N$.

Pour N assez grand, on peut écrire α sous la forme

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}$$

avec a , q entiers, $|\theta| \leqslant 1$, $(a , q) = 1$ et $1 < q \leqslant \tau$. Nous examinerons les trois cas suivants

1° $q \leqslant r$,

2° $r < q \leqslant \exp(r^{\varepsilon})$,

3° $\exp(r^{\varepsilon}) < q \leqslant \tau$.

Premier cas. - On partage l'intervalle $]1 , N]$ en intervalles du type $I =]N_1 - A , N_1]$ où $A = [N \exp(-r^{0,25})]$. Si $p \in I$,

$$\alpha p = \frac{ap}{q} + \frac{\theta(p - N_1)}{q\tau} + \frac{\theta N_1}{q\tau} ,$$

où $\theta N_1/q\tau$ est fixe pour p dans I , et $\theta(p - N_1)/q\tau$ est petit, alors

$$|S_I| = |\sum_{p\in I} e(\alpha p)| \ll |\sum_{p\in I} e(\frac{ap}{q})| + A^2 N^{-1} \exp(r^\varepsilon) .$$

Soient $u > 0$, $x > 1$, ℓ et q des entiers tels que $(\ell , q) = 2$, $q \leqslant (\log x)^u$, alors le nombre $\pi(x , \ell , q)$ de nombres premiers, inférieurs à x , et congrus à ℓ modulo q , vérifie le théorème de Siegel-Walfish

$$|\pi(x , \ell , q) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)}| \leqslant c(u) \exp(-c \sqrt{\log x}) ,$$

où $\pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1$, φ est la fonction d'Euler, c est une constante, et $c(u)$ ne dépend que de u . Alors

$$|S_I| \ll |\sum_{1\leqslant \ell\leqslant q, (\ell,q)=1} e(\frac{\ell a}{q})| \frac{\pi(N_1) - \pi(N_1 - A)}{\varphi(q)} + Nq \exp(-c \sqrt{\log N_1}) + A^2 N^{-1} \exp(r^\varepsilon) ,$$

et, d'après HUA [1],

$$|S_I| \ll (\frac{\pi(N_1) - \pi(N_1 - A)}{\varphi(q)}) q^\varepsilon + Nq \exp(-c \sqrt{r}) + A^2 N^{-1} \exp(r^\varepsilon) ,$$

donc $|S| \ll \pi(N) q^\varepsilon/\varphi(q)$ et, puisque $\varphi(q) \gg q^{0,9}$, nous avons obtenu une majoration non triviale de S dans ce cas.

Troisième cas. - Soit $F = \prod_{p\leqslant N^{0,25}} P$, $\mathcal{U} = \{n \leqslant N ; (n , F) = 1\}$, et $\mathcal{U}_j$ le sous-ensemble de $\mathcal{U}$ dont tous les éléments ont j facteurs, et nous posons $1 \in \mathcal{U}_1$. Alors $\mathcal{U} = \cup_{1\leqslant j\leqslant 3} \mathcal{U}_j$. Soit

$$\mathbb{S} = \sum_{u\in\mathcal{U}} e(\alpha u) ,$$

alors

$$\mathbb{S} = \sum_{k\leqslant N} (\sum_{d|(F,k)} \mu(d)) e(\alpha k) = \sum_{d|F, d\leqslant N} \mu(d) \sum_{dm\leqslant N} e(\alpha dm) ,$$

où μ est la fonction de Möbius.

Soit $S_j = \sum_{u\in\mathcal{U}_j} e(\alpha u)$, alors $\mathbb{S} = S_1 + S_2 + S_3$ et $S = S_1 + O(N^{0,25})$.

Il reste donc à majorer $\mathbb{S}$, S_2 et S_3 . Or ces sommes sont des sommes doubles sur des domaines "pas trop aplatis" sauf dans le cas $\sum_{m\leqslant N/d} e(\alpha dm)$ avec d petit, mais alors m parcourt tous les entiers jusqu'à N/d , et nous savons majorer ce type de somme. On trouve $S \ll \pi(N) q^{-c_0}$ dans ce cas.

Dans le deuxième cas, on utilise une méthode intermédiaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HUA (L. K.). - Additive theory of prime numbers. - Providence, American mathematical Society, 1965 (Translations of mathematical Monographs, 13).

[2] KARACUBA (A. A.). - Estimates for trigonometric sums by Vinogradov's method and some applications, Proc. Steklov Inst. Math., t. 112, 1973, p. 251-265 ; [en russe] Trudy Mat. Inst. Steklov, t. 112, 1971, p. 241-245.

[3] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). - Uniform distribution of sequences. - New York, Wiley and Sons, 1974 (Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience).

[4] RAUZY (G.). - Propriétés statistiques de suites arithmétiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1976 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 15).

[5] RHIN (G.). - Sur la répartition modulo 1 des suites $f(p)$, Acta Arithm., Warszawa, t. 23, 1973, p. 217-248.

[6] RHIN (G.). - Répartition modulo 1 de $f(p_n)$ quand f est une série entière, "Répartition modulo 1", p. 176-244. - Berlin, Springer-Verlag, 1975 (Lecture Notes in Mathematics, 475).

[7] VINOGRADOV (I. M.). - Trigonometrical sums in number theory. - Calcutta, Statistical publishing Society, 1975.

(Texte reçu le 6 juillet 1977)

Georges RHIN
5 rue Maurice Berlier
57000 METZ