Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Marthe Grandet-Hugot

Introduction aux exposés sur l'équirépartition

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1976-1977), exp. nº G1, p. G1-G3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des Nombres)
18è année, 1976/77, n° G1, 3 p.

INTRODUCTION AUX EXPOSÉS SUR L'ÉQUIRÉPARTITION

par Marthe GRANDET-HUGOT

1. Rappel de certains résultats supposés connus.

Tout nombre réel α peut se mettre sous la forme

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\} ,$$

où $[\alpha] \in \mathbb{Z}$ est appelé *partie entière* de α, et $\{\alpha\} \in [0 , 1[$ est la *partie fractionnaire* de α.

DÉFINITION 1. - *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels,* $0 \leqslant u_n < 1$, *et soient* a *et* b *deux nombres de l'intervalle* $[0 , 1[$, *on pose*

$$A(N ; a , b) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N} ; \ u_n \in [a , b]\} ;$$

on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* équirépartie dans $[0 , 1[$ *si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} A(N ; a , b) = b - a \tag{1}$$

pour tout couple (a , b).

DÉFINITION 2. - *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels, on dit que cette suite est* équirépartie modulo 1, *si la suite* $(\{x_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ *est équirépartie dans* $[0 , 1[$.

On obtient alors les deux critères suivants d'équirépartition modulo 1 :

THÉORÈME 1 (première forme du critère de Weyl (1916)). - *Pour qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres réels de l'intervalle* $[0 , 1[$ *soit équirépartie, il faut et il suffit que, pour toute fonction* f, *intégrable au sens de Riemann sur* $[0 , 1]$, *on ait*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(u_n) = \int_0^1 f(x)\, dx . \tag{2}$$

THÉORÈME 2 (deuxième forme du critère de Weyl (1916)). - *Pour qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres réels soit équirépartie* modulo 1, *il faut et il suffit que, pour tout* $h \in \mathbb{Z}^*$, *on ait*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp(2\pi i h x_n) = 0 .$$

Ce critère permet de montrer que la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, α est irrationnel. Le théorème suivant, dit *Théorème fondamental de Van der Corput* (1931), permet de montrer un résultat analogue pour les suites $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$, où n est un polynôme, la suite $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, P a au moins un coefficient irrationnel autre que le terme constant.

THÉORÈME 3. - *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels* ; *si*, *pour tout entier positif* h , *la suite* $(x_{n+h} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équirépartie* modulo 1 , *alors la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équirépartie* modulo 1 .

D'autres exemples de suites équiréparties modulo 1 peuvent être obtenues à partir du théorème de Fejer.

THÉORÈME 4. - *Soit* g *une fonction réelle définie sur* $[1 , + \infty[$ *et possèdant les propriétés suivantes* :

1° g *est continûment différentiable* ;

2° g *est croissante, et* $\lim_{t\to\infty} g(t) = + \infty$;

3° g' *est décroissante, et* $\lim_{t\to\infty} g'(t) = 0$,

4° $\lim_{t\to\infty} tg'(t) = + \infty$.

Alors, la suite $(g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est équirépartie* modulo 1 .

Par exemple, la suite $(an^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$, où $0 < \alpha < 1$, est équirépartie modulo 1 .

Parmi les théorèmes métriques, nous signalerons simplement le théorème de Koksma et ses deux corollaires importants.

THÉORÈME 5. - *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions réelles dérivables sur un intervalle* $[\alpha , \beta]$. *Posons*

$$F_{m,n}(t) = f_m(t) - f_n(t) , \quad m \neq n .$$

Supposons que, pour tout couple (m , n) *d'entiers, la dérivée* $F'_{m,n}$ *est monotone sur* $[\alpha , \beta]$ *et ne s'y annule pas.*

Soit

$$A_N = \frac{1}{N^2} \sum_{n=2}^{N} \sum_{m=1}^{n-1} \max\left(\frac{1}{|F'_{m,n}(\alpha)|} , \frac{1}{|F'_{m,n}(\beta)|}\right) .$$

On suppose, de plus, qu'il existe une suite $(N_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *d'entiers naturels tels que*

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{N_{\nu+1}}{N_\nu} = 1 ,$$

et que la série $\sum A_{N_\nu}$ *converge.*

Alors, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *est équirépartie* modulo 1 *pour presque tout* $t \in [\alpha , \beta]$ (*au sens de la mesure de Lebesgue*).

En particulier, si les fonctions f_n sont dérivables, et vérifient

$$|f'_m(t) - f'_n(t)| \geqslant K > 0$$

pour tout couple d'entiers (m , n) , où K est une constante, la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie pour presque tout t .

Ce résultat conduit aux deux corollaires suivants du théorème de Koksma, appliqués à la fonction exponentielle :

Soit λ un nombre réel, la suite $(\lambda t^n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout t supérieur à 1.

Soit α un nombre réel supérieur à 1, la suite $(t\alpha^n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout t.

Toutefois on n'a pas déterminé de couple (λ, α) tel que la suite $(\lambda\alpha^n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ soit équirépartie modulo 1.

2. Liste indicative de sujets pouvant être étudiés.

(a) Equirépartition modulo 1 :

- Nombres normaux.
- Fonctions pseudo-aléatoires.
- Méthode de Vinogradov.
- Fonctions de répartition, lien avec les probabilités.
- Théorie ergodique et équirépartition.
- Equirépartition continue (C-équirépartition).

(b) Equirépartition dans les groupes compacts :

- Définitions, critère de Weyl, théorème fondamental, ...
- Application à quelques groupes particuliers : Z_p , Z_g , ...

(c) Equirépartition dans les groupes localement compacts :

- Définitions, théorèmes généraux.
- Application à quelques groupes particuliers : R , Z , Q_p , anneaux d'adèles, anneaux d'entiers algébriques, corps de séries formelles, ...

3. Bibliographie sommaire.

[1] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). - Uniform distribution of sequences. - New York, Wiley and Sons, 1974 (Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience).

Cet ouvrage contient une bonne bibliographie sur la plupart des sujets indiqués ci-dessus.

[2] RUDIN (W.). - Fourier analysis on groups. - New York, Interscience, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 12).

Cet ouvrage peut constituer une bonne introduction pour l'étude des éléments d'analyse harmonique nécessaires pour aborder l'équirépartition dans les groupes compacts et localement compacts.

(Texte reçu le 8 novembre 1976)

Marthe GRANDET-HUGOT
Mathématiques
Université de Caen
14032 CAEN CEDEX