

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

ROLAND GILLARD

Sur le groupe des classes des extensions abéliennes réelles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, n° 1 (1976-1977),
exp. n° 10, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_1_A8_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE GROUPE DES CLASSES DES EXTENSIONS ABÉLIENNES RÉELLES

par Roland GILLARD

1. Énoncé des résultats ⁽¹⁾.

1.1. - Soient K un corps de nombres abélien réel, et l un nombre premier impair. On suppose que le degré (fini) de K est premier à l . On désigne par E le groupe des unités de K , et par C le sous-groupe des unités cyclotomiques : on sait (cf. [6], Satz 20) que la l -partie de l'ordre du groupe E/C est égale à la l -partie de l'ordre du groupe $C(K)$ des classes d'idéaux de K . Le but de ce travail est de préciser ce résultat. Pour tout groupe fini X , on note $[X]$ son ordre.

Soit G le groupe de Galois de K/\mathbb{Q} . L'algèbre $\mathbb{Z}_l[G]$ se décompose en somme directe :

$$\mathbb{Z}_l[G] = \bigoplus_{\Phi} e_{\Phi} \mathbb{Z}_l[G],$$

où Φ parcourt l'ensemble des caractères de G définis et irréductibles sur \mathbb{Q}_l , et e_{Φ} l'idempotent correspondant :

$$e_{\Phi} = \frac{1}{[G]} \sum_{\sigma \in G} \Phi(\sigma^{-1}) \sigma.$$

Ceci permet de décomposer les l -sous-groupes de Sylow de E/C et $C(K)$, notés respectivement $(E/C)_l$ et $C_l(K)$:

$$(E/C)_l = \bigoplus_{\Phi} e_{\Phi} (E/C)_l \quad C_l(K) = \bigoplus_{\Phi} e_{\Phi} C_l(K).$$

Dans [3], G. GRAS formule la conjecture suivante.

CONJECTURE 1. - Les groupes $e_{\Phi}(E/C)_l$ et $e_{\Phi} C_l(K)$ ont même ordre.

Remarquons que si Φ est le caractère trivial, les deux groupes ci-dessus sont nuls. Nous écartons donc ce cas dans la suite. Soient K' le corps obtenu par adjonction à K des racines l -ièmes de l'unité, et G' son groupe de Galois sur \mathbb{Q} . Pour notre discussion, nous formulons des hypothèses restrictives :

(H. R.) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) aucun idéal au-dessus de } l \text{ n'est décomposé dans l'extension entre} \\ \text{ } K' \text{ et son sous-corps réel maximal.} \\ \text{(b) le } l\text{-sous-groupe de Sylow } C_l(K') \text{ du groupe des classes de } K' \\ \text{est } \mathbb{Z}_l[G']\text{-monogène.} \end{array} \right.$

Ces hypothèses nous sont indispensables pour appliquer le théorème 3 ci-dessous. Le résultat principal est le suivant :

⁽¹⁾ En préparant cet exposé, j'ai appris que Ralph GREENBERG avait déjà obtenu ces résultats, par une méthode analogue.

THÉOREME 1. - Si K et ℓ vérifient (H. R.), pour chaque ϕ la conjecture 1 est vraie.

1.2. - Pour chaque idéal \mathfrak{L} de K au-dessus de ℓ , désignons par $K_{\mathfrak{L}}$ le complété de K correspondant, par $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$ l'anneau des entiers de $K_{\mathfrak{L}}$, par $U_{\mathfrak{L}}$ le groupe des unités de $K_{\mathfrak{L}}$ congrues à 1 modulo $\mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$. Désignons par U (resp. par \hat{K} , resp. par $\hat{\mathcal{O}}$) le produit des $U_{\mathfrak{L}}$ (resp. des $K_{\mathfrak{L}}$, resp. des $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}$) muni de la topologie produit. Considérons l'intersection de U et de l'image diagonale de E (resp. de C) dans \hat{K} ; notons \bar{E} (resp. \bar{C}) sa fermeture dans U . Désignons par Ω_{ℓ} une clôture algébrique de \mathbb{Q}_{ℓ} , et par $|\cdot|$ la valeur absolue de Ω_{ℓ} vérifiant $|\ell| = 1/\ell$. Si Ψ est un caractère de G , défini et irréductible sur Ω_{ℓ} , et si Ψ intervient dans la décomposition de ϕ , on notera $\Psi|\phi$. A un tel Ψ est attaché une fonction L ℓ -adique (cf. par exemple [5]).

Le groupe \bar{C} intervient dans la démonstration du théorème 1 par l'énoncé suivant (indépendant de (H. R.)) :

THÉOREME 2. - Le groupe $e_{\phi}(U/\bar{C})$ est fini et son ordre est égal à :

$$|L_{\ell}(1, \phi)|^{-1} = \left| \prod_{\Psi|\phi} L_{\ell}(1, \Psi) \right|^{-1}.$$

1.3. - La démonstration du théorème 1 utilise les \mathbb{Z}_{ℓ} extensions cyclotomiques de K et K' (cf. [4]) : si \mathbb{Q}_{∞} désigne l'unique \mathbb{Z}_{ℓ} extension de \mathbb{Q} , on note K_{∞} et K'_{∞} les extensions composées de \mathbb{Q}_{∞} avec K et K' . On désigne par M_{∞} (resp. L_{∞}) la ℓ -extension abélienne non ramifiée pour les idéaux premiers à ℓ (resp. non ramifiée) maximale de K_{∞} . On définit de même $M, L, M'_{\infty}, L'_{\infty}$ (à partir de K et K'_{∞}).

Pour ϕ donné (fixé dans toute la suite) et $\Psi|\phi$, soient f le conducteur de Ψ , et q le plus petit commun multiple de f et ℓ . On appelle γ le générateur du groupe de Galois Γ de K'_{∞}/K' qui agit sur les racines d'ordre une puissance de ℓ par élévation à la puissance $1 + q$. Les groupes de Galois $\text{Gal}(L'_{\infty}/K'_{\infty})$, $\text{Gal}(L_{\infty}/K_{\infty})$ etc. sont des $\mathbb{Z}_{\ell}[\Gamma]$ -modules topologiques compacts. En faisant correspondre à γ , la série formelle $1 + T$, on peut les munir de structures de $\mathbb{Z}_{\ell}[[T]]$ -modules de type fini (cf. [4]).

Désignons par A l'anneau obtenu par adjonction à \mathbb{Z}_{ℓ} de l'image de Ψ . Soit ω le caractère de G' obtenu par l'action sur les racines de l'unité d'ordre ℓ . On note Ψ le caractère $\omega\Psi^{-1}$, et $\tilde{\phi}$ la somme de ses conjugués sur \mathbb{Q}_{ℓ} . Soit $f(T, \Psi)$ la série formelle associée par IWASAWA (cf. [5], §6) au caractère de Dirichlet primitif défini par Ψ . Soit enfin $e_{\tilde{\phi}}$ l'idempotent de $\mathbb{Z}_{\ell}[G']$ associé à $\tilde{\phi}$. La conjugaison dans $\text{Gal}(L'_{\infty}/\mathbb{Q}_{\infty})$ permet de définir une action de G' sur $\text{Gal}(L'_{\infty}/K'_{\infty})$. On peut énoncer (cf. [1]) le résultat suivant.

CONJECTURE 2. - Il existe un $\mathbb{Z}_{\ell}[[T]]$ homomorphisme injectif à conoyau fini de $e_{\tilde{\phi}} \text{Gal}(L'_{\infty}/K'_{\infty})$ dans le quotient $A[[T]]/(f(T, \Psi))$.

Les hypothèses (H. R.) interviennent dans le théorème suivant (cf. [1]).

THÉORÈME 3. - Si K et \mathfrak{L} vérifient (H. R.), alors la conjecture 2 est vraie.

Le théorème 3 permet d'utiliser le théorème 4 (indépendant de (H. R.)) :

THÉORÈME 4. - Si K , \mathfrak{L} et \mathfrak{F} vérifient la conjecture 2, ils vérifient la conjecture 1.

Ainsi, le théorème 1 résulte immédiatement des théorèmes 3 et 4.

Le théorème 4 est démontré au §3. Sa démonstration utilise le théorème 2 dont la démonstration fait l'objet du §2. Les notations introduites ci-dessus restent valables dans la suite.

2. Démonstration du théorème 2.

2.1. - Fixons un plongement φ de K dans $\Omega_{\mathfrak{L}}$. Définissons, pour α dans K , un élément $T_{\Psi}(\alpha)$ dans $\Omega_{\mathfrak{L}}$:

$$(1) \quad T_{\Psi}(\alpha) = \sum_{\theta \in G} \Psi^{-1}(\theta) \varphi(\theta(\alpha)) .$$

Comme K , identifié à son image par le plongement diagonal, est dense dans \hat{K} , on peut prolonger à cet anneau l'action de G et les applications φ et T_{Ψ} . On conserve les mêmes notations pour les prolongements.

En prenant le logarithme sur chaque composante, on définit une application $\mathfrak{L}og$ de U dans \hat{K} . Cette application commute avec l'action de G sur \hat{K} . De plus, si un élément α de E se plonge diagonalement dans U , $\varphi(\mathfrak{L}og \alpha)$ n'est autre que le logarithme de $\varphi(\alpha)$ dans $\Omega_{\mathfrak{L}}$. On a alors :

$$(2) \quad T_{\Psi}(\mathfrak{L}og \alpha) = \sum_{\theta \in G} \Psi^{-1}(\theta) \log [\varphi(\theta(\alpha))] .$$

Si α est un élément de \hat{K} , et u un élément de G , on déduit de (1) :

$$(3) \quad T_{\Psi}(u(\alpha)) = \Psi(u) T_{\Psi}(\alpha) .$$

Cette formule s'étend sans difficulté au cas où u est un élément de $\underline{Z}_{\mathfrak{L}}[G]$ en prolongeant Ψ par linéarité sur cette algèbre. Pour α dans \hat{K} , posons :

$$(4) \quad T_{\mathfrak{F}}(\alpha) = \left| \prod_{\Psi} T_{\Psi}(\alpha) \right| .$$

Si $\text{Im } \Psi$ désigne l'image de Ψ dans $\Omega_{\mathfrak{L}}$, et N la norme de $\underline{Q}_{\mathfrak{L}}(\text{Im } \Psi)$ à $\underline{Q}_{\mathfrak{L}}$, à partir de (3) on obtient :

$$(5) \quad \forall u \in \underline{Z}_{\mathfrak{L}}[G], \quad T_{\mathfrak{F}}(u(\alpha)) = |N(\Psi(u))| T_{\mathfrak{F}}(\alpha) .$$

Cette formule permet de montrer qu'il existe une, et une seule fonction, $T'_{\mathfrak{F}}$ définie sur l'ensemble des sous- $\underline{Z}_{\mathfrak{L}}[G]$ -modules de $e_{\mathfrak{F}} \hat{K}$ qui en sont des réseaux, fonction vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$(6) \quad \forall \alpha \in e_{\mathbb{F}} \hat{K}, \alpha \neq 0, T_{\mathbb{F}}^!(Z_{\ell}[G].\alpha) = T_{\mathbb{F}}(\alpha),$$

$$(7) \quad \text{pour tout } A, B \text{ avec } A \supset B, T_{\mathbb{F}}^!(A) = [A/B] T_{\mathbb{F}}^!(B).$$

2.2. - Nous allons énoncer trois formules pour $T_{\mathbb{F}}^!$ qui suffisent à démontrer le théorème 2. La première donne l'expression de $T_{\mathbb{F}}^!(e_{\mathbb{F}} \text{Log } \bar{C})$:

$$(8) \quad T_{\mathbb{F}}^!(e_{\mathbb{F}} \text{Log } \bar{C}) = \left| \prod_{\Psi|_{\mathbb{F}}} L_{\ell}(1, \Psi) \right| \cdot \left| \prod_{\Psi|_{\mathbb{F}}} \frac{\tau(\Psi)}{f} \left(1 - \frac{\Psi(\ell)}{\ell}\right) \right|^{-1}.$$

Le fait que $e_{\mathbb{F}} \text{Log } \bar{C}$ soit un réseau de $e_{\mathbb{F}} \hat{K}$ résulte de la conjecture de Leopoldt vérifiée puisque K est abélien. La formule (8) résulte de (6), de la définition des unités cyclotomiques (cf. [6]), de (2) et de la formule de [5], § 5, pour $L_{\ell}(1, \Psi)$. Dans les calculs s'introduisent des facteurs parasites qui se réduisent à ceux de (8) grâce à l'hypothèse $\ell \nmid [G]$.

La formule suivante ramène le calcul de $T_{\mathbb{F}}^!(e_{\mathbb{F}} \text{Log } U)$ à celui de $T_{\mathbb{F}}^!(e_{\mathbb{F}} \hat{\Theta})$. On désigne par μ l'ordre du groupe de torsion de $e_{\mathbb{F}} U$:

$$(9) \quad T_{\mathbb{F}}^!(e_{\mathbb{F}} \text{Log } U) = \mu^{-1} \cdot T_{\mathbb{F}}^!(e_{\mathbb{F}} \hat{\Theta}) \cdot \left| \prod_{\Psi|_{\mathbb{F}}} \left(1 - \frac{\Psi(\ell)}{\ell}\right) \right|^{-1}.$$

Sa démonstration résulte d'un calcul d'indice facile : par (7), il suffit d'exprimer les indices du module

$$e_{\mathbb{F}} \prod_{\mathcal{L}|\ell} \mathcal{L}^r = e_{\mathbb{F}} \log \left(\prod_{\mathcal{L}|\ell} (1 + \mathcal{L}^r \theta_{\mathcal{L}}) \right), \text{ pour } r \text{ assez grand,}$$

dans $e_{\mathbb{F}} \log U$ et $e_{\mathbb{F}} \hat{\Theta}$. Notre dernière formule donne la valeur de $T_{\mathbb{F}}^!(e_{\mathbb{F}} \hat{\Theta})$ à l'aide de sommes de Gauss :

$$(10) \quad T_{\mathbb{F}}^!(e_{\mathbb{F}} \hat{\Theta}) = \left| \prod_{\Psi|_{\mathbb{F}}} \tau(\Psi^{-1}) \right|.$$

On utilise [7] pour obtenir une base explicite de $\hat{\Theta}$ sur un ordre de $\mathbb{Q}[G]$ exprimée à l'aide d'une somme T_K de sommes de Gauss. Lorsqu'on passe de $\hat{\Theta}$ à $\hat{\Theta} \simeq \hat{\Theta} \otimes Z_{\ell}$, l'ordre est remplacé (en vertu de l'hypothèse $\ell \nmid [G]$) par $Z_{\ell}[G]$. Il suffit alors de calculer l'image des sommes de Gauss par les applications T_{Ψ} .

2.3. - D'après (7), on a

$$(11) \quad [e_{\mathbb{F}}(U/\bar{C})] = \mu [e_{\mathbb{F}} \text{Log } U / e_{\mathbb{F}} \text{Log } \bar{C}] = \mu T_{\mathbb{F}}^!(e_{\mathbb{F}} \text{Log } U) / T_{\mathbb{F}}^!(e_{\mathbb{F}} \text{Log } \bar{C}).$$

Le théorème 2 résulte alors des égalités précédentes et de l'égalité classique $\tau(\Psi) \tau(\Psi^{-1}) = f$.

3. Démonstration du théorème 4.

On suppose qu'il existe un $Z_{\ell}[[T]]$ -homomorphisme à noyau et conoyau finis :

$$e_{\mathbb{F}} \text{Gal}(L'_{\infty}/K'_{\infty}) \longrightarrow A[[T]]/(f(T, \Psi)).$$

On déduit, comme dans [4], théorème 16, mais en tenant compte de l'idempotent et du choix différent de γ , qu'il existe aussi un $Z_{\ell}[[T]]$ -homomorphisme à noyau et

conoyau finis :

$$e_{\Phi'} \text{Gal} (M'_{\infty}/K'_{\infty}) \longrightarrow A[[T]]/(f(\frac{1+q}{1+T} - 1, \Psi)) .$$

Ici Φ' désigne le caractère de G' défini à l'aide de Φ et du passage au quotient $G' \longrightarrow G$, et $e_{\Phi'}$ l'idempotent correspondant. On rappelle que la conjugaison dans $\text{Gal} (M'_{\infty}/Q_{\infty})$ et $\text{Gal} (M_{\infty}/Q_{\infty})$ permet de munir $\text{Gal} (M'_{\infty}/K'_{\infty})$ et $\text{Gal} (M'_{\infty}/K_{\infty})$ de structures respectivement de G' -module et de G -module, ces structures étant compatibles entre elles.

On sait, d'après [4], théorème 18, que $\text{Gal} (M'_{\infty}/K'_{\infty})$ n'a pas de sous- $\mathbb{Z}_{\ell}[[T]]$ -module fini non trivial. De plus, $e_{\Phi'} \text{Gal} (M'_{\infty}/K'_{\infty})$ s'identifie à $e_{\Phi} \text{Gal} (M_{\infty}/K_{\infty})$. Il en résulte qu'on peut écrire une suite exacte de $\mathbb{Z}_{\ell}[[T]]$ -modules avec un conoyau D fini :

$$(12) \quad 0 \longrightarrow e_{\Phi} \text{Gal} (M_{\infty}/K_{\infty}) \longrightarrow A[[T]]/(f(\frac{1+q}{1+T} - 1, \Psi)) \longrightarrow D \longrightarrow 0 .$$

Il est clair que M contient K_{∞} ; de plus, $\text{Gal} (M/K_{\infty})$ s'obtient en divisant $\text{Gal} (M_{\infty}/K_{\infty})$ par le groupe des commutateurs qui est, en notations additives,

$$(1 - \gamma) \text{Gal} (M_{\infty}/K_{\infty}) = T \cdot \text{Gal} (M_{\infty}/K_{\infty}) .$$

L'action de G commutant avec celle de $\text{Gal} (K_{\infty}/K)$, on a un résultat analogue pour $e_{\Phi} \text{Gal} (M_{\infty}/K_{\infty})$ et $e_{\Phi} \text{Gal} (M/K_{\infty})$. Le caractère Φ étant non trivial, ce dernier groupe s'identifie à $e_{\Phi} \text{Gal} (M/K)$. Le noyau de la multiplication par T dans le module du milieu de (12) est nul (cf. [4], §2.2.). En notant par ${}_{T}D$ le noyau de la multiplication par T dans D , on peut écrire la suite exacte :

$$0 \longrightarrow {}_{T}D \longrightarrow e_{\Phi} \text{Gal} (M/K) \longrightarrow A/(f(q, \Psi)) \longrightarrow D/T \cdot D \longrightarrow 0 .$$

Les modules finis ${}_{T}D$ et $D/T \cdot D$ ayant le même ordre, on voit que le groupe $e_{\Phi} \text{Gal} (M/K)$ (fini, d'après [4], §2.2.) est d'ordre $|N(f(q, \Psi))|^{-1}$, N désignant, comme en 2.1, la norme de $\mathbb{Q}_{\ell}(\text{Im } \Psi)$ à \mathbb{Q}_{ℓ} . Mais, d'après [5], §6, on a :

$$L_{\ell}(s, \Psi) = 2f((1+q)^s - 1, \Psi), \quad \forall s \in \mathbb{Z}_{\ell} .$$

En utilisant le théorème 2, on déduit (ℓ étant impair) :

$$[e_{\Phi}(G(M/K))] = |\prod_{\Psi} e_{\Phi} L_{\ell}(1, \Psi)|^{-1} = [e_{\Phi}(U/\bar{C})] .$$

D'après la théorie du corps de classes, on a un isomorphisme :

$$e_{\Phi} \text{Gal} (M/L) \simeq e_{\Phi}(U/\bar{E}) .$$

Ces groupes sont finis (cf. toujours [4], §2.2.). En comparant avec ce qui précède, on déduit que les groupes $e_{\Phi} \text{Gal} (L/K)$ et $e_{\Phi}(\bar{E}/\bar{C})$ ont même ordre. Pour achever la démonstration du théorème 4, il suffit d'observer que \bar{E} et \bar{C} étant respectivement isomorphes à $E \otimes \mathbb{Z}_{\ell}$ et $C \otimes \mathbb{Z}_{\ell}$, $e_{\Phi}(\bar{E}/\bar{C})$ est isomorphe à $E_{\Phi}(E/C)_{\ell}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COATES (J.) and LICHTENBAUM (S.). - On ℓ -adic zeta functions, *Annals of Math.*, t. 98, 1973, p. 498-550.
- [2] COATES (J.). - p -adic L -functions and Iwasawa theory, "Algebraic number fields" [1975. Durham], p. 269-353. - London, Academic Press, 1977.
- [3] GRAS (G.). - Classes d'idéaux des corps abéliens et nombres de Bernoulli généralisés, *Annales Institut Fourier*, Grenoble, t. 27, 1977, fasc. 1, p. 1-66.
- [4] IWASAWA (K.). - On \mathbb{Z}_ℓ -extensions of algebraic number fields, *Annals of Math.*, t. 98, 1973, p. 245-326.
- [5] IWASAWA (K.). - Lectures on p -adic L -functions. - Princeton, Princeton University Press, 1972 (*Annals of Math. Studies*, n° 74).
- [6] LEOPOLDT (H.). - Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper, *Abh. Deutsch. Akad. Berlin*, 1954, n° 2, p. 3-48.
- [7] LEOPOLDT (H.). - Über die Hauptordnung der ganzen Elemente eines abelschen Zahlkörpers, *J. für reine und angew. Math.*, t. 201, 1959, p. 119-149.

(Texte reçu le 14 février 1977)

Roland GILLARD
 Laboratoire associé au CNRS n° 188
 Institut de Mathématiques pures
 Boîte postale 116
 38402 SAINT MARTIN D'HÈRES.
