ERIC REYSSAT

Travaux récents de G. V. Čudnovskij

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 2 (1976-1977), exp. nº 29, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_2_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° 29, 7 p.

TRAVAUX RÉCENTS DE G. V. ČUDNOVSKIJ

par Eric REYSSAT

Le but de cet exposé est de présenter une méthode, due à G. V. ČUDNOVSKIJ, permettant de raffiner les techniques classiques de transcendance.

Cette méthode est employée pour améliorer le résultat suivant, découlant des travaux de E. G. STRAUS (Cf. [4]).

THÉORÈME 1. - Soient f une fonction entière d'ordre fini $\leqslant \rho$, transcendante, et K un corps de nombres algébriques. Alors l'ensemble S_K des points de K en lesquels toutes les dérivées de f sont des entiers rationnels est fini et de cardinal $\leqslant \rho[K:\mathbb{Q}]$.

Ce résultat a été généralisé par T. SCHNEIDER au cas d'une fonction méromorphe [3].

Par ailleurs, le problème se posait de savoir si la majoration $\rho[K:\mathbb{Q}]$ était la meilleure possible ou non. Il est clair qu'on ne peut obtenir une borne plus petite que ρ comme le montre l'exemple suivant :

$f(z) = \exp(P(z - \alpha))$, où α est un nombre algébrique, et P est un polynôme à coefficients entiers rationnels et dont les racines x_i sont des entiers rationnels distincts ; l'ordre de f est le degré de P, et tous les points $\alpha + x_i$ sont dans $S_{\mathbb{Q}(\alpha)}$.

La méthode de ČUDNOVSKIJ lui a permis de montrer que ce meilleur résultat possible est effectivement le bon :

THÉORÈME 2 (ČUDNOVSKIJ). - Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, d'ordre $\leqslant \rho$, et transcendante. L'ensemble $S_{\overline{\mathbb{Q}}}$ des points algébriques en lesquels toutes les dérivées de f sont des entiers rationnels est fini et de cardinal majoré par ρ.

La preuve du théorème 2 donnée ici est essentiellement celle de G. V. ČUDNOVSKIJ, à l'exception de la dernière partie (contradiction).

L'idée essentielle de la méthode est de remplacer la classique fonction auxiliaire par un système de fonctions vérifiant des relations de conjugaison, ce qui permet de remplacer les majorations triviales des conjugués de certains nombres algébriques par des majorations analytiques plus fines.

La démonstration, par l'absurde, comporte trois parties :

- Construction du système de fonctions auxiliaires.
- Mise en évidence d'un système d'inégalités liant les ordres des zéros des fonc-

tions.

- Contradiction du système précédent.

1. Construction des fonctions auxiliaires.

Dans toute la suite, on suppose que les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées, et que $S_{\overline{\mathbb{Q}}}$ contient n points $w_1 , \dots , w_n$ avec $n > \rho$. On note K une extension finie galoisienne de $\mathbb{Q}$ contenant les w_i , d son degré, G son groupe de Galois.

La construction des fonctions auxiliaires utilise la remarque suivante :

LEMME 1.1. - Soient λ_1 , λ_2 deux nombres algébriques, w un point de $S_{\overline{\mathbb{Q}}}$, et P un polynôme dans $\mathbb{Z}[X , Y]$. Pour $i = 1 , 2$, on note

$$F_i(z) = P(z + \lambda_i , f(z)) .$$

On suppose qu'il existe un plongement $g : \mathbb{Q}(w , \lambda_1 , \lambda_2) \hookrightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$(w + \lambda_1)^{(g)} = w + \lambda_2 .$$

Alors, pour tout entier naturel k ,

$$(F_1^{(k)}(w))^{(g)} = F_2^{(k)}(w) .$$

Démonstration. - Il suffit de voir que les coefficients de P et les dérivées de f au point w sont invariants par g .

Pour utiliser ce lemme, on cherche alors à construire une famille $(\lambda_a)_{a\in A}$ de nombres algébriques vérifiant la propriété suivante :

Si $a \in A$, $i \in [1 , n]$ et $g \in G$, il existe alors un élément a' de A tel que

$$(1) \qquad (w_i + \lambda_a)^{(g)} = \lambda_{a'} + w_i \quad \text{ou encore} \quad \lambda_{a'} = \lambda_a^{(g)} + w_i^{(g)} - w_i .$$

Il semble donc naturel que les λ_a forment un ensemble stable par les éléments de G , et par addition des termes du type $w_i^{(g)} - w_i$. On choisit alors la famille

$$(\lambda_a = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{g\in G} a(i , g)\, w_i^{(g)})_{a=(a(i,g))\in \mathbb{Z}^{nd}} .$$

La relation (1) est clairement vérifiée. Plus précisément, si on note (e_{ig}) la base canonique de $\mathbb{Z}^{nd}$, alors

$$\lambda_a^{(g)} + w_i^{(g)} - w_i = \lambda_{g(a)+f_{ig}} ,$$

où $f_{ig} = e_{ig} - e_{i1}$, et $g(a)$ est défini par ses composantes $g(a)(i,h)=a(i,hg^{-1})$.

En particulier, on a les règles de calcul évidentes suivantes

$$g(a + a') = g(a) + g(a') \; ; \qquad g^{-1}(g(a)) = a \; ; \qquad g(e_{ih}) = e_{i,hg} .$$

Enfin, si on note $\|a\| = \max_{i,g} |a(i , g)|$, alors $\|g(a)\| = \|a\|$, et $\|f_{ig}\| \leq 2$.

Le lemme suivant permet d'estimer la taille de certains nombres algébriques.

LEMME 1.2. - Soient w un point de $S_{\mathbb{Q}}$, λ un nombre algébrique, et

$$Q(X , Y) = \sum_{\ell_1=0}^{L_1} \sum_{\ell_2=0}^{L_2} q(\ell_1 , \ell_2) X^{\ell_1} Y^{\ell_2}$$

un polynôme dans $\mathbb{Z}[X , Y]$ de hauteur H . On note $F_\lambda(z) = Q(z + \lambda , f(z))$. Alors, si $k \geqslant 0$,

1° $F^{(k)}(w) \in \mathbb{Z}[w , \lambda]$,

2° $\mathrm{den}(w + \lambda)^{L_1}$ est un dénominateur de $F^{(k)}(w)$,

3° il existe une constante c_1 ne dépendant que de f , w , et λ telle que

$$\overline{|F^{(k)}(w)|} \leqslant k \log(k + 1) + c_1(L_1 + L_2 + k) + \log H .$$

Démonstration. - Les deux premières assertions sont évidentes. La troisième résulte de la formule de Cauchy appliquée à f^ℓ pour $\ell \leqslant L_2$.

On fixe maintenant un entier N suffisament grand devant n , d , $1/(n - \rho)$, $\max_i H(w_i)$, et on note L un paramètre suffisament grand devant N pour légitimer la suite de la démonstration. Les constantes c_2 , ... , c_6 dans la suite ne dépendent que de N et non de L . On note enfin

$$L_1 = [L (\log L)^{-1/4}] \qquad L_2 = [(\log L)^{3/4}] .$$

LEMME 1.3. - Il existe une constante c_2 et un polynôme non nul

$$P(X , Y) = \sum_{\ell_1=0}^{L_1} \sum_{\ell_2=0}^{L_2} p(\ell_1 , \ell_2) X^{\ell_1} Y^{\ell_2}$$

à coefficients entiers rationnels, tels que, si l'on pose $F_a(z) = P(z + \lambda_a , f(z))$ pour $a \in \mathbb{Z}^{nd}$, alors

$$F_a^{(k)}(w_i) = 0 \quad \text{pour} \begin{cases} i = 1 , \dots , n \\ k = 0 , \dots , L - 1 \\ \|a\| \leqslant N \end{cases}$$

et

$$\max|p(\ell_1 , \ell_2)| \leqslant \exp(c_2 L \sqrt{\log L}) .$$

Démonstration. - Il s'agit d'un système linéaire en les $p(\ell_1 , \ell_2)$. Le nombre d'équations est $nL(2N + 1)^{nd}$ et le nombre d'inconnues est $(L_1+1)(L_2+1) \geqslant L \sqrt{\log L}$.

Les coefficients ont un dénominateur commun $\leqslant c_3^{L_1}$ et une maison $\leqslant L \,!\, c_4^L$ d'après le lemme 1.2 appliqué aux polynômes $X^{\ell_1} Y^{\ell_2}$. Le lemme de Siegel donne le résultat.

Notation. - On notera $u_{i,a}$ l'ordre du zéro w_i de F_a , qui est donc $\geqslant L$ pour $\|a\| \leqslant N$. Remarquons que $u_{i,a}$ est fini puisque, P étant non nul et f transcendante, la fonction F_a est non identiquement nulle, et méromorphe.

Les fonctions F_a vérifient la propriété de conjugaison suivante :

LEMME 1.4. - Pour $a \in \underset{\sim}{Z}^{nd}$, $g \in G$ et $i \in [1 , n]$,

$$u_{i,a} = u_{i,g(a)+f_{ig}} \quad \text{et} \quad \left(F_a^{(u_{i,a})}(w_i)\right)^{(g)} = F_{g(a)+f_{ig}}^{(u_{i,g(a)+f_{ig}})}(w_i) \ .$$

Démonstration. - Il suffit d'appliquer le lemme 1.1 qui montre que, pour $k \geqslant 0$,

$$F_a^{(k)}(w_i)^{(g)} = F_{g(a)+f_{ig}}^{(k)}(w_i) \ .$$

2. Propriétés des fonctions auxiliaires et système d'inégalités.

Les fonctions F_a ayant beaucoup de zéros ont nécessairement des dérivées petites aux points w_i , ce qui est précisé dans le lemme suivant.

LEMME 2.1. - Si $\|a\| \leqslant N$ et $i \in [1 , n]$, alors

$$\log|F_a^{(u_{i,a})}(w_i)| \leqslant u_{i,a} \log u_{i,a} - \frac{1}{\rho} (\log u_{i,a}) \sum_{j=1}^n u_{j,a} + o(u_{i,a} \log u_{i,a}) \ .$$

Démonstration. - On pose $f = g/h$, où g et h sont entières d'ordre $\leqslant \rho$. La fonction $G_a = h^{L_2} F_a$ est alors entière, et a au point w_j un zéro d'ordre $u_{j,a}$. Soit $c_5 \geqslant 1 + \max_j |w_j|$; alors

$$|F_a^{(u_{i,a})}(w_i)| = |h^{-L_2}(w_i)| \ |G_a^{(u_{i,a})}(w_i)| \leqslant c_6^{-L_2} u_{i,a} ! \ |G_a|_{c_5} \ ,$$

d'après le formule de Cauchy. On note $R = u_{i,a}^{1/\rho}$; le lemme de Schwarz montre que

$$\log|G_a|_{c_5} \leqslant \log|G_a|_{c_5 R} - (\log R) \sum_{j=1}^n u_{j,a} \ .$$

Enfin, puisque g et h sont d'ordre $\leqslant \rho$, la majoration des coefficients de P montre que

$$\log|G_a|_{c_5 R} = o(u_{i,a} \log u_{i,a}) \ ,$$

d'où le résultat.

Les propriétés algébriques des fonctions F_a nous permettent de déduire du lemme précédent le système d'inégalités cherché.

LEMME 2.2. - Pour i , $j \in [1 , n]$ et $g \in G$, on note $t(i,j,g) = f_{jg} - f_{ig}$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2} d \ (n - \rho) > 0$; alors

$$\text{(S)} \qquad (d\rho + \varepsilon)u_{i,a} \geqslant \sum_{j=1}^n \sum_{g\in G} u_{j,a+t(i,j,g)}$$

pour $i = 1 , \ldots , n$ et $\|a\| \leqslant N - 2$.

Démonstration. - Le nombre $F_a^{(u_{i,a})}(w_i)$ étant algébrique, il vérifie, d'après le lemme 1.4,

$$- d \log \ \mathrm{den}(F_a^{(u_{i,a})}(w_i)) \leq \sum_{g\in G} \log \left| (F_a^{(u_{i,a})}(w_i))^{(g)} \right|$$

$$= \sum_{g\in G} \log \left| F_{g(a)+f_{ig}}^{(u_{i,g(a)+f_{ig}})}(w_i) \right| .$$

En appliquant le lemme 2.1 à chaque terme de cette somme, et en utilisant le lemme 1.4, on obtient

$$- d \log \mathrm{den}(F_a^{(u_{i,a})}(w_i))$$

$$= du_{i,a} \log u_{i,a} - \frac{1}{\rho} (\log u_{i,a}) \sum_{j=1}^{n} \sum_{g\in G} u_{j,g(a)+f_{ig}} \pm o(u_{i,a} \log u_{i,a}) .$$

Or,

$$d \log \mathrm{den}(F_a^{(u_{i,a})}(w_i)) = o(u_{i,a} \log u_{i,a})$$

d'après le lemme 1.2. Par suite, si L est assez grand,

$$(d\rho + \varepsilon)u_{i,a} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{g\in G} u_{j,g(a)+f_{ig}} .$$

Or, d'après le lemme 1.4 employé avec j et g^{-1} ,

$$u_{j,g(a)+f_{ig}} = u_{j,a+g^{-1}(f_{ig})+f_{jg^{-1}}} = u_{j,a+t(i,j,g^{-1})} ,$$

donc

$$\sum_{g\in G} u_{j,g(a)+f_{ig}} = \sum_{g\in G} u_{j,a+t(i,j,g)} ,$$

ce qui prouve le lemme.

3. Contradiction.

Posons $Y = d\rho + \varepsilon$, avec les notations du lemme 2.2. Le système (S) s'écrit

(S) $Y\, u_{i,a} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{g\in G} u_{j,a+t(i,j,g)}$ pour $\|a\| \leqslant N - 2$ et $i = 1 , \ldots , n$,

avec les quatre conditions suivantes

1° $Y > nd$,

2° $t(i,j,g) = -t(j,i,g)$,

3° $\|t(i,j,g)\| \leqslant 4$,

4° $u_{i,a} \geqslant 0$ pour $i = 1 , \ldots , n$ et $a \in \underset{\sim}{Z}^{nd}$.

En itérant ce système M fois, on obtient

$$(S_M) \qquad Y^M u_{i,a} \geqslant \sum_{j_1,\ldots,j_M} \sum_{g_1,\ldots,g_M} u_{j_M, a+t(i,j_1,g_1)+\ldots+t(j_{M-1},j_M,g_M)}$$

pour $\|a\| \geqslant N - 4M + 2$ et $i = 1 , \ldots , n$.

Pour $j \in [1, n]$ et $b \in \mathbb{Z}^{nd}$, notons $C(M, i, j, a, b)$ le nombre de termes $u_{j,b}$ apparaissant formellement dans cette dernière somme.

LEMME 3.1. - $C(M, i, j, a, b) = C(M, j, i, b, a)$.

Démonstration. - En effet, $C(M, i, j, a, b)$ est le cardinal de l'ensemble

$$E(M, i, j, a, b) = \{(j_1, \dots, j_{M-1}, g_1, \dots, g_M) \in [1, n]^{M-1} \times G^M$$
$$\text{tels que } t(i, j_1, g_1) + \dots + t(j_{M-1}, j, g_M) = b - a\}.$$

Or, l'application $(j_1, \dots, j_{M-1}, g_1, \dots, g_M) \longmapsto (j_{M-1}, \dots, j_1, g_M, \dots, g_1)$ est une bijection de $E(M, i, j, a, b)$ sur $E(M, j, i, b, a)$ d'après la condition 2° du système (S), ce qui prouve le lemme.

COROLLAIRE. - Si $j \in [1, n]$, $b \in \mathbb{Z}^{nd}$ et $N \geqslant 8M$, alors

$$Y^{2M} \geqslant (C(M, 1, j, 0, b))^2.$$

Démonstration. - En effet, en appliquant deux fois le système (S_M), on obtient

$$Y^{2M} u_{1,0} \geqslant Y^M C(M, 1, j, 0, b) u_{j,b} \geqslant C(M, 1, j, 0, b) C(M, j, 1, b, 0) u_{1,0}.$$

Le résultat découle alors du lemme précédent.

LEMME 3.2. - Le système (S) est impossible si N est assez grand.

Démonstration. - Il suffit de montrer que si M est assez grand et $N = 8M$, alors le système (S_M) est impossible. Or, le nombre de termes du membre de droite de (S_M) est $(nd)^M$, et le nombre d'indices distincts (j, b) est majoré par $n(8M + 1)^{nd}$ d'après la condition 3° du système (S). Il existe donc un indice $(j, b) \in [1, n] \times \mathbb{Z}^{nd}$ tel que

$$C(M, 1, j, 0, b) \geqslant \frac{(nd)^M}{n(8M + 1)^{nd}}.$$

Le corollaire précédent montre alors que

$$\left(\frac{nd}{Y}\right)^{2M} \leqslant n(8M + 1)^{nd},$$

ce qui est absurde pour M assez grand d'après la condition 1° du système (S).

Cette dernière contradiction prouve que l'hypothèse $n > \rho$ est absurde, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRAND (D.). - Equations différentielles algébriques et nombres transcendants dans les domaines complexe et p-adique, Thèse 3e cycle, Univ. P. et M. Curie, Paris VI, 1975.

[2] ČUDNOVSKIJ (G. V.). - Arithmetical properties of values of analytical functions (à paraître).

[3] SCHNEIDER (T.). - Einführung in die transzendenten Zahlen. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 81).

[4] STRAUS (E. G.). - On entire functions with algebraic derivatives at certain algebraic points, Annals of Math., t. 52, 1950, p. 188-198.

[5] WALDSCHMIDT (M.). - Propriétés arithmétiques de fonctions de plusieurs variables, II, Séminaire P. Lelong ; Analyse, 16e année, 1975/76 (à paraître).

(Texte reçu le 23 juin 1977)

Eric REYSSAT
85 boulevard Brune
75014 PARIS