Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Georges Poitou

Sur les petits discriminants

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1976-1977), exp. nº 6, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_1_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU 6-01
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° 6, 18 p. 15 novembre 1976

SUR LES PETITS DISCRIMINANTS

par Georges POITOU

Il s'agit de faire le point sur les améliorations apportées récemment, aux résultats, principalement dus à A. M. ODLYZKO et J.-P. SERRE, que j'ai exposés au Séminaire Bourbaki en février 1976 (1). Je profite de cette occasion pour indiquer une preuve simplifiée des formules explicites d'André WEIL, ceci dans le cas des fonctions zéta, qui nous suffit, et où les difficultés d'analyse sont déjà en évidence.

1. Formules explicites d'André WEIL.

La fonction $\zeta_K(s)$ attachée à un corps de nombres K, multipliée par un facteur eulérien $G(s)$, donne une fonction $\Lambda(s)$ méromorphe dans tout le plan, avec seulement des pôles simples en 0 et 1, et invariante par changement de s en $1 - s$. Le facteur correctif s'écrit

$$G(s) = |d|^{s/2}\, g_1(s)^{r_1}\, g_2(s)^{r_2}$$

avec $g_1(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)$, $g_2(s) = (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)$, étant entendu que r_1, $2r_2$ désignent les nombres de conjugués réels et complexes de K, et d son discriminant.

On note $\beta = \beta + i\gamma$ les zéros de $\zeta_K(s)$ dans la bande critique $0 < \sigma < 1$ (avec $s = \sigma + it$). Soient a, a' des nombres réels tels que $0 < a < a' < 1$, et $\Phi(s)$ une fonction holomorphe dans la bande $-a' < \sigma < 1 + a'$. On a alors l'égalité

$$\sum_{|\gamma|<T} \Phi(\rho) - \Phi(0) - \Phi(1) = \frac{1}{2\pi i}\int \Phi(s)\, d\log \Lambda(s)\ , \tag{1}$$

où l'intégrale est prise sur le bord du rectangle $[-a, 1+a] \times [-T, T]$, T étant un nombre positif que l'on peut choisir distinct de tous les γ, et même distant de tous les γ d'au moins $\alpha/\mathrm{Log}\, T$, α étant une constante absolue ; on peut aussi permettre que T soit égal à l'un des γ, à condition d'ajouter au membre de gauche de (1) la moitié du terme $\Phi(\rho)$ correspondant, et de prendre pour l'intégrale de droite sa partie principale.

Il en est ainsi, en particulier, si Φ est donnée par la formule

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, \exp((s - \tfrac{1}{2})x)\, dx \tag{2}$$

à partir d'une fonction réelle F qu'on peut sans inconvénient supposer paire, et qu'on suppose telle que la fonction $F(x)\exp((\frac{1}{2} + a')|x|)$ soit sommable sur toute la droite.

---

(1) POITOU (Georges). - Minorations de discriminants, "Séminaire Bourbaki", 28e année, 1975/76, n° 479, p. 136-153. - Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Lecture Notes in Mathematics, 567) [Voir en particulier la bibliographie].

Considérons les parties "horizontales" de l'intégrale de (1). Désignons par $\|\Phi\|_{a,T}$ le maximum de $|\Phi(s)|$ sur le disque $|s - (\frac{1}{2} + iT)| \leqslant \frac{1}{2} + a$. Comme dans E. LANDAU (Algebraische Zahlen, page 122), on voit que ces intégrales horizontales sont majorées, à une constante multiplicative près, par $\|\Phi\|_{a,T} \operatorname{Log} T$ pour T assez grand. En considérant comme congrues à 0 celles des fonctions de T qui tendent vers 0 à l'infini, on voit qu'il en est ainsi pour les intégrales horizontales sous la condition $\|\Phi\|_{a,T} = o(1/\operatorname{Log} T)$, et en particulier si la fonction $F(x)\exp((\frac{1}{2} + a)|x|)$ est à variation bornée sur toute la droite, puisque alors la fonction $\Phi(s)$ est $o(1/|t|)$ uniformément dans la bande $-a \leqslant \sigma \leqslant 1 + a$. De ceci, et de l'équation fonctionnelle de Λ, on déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Sous la condition que l'on ait $\|\Phi\|_{a,T} = o(1/\log T)$, donc, en particulier, sous l'hypothèse que la fonction $F(x)\exp((\frac{1}{2} + a)|x|)$ soit à variation bornée sur toute la droite, on a, modulo les fonctions nulles à l'infini, la congruence

$$\sum_{|\gamma|<T} \Phi(\rho) - \Phi(0) - \Phi(1) \equiv I_\zeta(T) + I_G^a(T) \tag{3}$$

avec

$$I_\zeta(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{1+a-iT}^{1+a+iT} \{\Phi(s) + \Phi(1 - s)\}\, d\log \zeta_K(s) ,$$

$$I_G^a(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{1+a-iT}^{1+a+iT} \{\Phi(s) + \Phi(1 - s)\}\, d\log G(s) .$$

Calcul de la partie "ultramétrique". - On écrit

$$- d\log \zeta_K(s)/ds = \sum_{\mathfrak{p},m} (\log N\mathfrak{p})/(N\mathfrak{p})^{ms} ,$$

où $\mathfrak{p}$ décrit les idéaux premiers de K (N est la norme), et m les entiers $1, 2, 3, \ldots$, et on obtient successivement

$$\begin{aligned}
I_\zeta(T) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \{\Phi(1 + a + it) + \Phi(-a - it)\}\left(\sum \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{m(1+a+it)}}\right) dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\exp((\tfrac{1}{2} + a + it)x)\, dx\right)\left(\sum \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{m(1+a+it)}}\right) dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left(\sum \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{m(1+a+it)}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\exp((\tfrac{1}{2} + a + it)x)\, dx\right) dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left(\sum \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{m/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u+m\log N\mathfrak{p})\exp((\tfrac{1}{2}+a)u)\exp(itu)\, du\right) dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} H(u)\exp(itu)\, du\right) dt ,
\end{aligned}$$

si l'on pose

$$H(u) = \sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{m/2}} F(u + m\log N\mathfrak{p})\exp((\tfrac{1}{2} + a)u)$$

ou encore, avec $F_a(x) = F(x)\exp((\frac{1}{2} + a)x)$,

$$H(u) = \sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{m(1+a)}} F_a(u + m\log N\mathfrak{p}) .$$

Cette série converge normalement, et par conséquent dans l'espace L^1, pourvu que la fonction F_a, qui est déjà sommable, soit bornée ; c'est certainement le cas si elle est à variation bornée, et, de plus, il en est alors de même pour la fonction H. En effet, si V est la variation totale de la fonction F_a, on a, pour toute famille finie croissante (u_i) de nombres réels, les inégalités

$$\sum_i |H(u_{i+1}) - H(u_i)| \leqslant \sum_{i,\mathfrak{p},m} \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{m(1+a)}} |F_a(u_{i+1} + m \log N\mathfrak{p}) - F_a(u_i + m \log N\mathfrak{p})|$$

$$\leqslant V \sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{m(1+a)}} .$$

Enfin, la condition de moyenne $2H(x) = H(x + 0) + H(x - 0)$ est vérifiée pour H dès qu'elle l'est pour F, ce qu'on peut supposer sans inconvénient.

Il résulte alors de la réciprocité de Fourier (sous la forme de Jordan) que l'intégrale $I_\zeta(T)$ a pour limite, lorsque T tend vers l'infini, le nombre $-2H(0)$. C'est la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - <u>Pourvu que la fonction</u> $F(x) \exp((\frac{1}{2} + a)x)$ <u>soit à variation totale bornée, et qu'en chaque point sa valeur soit la moyenne des limites à gauche et à droite, on a la limite</u>

$$I_\zeta(T) \equiv -2 \sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{m/2}} F(m \log N\mathfrak{p}) . \tag{4}$$

<u>Calcul de la partie archimédienne</u>. - Comme $|G'/G(s)|$ est $O(\log|t|)$ dans une bande verticale, on peut remplacer $I_G^a(T)$ par

$$I_G(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} \{\Phi(s) + \overline{\Phi(\bar{s})}\} \, d \log G(s)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} \Phi(s) \{d \log G(s) + d \log \overline{G(\bar{s})}\} .$$

Introduisons la fonction digamma $\psi(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$, et écrivons

$$d \log G(s) = \tfrac{1}{2} \log|d| \, ds + r_1 \, d \log g_1(s) + r_2 \, d \log g_2(s)$$

$$G'(s)/G(s) = \tfrac{1}{2} \log|d| + r_1 \left(-\tfrac{1}{2} \log \pi + \tfrac{1}{2} \psi(\tfrac{s}{2})\right) + r_2 \left(-\log 2\pi + \psi(s)\right)$$

ce qui donne, en posant $\varphi(t) = \Phi(\frac{1}{2} + it)$,

$$I_G(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi(t) \{\log|d| + r_1(-\log \pi + \operatorname{Re} \psi(\tfrac{1}{4} + i\tfrac{t}{2})) + 2r_2(-\log 2\pi + \operatorname{Re} \psi(\tfrac{1}{2} + it))\} \, dt$$

ou, si l'on veut, en introduisant le degré $n = r_1 + 2r_2$ du corps K,

$$I_G(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi(t) \, dt \, (\log|d| - n \log 2\pi) + \frac{n}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi(t) \operatorname{Re} \psi(\tfrac{1}{2} + it) \, dt$$

$$+ \frac{r_1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi(t) \{\operatorname{Re} \psi(\tfrac{1}{4} + i \tfrac{t}{2}) - \operatorname{Re} \psi(\tfrac{1}{2} + it) + \log 2\} \, dt .$$

Utilisons maintenant la formule de Gauss

$$\psi(z) = -\int_0^\infty \left(\frac{e^{-xz}}{1 - e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx , \tag{5}$$

ce qui donne en particulier

$$\mathrm{Re}\ \psi(\tfrac{1}{2} + it) = - \int_0^\infty \left(\frac{\cos xt}{2\ \mathrm{sh}(x/2)}\right) dx$$

$$\mathrm{Re}\ \psi(\tfrac{1}{4} + i\ \tfrac{t}{2}) = - \int_0^\infty \left(\frac{e^{x/2}\ \cos xt}{\mathrm{sh}\ x} - \frac{e^{-2x}}{x}\right) dx$$

$$= - \int_0^\infty \left(\frac{e^{x/2}\ \cos xt}{\mathrm{sh}\ x} - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx - \log 2$$

$$\mathrm{Re}\ \psi(\tfrac{1}{4} + i\ \tfrac{t}{2}) - \mathrm{Re}\ \psi(\tfrac{1}{2} + it) + \log 2 = - \int_0^\infty \frac{\cos xt}{2\ \mathrm{ch}(x/2)}\ dx\ .$$

Connaissant les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2\ \mathrm{sh}(x/2)} - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = - \psi(\tfrac{1}{2}) = \gamma + 2 \log 2$$

(ici γ est la constante d'Euler $0{,}5772156649\ldots$),

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2\ \mathrm{ch}(x/2)} = - \psi(\tfrac{1}{4}) + \psi(\tfrac{1}{2}) - \log 2 = \frac{\pi}{2}\ ,$$

on peut encore écrire

$$I_G(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi(t)\ dt\ (\log|d| - n(\gamma + \log 8\pi) - r_1\ \tfrac{\pi}{2})$$

$$+ \frac{n}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi(t)\ \left(\int_0^\infty \frac{1 - \cos xt}{2\ \mathrm{sh}(x/2)}\ dx\right) dt + \frac{r_1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi(t)\ \left(\int_0^\infty \frac{1 - \cos xt}{2\ \mathrm{ch}(x/2)}\ dx\right) dt\ .$$

Pour assurer une limite à la première ligne de cette expression, il suffit de quelque forme de la réciprocité de Fourier, qui implique la convergence de $\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi(t)\ dt$ vers $F(0)$. Quant à la deuxième ligne, on va voir que des hypothèses assez simples assurent sa convergence vers

$$n \int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{2\ \mathrm{sh}(x/2)} - \frac{F(0)\ e^{-x}}{x}\right) dx + r_1 \int_0^\infty \frac{F(x)}{2\ \mathrm{ch}(x/2)}\ dx\ .$$

PROPOSITION 3. - Soit F une fonction sommable, de transformée de Fourier φ , telle que la fonction $(F(0) - F(x))/x$ soit de carré sommable, et que sa transformée de Fourier $\gamma(t)$ soit $o(1/\log|t|)$ à l'infini. Alors on a l'égalité, pour $\sigma > 0$ (avec convergence des intégrales) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\mathrm{Re}\ \psi(\sigma + it) - \psi(\sigma)\}\ \varphi(t)\ dt = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma x}}{1 - e^{-x}}\ (F(0) - F(x))\ dx\ .$$

Cette proposition résulte de deux lemmes :

LEMME 1. - Soit F une fonction sommable, et φ sa transformée de Fourier ($\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\ F(x)\ dx$) . Si la fonction $(F(0) - F(x))/x$ est sommable au voisinage de 0 , sa transformée de Fourier $\gamma(t)$ est une fonction dérivable pour $t \neq 0$, et sa dérivée $\gamma'(t)$ est égale à $- i\varphi(t)$, de sorte que $\gamma(t)$ diffère d'une constante, dans chacun des intervalles $t > 0$ et $t < 0$, de la primitive de $- i\varphi(t)$ nulle pour $t = 0$.

Preuve. - On peut écrire $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, avec

$$\gamma_0(t) = \int_{-1}^{+1} \frac{F(0) - F(x)}{x} e^{itx} dx$$

$$\gamma_1(t) = \int_1^{\infty} F(0) \frac{e^{itx}}{x} dx \qquad \gamma_3(t) = \int_{-\infty}^{-1} F(0) \frac{e^{itx}}{x} dx$$

$$\gamma_2(t) = \int_1^{\infty} F(x) \frac{e^{itx}}{x} dx \qquad \gamma_4(t) = \int_{-\infty}^{-1} F(x) \frac{e^{itx}}{x} dx ,$$

où γ_1 et γ_3 sont définis, pour $t \neq 0$, comme limite de $\int_1^X$ et $\int_{-X}^{-1}$ quand X tend vers l'infini ; on a donc

$$\gamma_1(t) + \gamma_3(t) = 2iF(0) \int_t^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \quad \text{pour} \quad t > 0$$

$$= - 2iF(0) \int_{-t}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \quad \text{pour} \quad t < 0 ,$$

et, par suite, pour les dérivées

$$\gamma_1'(t) + \gamma_3'(t) = - 2iF(0) \frac{\sin t}{t} \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad \text{et pour} \quad t < 0 .$$

Maintenant, on voit que γ_0 est dérivable partout, de dérivée

$$\gamma_0'(t) = i \int_{-1}^{+1} \{F(0) - F(x)\} e^{itx} dx = 2iF(0) \frac{\sin t}{t} - i \int_{-1}^{+1} F(x) e^{itx} dx .$$

En effet, on a l'identité, pour $h \neq 0$,

$$\frac{1}{h}\{\gamma_0(t + h) - \gamma_0(t)\} = \int_{-1}^{+1} \{F(0) - F(x)\} e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{hx} dx$$

et, comme $(e^{ihx} - 1)/hx$ est borné supérieurement, et tend vers i quand h tend vers 0, le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que $\frac{1}{h}\{\gamma_0(t+h)-\gamma_0(t)\}$ tend vers

$$i \int_{-1}^{+1} \{F(0) - F(x)\} e^{itx} dx .$$

Le même argument s'applique aux intégrales $\int_1^X$ et $\int_{-X}^{-1}$, et finalement γ_2 et γ_4 sont dérivables, de dérivées respectives

$$\gamma_2'(t) = - i \int_1^{\infty} F(x) e^{itx} dx \qquad \gamma_4'(t) = - i \int_{-\infty}^{-1} F(x) e^{itx} dx$$

parce que ces intégrales convergent uniformément, puisque F est sommable. Pour obtenir le lemme, il suffit de faire l'addition, et d'observer que φ est continue.

LEMME 2. - <u>On suppose de plus que la fonction</u> $(F(0) - F(x))/x$ <u>est de carré sommable au voisinage de</u> 0 (<u>donc partout</u>) <u>et l'on donne une fonction</u> $k(x)$ <u>sommable et de carré sommable</u> ; <u>on pose</u>

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) \frac{1 - e^{itx}}{x} dx ,$$

<u>et on suppose que</u> $\rho(t) \gamma(t)$ <u>tend vers</u> 0 <u>quand</u> t <u>tend vers l'infini</u>. <u>Alors l'intégrale</u> $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) \varphi(t) dt$ <u>converge et est égale à</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} k(x) \frac{F(0) - F(x)}{x} dx$.

<u>Preuve</u>. - Soit μ la transformée de Fourier de k , $\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) e^{itx} dx$.

La formule de Plancherel donne l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x) \frac{F(0) - F(x)}{x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) \nu(t) dt .$$

D'autre part, on voit comme ci-dessus que la fonction ρ est dérivable, de dérivée $\rho'(t) = - i\mu(t)$. En effet, $\int_a^b k(x) ((1 - e^{itx})/x) dx$ a pour dérivée $- i \int_a^b k(x) e^{itx} dx$, et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} k(x) e^{itx} dx$ converge uniformément, puisque k est sommable. On peut donc écrire, pour T et T' grands

$$- i \int_{-T}^{T'} \mu(t) \gamma(t) dt = \int_{-T}^{T'} \rho'(t) \gamma(t) dt .$$

On décompose cette intégrale en $\int_{-T}^{0} + \int_{0}^{-T'}$, on intègre par parties, et on trouve, puisque l'on a $\rho(0) = 0$,

$$\rho(T') \gamma(T') - \rho(- T) \gamma(- T) - \int_{-T}^{T'} \rho(t) \gamma'(t) dt ,$$

et cette dernière intégrale vaut $- i \int_{-T}^{T'} \rho(t) \varphi(t) dt$; il en résulte que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) \varphi(t) dt$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) \gamma(t) dt$, et le lemme est démontré.

Pour établir la proposition, on prend pour k la fonction impaire égale, pour $x > 0$, à $(x/(1 - e^{-x}))e^{-\sigma x}$, de sorte que l'on a, d'après (5),

$$\frac{1}{2} \rho(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{1 - e^{-x}} (1 - \cos tx) dx = \mathrm{Re}\, \psi(\sigma + it) - \psi(\sigma) ,$$

ce qu'on sait être de l'ordre de $\log t$ pour t grand ; d'où la condition $\gamma(t) = o(1/\log|t|)$.

Remarque. - La fonction F étant toujours sommable, les autres hypothèses de la proposition 3 sont vérifiées si la fonction $(F(0) - F(x))/x$ est à variation bornée sur toute la droite.

En rassemblant les propositions 1, 2 et 3, on obtient, sous des hypothèses convenables pour F, la convergence de la série $\sum \Phi(\rho)$ de la formule (3) ; contentons-nous de l'énoncé suivant :

THÉORÈME (A. WEIL). - Soit F une fonction réelle paire définie sur toute la droite, vérifiant les conditions suivantes :

(i) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction $F(x) \exp((\frac{1}{2} + \varepsilon)x)$ soit sommable.

(ii) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction $F(x) \exp((\frac{1}{2} + \varepsilon)x)$ soit à variation bornée, la valeur en chaque point étant la moyenne des limites à gauche et à droite.

(iii) La fonction $(F(0) - F(x))/x$ est elle-même à variation bornée.

Soit $\Phi(s)$ la transformée de Mellin de F, donnée par la formule (2), et $\varphi(t) = \Phi(\frac{1}{2} + it)$.

Les notations n, r_1, r_2, d, $\mathfrak{p}$, m, ρ se rattachent à un corps de nombres K comme il a été dit ci-dessus ; en particulier ρ décrit les zéros de la fonction zêta de Dedekind attachée à K.

<u>Alors la somme</u> $\sum_{\operatorname{Im}\rho<T} \Phi(\rho)$ <u>a une limite quand</u> T <u>tend vers l'infini, notée</u> $\sum \Phi(\rho)$, <u>et sa valeur est donnée par l'une des formules suivantes</u>

$$(6) \quad \sum \Phi(\rho) - \Phi(0) - \Phi(1) + 2 \sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{m/2}} F(m \log N\mathfrak{p})$$

$$= F(0) \left[\log|d| - r_1 \log \pi - 2r_2 \log 2\pi\right]$$

$$+ r_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \operatorname{Re} \psi(\tfrac{1}{4} + i \tfrac{t}{2})\, dt + 2r_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \operatorname{Re} \psi(\tfrac{1}{2} + it)\, dt$$

$$= F(0) \left[\log|d| - r_1 \log \pi - 2r_2 \log 2\pi\right]$$

$$- r_1\left[\log 2 + \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{x/2}F(x)}{\operatorname{sh} x} - \frac{F(0)e^{-x}}{x}\right)dx\right] - 2r_2 \int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{2\operatorname{sh}(x/2)} - \frac{F(0)e^{-x}}{x}\right)dx$$

$$= F(0) \left[\log|d| - n \log 2\pi\right]$$

$$- r_1 \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{2 \operatorname{ch}(x/2)}\, dx - n \int_0^{\infty} \left(\frac{F(x)}{2 \operatorname{sh}(x/2)} - \frac{F(0)\, e^{-x}}{x}\right) dx$$

$$= F(0) \left[\log|d| - n(\gamma + \log 8\pi) - r_1 \frac{\pi}{2}\right]$$

$$+ r_1 \int_0^{\infty} \frac{F(0) - F(x)}{2 \operatorname{ch}(x/2)}\, dx + n \int_0^{\infty} \frac{F(0) - F(x)}{2 \operatorname{sh}(x/2)}\, dx \; .$$

<u>Remarque</u>. - On a l'égalité :

$$\Phi(0) + \Phi(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, (e^{-x/2} + e^{x/2})\, dx = 4 \int_0^{\infty} F(x) \operatorname{ch} \frac{x}{2}\, dx \; .$$

2. Inégalités fondamentales.

Elles s'obtiennent en écrivant $\sum \Phi(\rho) \geqslant 0$ pour toute fonction F du type précédent telle que $\operatorname{Re} \Phi(\rho)$ soit positif pour toute racine non triviale ρ de la fonction $\zeta_K(s)$. Si l'on note S le second membre des formules (6), on obtient alors une inégalité

$$S \geqslant - 4 \int_0^{\infty} F(x) \operatorname{ch} \frac{x}{2}\, dx + 2 \sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{m/2}} F(m \log N\mathfrak{p})$$

qui apparaît comme une minoration de $\log|d|$: par exemple, en supposant pour simplifier $F(0) = 1$, on obtient l'inégalité

$$(7) \quad \frac{1}{n} \log|d| \geqslant \gamma + \log 8\pi + \frac{r_1}{n} \frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty}\{1 - F(x)\}\left\{\frac{1}{2\operatorname{sh}(x/2)} + \frac{r_1}{n} \frac{1}{2\operatorname{ch}(x/2)}\right\}dx$$

$$- \frac{4}{n} \int_0^{\infty} F(x) \operatorname{ch} \frac{x}{2}\, dx + \frac{2}{n} \sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{m/2}} F(m \log N\mathfrak{p}) \; .$$

Pour assurer la positivité de $\operatorname{Re} \Phi(\rho)$, il est naturel de mettre en évidence les conséquences de l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH), selon laquelle tous les zéros ρ ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$. Comme on a

$$\varphi(t) = \Phi(\tfrac{1}{2} + it) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cos tx \, dx ,$$

il suffit, sous GRH, de supposer que cette fonction réelle est positive.

Les conditions à l'infini sur F, nécessaires pour établir le théorème précédent, peuvent être un peu relâchées, dès lors qu'on ne s'intéresse qu'à l'inégalité (7) : il suffit que les expressions qui y figurent aient un sens. On obtient ainsi la proposition suivante.

PROPOSITION 4. - L'inégalité (7) est valable sous GRH pour toute **fonction F** réelle paire telle que $F(0) = 1$, vérifiant les conditions suivantes :

(i) L'intégrale $\int_0^{\infty} F(x) \operatorname{ch} \frac{x}{2} \, dx$ converge, au sens de Cauchy.

(ii) La fonction F est à variation bornée, avec la condition de moyenne.

(iii) La fonction $\frac{1 - F(x)}{x}$ est elle-même à variation bornée.

(iv) La transformée de Fourier de F est positive.

Pour montrer ceci, on considère, pour $y > 0$, la fonction $F_y(x) = F(x) e^{-yx^2}$, pour laquelle le théorème ci-dessus est valable, donc aussi l'inégalité (7), car sa transformée de Fourier est encore positive. Il reste à montrer que la deuxième ligne de (7) est la limite, pour $y \to 0$, de la quantité analogue obtenue en remplaçant F par F_y ; et ceci résulte de la convergence uniforme par rapport à y de l'intégrale et de la série correspondantes.

Si l'on ne suppose plus l'exactitude de GRH, et que l'on renonce à tirer parti des connaissances actuelles sur les zones sans zéros dans la bande critique, il ne reste plus qu'à supposer que $\operatorname{Re} \Phi(s)$ est positif dans toute la bande critique. Or on a

$$\operatorname{Re} \Phi(\sigma + it) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \operatorname{ch}((\sigma - \tfrac{1}{2})x) \cos tx \, dx ,$$

et le principe du maximum montre que la condition cherchée s'exprime par la positivité de la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = F(x) \operatorname{ch}(x/2)$. On obtient alors l'inégalité

$$(8) \quad \frac{1}{n} \log|d| \geqslant \gamma + \log 4\pi + \frac{r_1}{n} - \int_0^{\infty} \{1 - f(x)\}\left\{\frac{1}{\operatorname{sh} x} + \frac{r_1}{n} \frac{1}{2\operatorname{ch}^2(x/2)}\right\} dx$$
$$- \frac{4}{n} \int_0^{\infty} f(x) \, dx + \frac{4}{n} \sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\log N\mathfrak{p}}{1 + (N\mathfrak{p})^m} f(m \log N\mathfrak{p})$$

dont la validité peut être étendue par la même méthode de régularisation, ce qui fournit le résultat suivant.

PROPOSITION 5. - L'inégalité (8) est valable (sans hypothèse de Riemann) pour toute fonction f réelle paire telle que $f(0) = 1$, vérifiant les conditions suivantes :

(i) L'intégrale $\int_0^{\infty} f(x) \, dx$ converge.

(ii) La fonction $f(x)/\operatorname{ch} \frac{x}{2}$ est à variation bornée, avec la condition de moyenne.

(iii) La fonction $\frac{1 - f(x)}{x}$ est elle-même à variation bornée.

(iv) La transformée de Fourier de f est positive.

Remarque. - Les formules (7) et (8) mettent en évidence les minorations asymptotiques

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|d| \geqslant \gamma + \log 8\pi + \frac{r_1}{n}\frac{\pi}{2} \quad \text{sous GRH,}$$

et $\gamma + \log 4\pi + \frac{r_1}{n}$ en tous cas : la deuxième ligne est négligeable pour n grand, et il suffit de choisir F ou f assez voisine de 1 dans un voisinage assez grand de 0.

3. Minorations explicites sous GRH.

Si l'on néglige le secours que peut apporter la connaissance de la décomposition des petits nombres premiers dans le corps K, il s'agit, pour avoir une bonne minoration, de rendre petits les deux termes intégraux négatifs de la formule (7) pour une fonction F positive vérifiant les conditions de la proposition 4. Plus précisément, pour chaque fonction F de cette espèce, on peut considérer la famille, paramétrée par $y > 0$, des fonctions $F(x\sqrt{y})$, et choisir y au mieux en fonction de n et r_1. Par cette méthode, le choix, initialement suggéré par J.-P. SERRE, de $F(x) = \exp(-x^2)$, donnait pour la somme des deux termes soustractifs une estimation en $1/\log n$. Depuis, A. M. ODLYZKO s'est aperçu que le choix d'une fonction F à support compact permet d'atteindre une estimation en $1/(\log n)^2$, et que, pour minimiser la partie principale asymptotique du terme correctif, il y a un choix optimum de F qui est le suivant :

(9) $\quad F(x) = (1 - x) \cos \pi x + \frac{1}{\pi} \sin \pi x \quad$ sur $[-1, +1]$ et 0 ailleurs.

Cette fonction est le carré de convolution de la fonction $u(x) = \cos \pi x$ pour $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, et 0 ailleurs ; elle est optima parmi les fonctions de la forme $u * u$, avec u paire positive et assez régulière. La justification de cette optimalité n'étant pas essentielle, nous nous contenterons de l'esquisser.

LEMME 3. - Soit F une fonction paire, positive ainsi que sa transformée de Fourier, telle que $F(0) = 1$, et possédant une dérivée seconde continue. Alors on a l'inégalité

$$\int_0^\infty \{1 - F(x\sqrt{y})\}\left\{\frac{1}{2\,\mathrm{sh}(x/2)} + \frac{r_1}{n}\,\frac{1}{2\,\mathrm{ch}(x/2)}\right\} dx \leqslant y\,\frac{|F''(0)|}{2}\left(16\lambda(3) + \frac{r_1}{n}\,16\beta(3)\right)$$

avec

$$\lambda(3) = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \dots = 1{,}05179\ 97902\dots$$

et

$$\beta(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32} = 0{,}96894\ 61462\dots$$

Preuve. - La fonction F est de type positif, donc aussi $-F''$, d'où l'inégalité

$$1 - F(x\sqrt{y}) \leqslant \frac{|F''(0)|}{2} x^2 y$$

et il n'y a plus qu'à calculer les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{2\,\mathrm{sh}(x/2)}\, dx = -\psi''(\tfrac{1}{2}) = 16\lambda(3)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{2\,\mathrm{ch}(x/2)}\, dx = -\psi''(\tfrac{1}{4}) + \psi''(\tfrac{1}{2}) = 16\beta(3)$$

(on peut utiliser l'égalité $\int_0^\infty (x^2 e^{x/2}/\mathrm{sh}\, x)\, dx = -\psi''(\frac{1}{4}) = 32(1 + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{9^3} + \ldots)$).

LEMME 4. - Soit F une fonction réelle paire, telle que $F(0) = 1$, possédant une dérivée troisième F''' pour $|x| < 1$, intégrable et bornée sur $[-1, +1]$, et que l'on ait $F(1) = F'(1) = F''(1) = 0$, et $F(x) = 0$ pour $x > 1$. Alors on a l'inégalité

$$\frac{4}{n}\int_0^\infty F(x\sqrt{y})\, \mathrm{ch}\, \frac{x}{2}\, dx \leqslant \frac{32}{n}\, \|F'''\|\, y^{3/2}\, e^{1/2\sqrt{y}} .$$

Preuve. - On intègre par parties.

Les deux lemmes suggèrent, pour minimiser la somme des deux termes soustractifs, le choix de $y = (2\log n)^{-2}$; ladite somme est alors majorée par

$$\frac{2|F''(0)|(\lambda(3) + \frac{r_1}{n}\beta(3))}{(\log n)^2} + \frac{4\|F'''\|}{(\log n)^3} .$$

En négligeant alors le deuxième terme, il s'agit de rendre $|F''(0)|$ minimum sous la condition $F(0) = 1$; donc, en écrivant $F = u * u$, avec $u \geqslant 0$, de rendre minimum le rapport $\Delta(u) = (\int u'^2)/(\int u^2)$. Si u est une fonction optimale, donnant à ce rapport la valeur k^2, on écrit la condition $\frac{d}{dt}(\Delta(u + tv)) \geqslant 0$, où v est une fonction nulle là où u l'est, et on trouve l'équation différentielle $u'' + k^2 u = 0$, etc.

On trouve ainsi la fonction F annoncée, pour laquelle il est immédiat d'améliorer le lemme 4 :

LEMME 4 bis. - On a, pour la fonction F décrite par (9), l'égalité

$$\frac{4}{n}\int_0^\infty F(x\sqrt{y})\, \mathrm{ch}\, \frac{x}{2}\, dx = \frac{4}{n\sqrt{y}}\int_0^1 \{(1-t)\cos \pi t + \frac{1}{\pi}\sin \pi t\}\, \mathrm{ch}\, \frac{t}{2\sqrt{y}}\, dt$$

$$= \frac{4}{n\sqrt{y}} \frac{2\pi^2}{(\pi^2 + a^2)^2}(e^a + 1)$$

avec $a = 1/2\sqrt{y}$.

Ceci étant, le choix ci-dessus revient à prendre $a = \log n$, et fournit l'inégalité suivante, valable sous GRH :

$$(10)\quad \frac{1}{n}\log|d| \geqslant \gamma + \log 8\pi + \frac{r_1}{n}\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi^2(\lambda(3) + \frac{r_1}{n}\beta(3))}{(\log n)^2} - \frac{16\pi^2(1 + \frac{1}{n})}{(\log n)^3(1 + (\pi^2/\log^2 n))^2} .$$

Naturellement, cette formule asymptotique donne des résultats numériques (pour des degrés fixés) un peu moins bons que la meilleure application directe de la formule (7) à la fonction $F(x\sqrt{y})$; ceci, pour deux raisons : d'abord l'approximation fournie par le lemme 3, et aussi le fait que le choix de $y = (2\log n)^{-2}$ n'est qu'approximativement optimum.

Pour le calcul numérique, on déduit de (7) la formule

$$(11)\quad \frac{1}{n}\log|d| \geqslant \gamma + \log 8\pi + \frac{r_1}{n}\frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \{1 - F(x\sqrt{y})\}k(x)\,dx - \frac{4}{n}\int_0^\infty F(x\sqrt{y})\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{2}\,dx ,$$

où l'on a posé

$$k(x) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}(x/2)} + \frac{r_1}{n}\,\frac{1}{2\,\mathrm{ch}(x/2)} ,$$

et on remarque que, pour chaque donnée de n (le rapport (r_1/n) étant supposé fixé), la valeur optimum de y pour une fonction F donnée s'obtient par dérivation, ce qui donne la formule

$$(12)\qquad \frac{n}{4} = \frac{\int_0^\infty F'(x\sqrt{y}\ \mathrm{ch}\,\frac{x}{2}\,x\,dx}{\int_0^\infty F'(x\sqrt{y})\,k(x)\,x\,dx} .$$

Cette formule permet de calculer y connaissant n , et il suffit alors de reporter cette valeur au second membre de (11) ; on remarquera qu'une erreur sur le choix de y en fonction de n par (12) peut affecter la précision, mais non l'exactitude, de la minoration donnée par (11), puisque celle-ci est valable pour tout y .

4. Minorations explicites sans hypothèse de Riemann.

On opère de façon analogue en substituant à la fonction $f(x)$ la fonction $f(x\sqrt{y})$ dans l'inégalité (8), ce qui donne

$$(13)\quad \frac{1}{n}\log|d| \geqslant \gamma + \log 4\pi + \frac{r_1}{n} - \int_0^\infty \{1 - f(x\sqrt{y})\}\,h(x)\,dx - \frac{4}{n}\int_0^\infty f(x\sqrt{y})\,dx$$

où l'on a posé $h(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,x} + (\dfrac{r_1}{n})\,\dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}^2(x/2)} = \dfrac{k(x)}{\mathrm{ch}(x/2)}$; on observe que l'on a $\int_0^\infty f(x\sqrt{y})\,dx = \dfrac{1}{\sqrt{y}}\int_0^\infty f(x)\,dx$. La dérivation de (13) fournit l'optimum de y en fonction de n (le rapport $\dfrac{r_1}{n}$ étant supposé fixé) par l'intermédiaire de la formule

$$(14)\qquad \frac{n}{4} = \frac{\int_0^\infty f(x)\,dx}{-\,y\int_0^\infty f'(x\sqrt{y})\,h(x)\,x\,dx} .$$

Le meilleur choix de y se révèle être ici de l'ordre de $n^{-2/3}$, comme on l'avait déjà vu pour $f(x) = \exp(-x^2)$. Pour obtenir une inégalité asymptotique, on établit, sur le modèle du lemme 3, le lemme suivant.

LEMME 5. - Soit f une fonction paire, positive ainsi que sa transformée de

<u>Fourier, vérifiant</u> $f(0) = 1$ <u>et possédant une dérivée seconde continue. Alors on a l'inégalité</u>

$$\int_0^\infty \{1 - f(x\sqrt{y})\}\{\frac{1}{\operatorname{sh} x} + \frac{r_1}{n}\frac{1}{2\operatorname{ch}^2(x/2)}\}\,dx \leq y\,\frac{|f''(0)|}{2}\,b$$

<u>avec</u> $b = 4\lambda(3) + \frac{r_1}{n}\frac{\pi^2}{3} = 4{,}20719916\ldots + \frac{r_1}{n}\,3{,}289868134\ldots$

<u>Preuve</u>. - Par la méthode du lemme 3, elle se ramène au calcul des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{\operatorname{sh} x}\,dx = 4\lambda(3)\ , \quad \int_0^\infty \frac{x^2}{2\operatorname{ch}^2(x/2)}\,dx = \frac{\pi^2}{3}\ .$$

Pour le calcul de celle-ci, on peut partir de la formule (5) et prouver successivement les suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+e^{-x}}\,dx = \psi(a) - \psi(\tfrac{a}{2}) - \log 2$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+e^{-bx}}\,dx = \frac{1}{b}\,\{\psi(\tfrac{a}{b}) - \psi(\tfrac{a}{2b}) - \log 2\}$$

(dériver par rapport à b et faire $b = 1$)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(a+1)x}\,x}{(1+e^{-x})^2}\,dx = -\,\{\psi(a) - \psi(\tfrac{a}{2}) - \log 2\} + \{-\,a\psi'(a) + \tfrac{a}{2}\,\psi'(\tfrac{a}{2})\}$$

(dériver par rapport à a)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(a+1)x}\,x^2}{(1+e^{-x})^2}\,dx = 2\psi'(a) + a\psi''(a) - \psi'(\tfrac{a}{2}) - \tfrac{a}{4}\,\psi''(\tfrac{a}{2})$$

$$= 2\psi'(a+1) + a\psi''(a+1) - \psi((\tfrac{a}{2}+1) - \tfrac{a}{4}\,\psi''(\tfrac{a}{2}+1)$$

(faire $a = 0$)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,x^2}{(1+e^{-x})^2}\,dx = \psi'(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Le lemme 5 entraîne l'inégalité

$$\frac{1}{n}\log|d| \geq \gamma + \log 4\pi + \frac{r_1}{n} - \frac{4}{n\sqrt{y}}\int_0^\infty f - y\,\frac{|f''(0)|}{2}\,b\ ,$$

où le meilleur y est donné par l'égalité $y^{3/2}\,|f''(0)| = \frac{4}{bn}\int f$, ce qui fournit l'inégalité

(15) $$\frac{1}{n}\log|d| \geq \gamma + \log 4\pi + \frac{r_1}{n} - \frac{3}{n^{2/3}}\,\{2b\,B(f)\}^{1/3}\ ,$$

où l'on a posé $B(f) = |f''(0)|\,(\int f)^2$, ou, pour se libérer de la condition $f(0)=1$,

$$B(f) = |f''(0)|\,(\int f)^2/(f(0))^3\ .$$

Par exemple, pour la fonction déjà utilisée $f(x) = \exp(-\,x^2)$, on a $B(f) = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne les inégalités, valables pour tout n ,

$$\frac{1}{n}\log|d| \geq \gamma + \log 4\pi + 1 - 8{,}6n^{-2/3} \qquad (\text{cas } r_1 = n\ )$$

$$\geq \gamma + \log 4\pi - 7{,}1n^{-2/3} \qquad (\text{cas } r_1 = 0\ )\ .$$

Les constantes ci-dessus peuvent être améliorées en choisissant mieux la fonction f. Une telle amélioration a été trouvée par Bernadette RIOU, par le choix de $f = u * u$, avec $u(x) = 1 + \cos x$ pour $|x| \leqslant \pi$, et 0 sinon, ce qui donne $B(f) = 4\pi^2/27$, et permet de remplacer 8,6 par 8,4 et 7,1 par 7. Luc TARTAR a montré que ce choix de f est optimum, parmi les fonctions $f = u * u$, où u est une fonction paire positive, ayant, là où elle est strictement positive, une dérivée, cette dérivée étant bornée et intégrable. Il a également eu l'idée de chercher la transformée de Fourier de f sous la forme $v * v$, où v est paire positive. Dans ce cas, la fonction optimum correspond à $v(x) = 1 - x^2$ pour $|x| \leqslant 1$, et 0 sinon. En posant

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{-ixt}\, dt ,$$

on a

$$g(x) = \frac{2}{\pi x^3} (\sin x - x \cos x) \quad \text{et} \quad f(x) = g(x)^2 ,$$

d'où $B(f) = 18\pi^2/125$, ce qui fournit les inégalités, valables pour tout n (l'arrondi est dans le bon sens) :

$$(16) \qquad \frac{1}{n} \log|d| \geqslant \gamma + \log 4\pi + 1 - 8{,}317302\, n^{-2/3} \qquad (\text{cas } r_1 = n)$$

$$\geqslant \gamma + \log 4\pi - 6{,}860404\, n^{-2/3} \qquad (\text{cas } r_1 = 0).$$

Du point de vue numérique, le remplacement de la fonction $\exp(-x^2)$ par celle de Bernadette RIOU se révèle favorable pour toute valeur du degré. Pour la fonction de TARTAR, les expériences sont en cours. En fait [2], il apparaît une nouvelle amélioration, comme le montrent les calculs effectués à Strasbourg par J.-P. WEBER sous la direction de M. MIGNOTTE, et aussi les considérations suivantes.

On part de la formule (13), et on cherche à estimer le terme

$$(17) \qquad \int_0^\infty \{1 - f(x\sqrt{y})\}\, h(x)\, dx$$

sous l'hypothèse qu'existent les dérivées utiles. La positivité de la transformée de Fourier de f implique celle de $(-1)^k f^{(2k)}(x)$, et par suite les inégalités

$$0 \leqslant 1 - f(x\sqrt{y}) \leqslant y \frac{x^2}{2} |f''(0)|$$

$$y \frac{x^2}{2} |f''(0)| - y^2 \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) \leqslant 1 - f(x\sqrt{y})$$

$$\leqslant y \frac{x^2}{2} |f''(0)| - y^2 \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + y^3 \frac{x^6}{6!} |f^{(6)}(0)| ,$$

et ainsi de suite ; autrement dit $f(x\sqrt{y})$ est encadré par les sommes partielles de sa série de Taylor. Donc (17) est encadré par les sommes partielles de la série

$$(18) \qquad \frac{y}{2} |f''(0)| \int_0^\infty x^2 h(x)\, dx + \dots + (-1)^{k+1} \frac{y^k}{(2k)!} |f^{2k}(0)| \int_0^\infty x^{2k} h(x)\, dx + \dots$$

Se rappelant que

$$h(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} x} + \frac{r_1}{n} \frac{1}{2\operatorname{ch}^2(x/2)} ,$$

[2] ce qui suit a été ajouté pendant l'été.

on calcule sans difficulté les intégrales

$$\int_0^\infty x^k\ h(x)\ dx = 2(k!)\{\lambda(k+1) + \frac{r_1}{n}\ \eta(k)\}$$

avec les notations classiques

$$\lambda(k) = 1 + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + \dots \qquad \eta(k) = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} - \frac{1}{4^k} \dots$$

(bien sûr, on a $\lambda(k) = (1 - (1/2^k))\ \zeta(k)$ et $\eta(k) = (1 - (1/2^{k-1}))\ \zeta(k)$), donc la série (18) prend la forme

$$(19) \quad y|f''(0)|\ 2\{\lambda(3) + \frac{r_1}{n}\ \eta(2)\}$$

$$+ \dots + (-1)^{k+1}\ y^k\ |f^{(2k)}(0)|\ 2\{\lambda(2k+1) + \frac{r_1}{n}\ \eta(2k)\} + \dots$$

Maintenant, prenons pour f la fonction de Tartar (avec $f(0) = 1$),

$$f(x) = \{\frac{3}{x^3}\ (\sin x - n \cos x)\}^2 ,$$

et calculons sa série de Taylor. Par exemple, on peut partir de $v(t) = \sup(1-t^2, 0)$ puis calculer $w = v * v$, soit

$$w(u) = -\frac{1}{30}\ (u^5 - 20u^3 + 40u^2 - 32) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant 2 ,$$

et utiliser la définition de f comme

$$f(x) = \frac{9}{16}\int_{-\infty}^{+\infty} w(u)\ e^{-iux}\ du ,$$

ce qui donne

$$(20) \qquad (-1)^k\ f^{(2k)}(0) = \frac{3}{80}\int_0^2 u^{2k}\ (32 - 40u^2 + 20u^3 - u^5)\ du$$

$$= \frac{3}{5}\ 2^{2k+2}\ \{\frac{1}{2k+1} - \frac{5}{2k+3} + \frac{5}{2k+4} - \frac{1}{2k+6}\}$$

$$= \frac{9.2^{2k+3}}{(2k+1)(2k+3)(2k+4)(2k+6)} .$$

Les premières valeurs sont contenues dans la table suivante :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(-1)^k\ f^{(2k)}(0)$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{72}{175}$	$\frac{64}{105}$	$\frac{256}{231}$	$\frac{2304}{1001}$	$\frac{1024}{195}$	$\frac{16384}{1275}$	$\frac{589824}{17765}$	$\frac{131072}{1463}$	$\frac{524288}{2093}$

De l'ordre de grandeur de ces termes, et du fait que les λ et η sont bornés (en fait très voisins de 1) résulte la convergence de la série (19) pour $|y| < \frac{1}{4}$. Ceci correspond, par l'estimation approximative du meilleur y

$$ny^{3/2}\ |f''(0)|\ \{\lambda_3 + \frac{r_1}{n}\ \eta_2\} = \int_0^\infty f$$

soit

$$(21) \qquad y^{3/2}\ (n\lambda_3 + r_1\ \eta_2) = \frac{3\pi}{2}$$

à

$$n\lambda_3 + r_1\ \eta_2 \geqslant 12\pi$$

c'est-à-dire

$$1{,}05\ldots\ n + 0{,}82\ldots\ r_1 \geqslant 37,\ldots$$

et, expérimentalement, un peu plus de 50.

On trouve ainsi que la série (19) est adéquate au calcul numérique de (17), disons pour $n \geqslant 100$, le nombre de termes utiles étant d'autant plus petit que n est plus grand. Il reste à prolonger ce calcul aux petites valeurs de n, c'est-à-dire aux valeurs relativement grandes de y, disons jusqu'à 20. On y parvient par le procédé suivant.

Introduisons la série analogue à (19), mais plus simple

$$(22)\quad L(y) = 2y|f''(0)| + \ldots + (-1)^{k+1}\, 2y^k\, |f^{(2k)}(0)| + \ldots$$

$$= \frac{4}{5}\, y - \frac{144}{175}\, y^2 + \ldots + (-1)^{k+1}\, y^k\, \frac{9.2^{2k+4}}{(2k+1)(2k+3)(2k+4)(2k+6)} + \ldots$$

Cette fonction, ainsi définie pour $|y| < \frac{1}{4}$, se révèle sans difficulté être égale à

$$(23)\quad -\frac{3}{20y^2} + \frac{33}{10y} + 2 + \left(\frac{3}{80y^3} + \frac{3}{4y^2}\right)\log(1+4y) - \left(\frac{3}{y} + \frac{12}{5}\right)\frac{1}{\sqrt{y}}\ \mathrm{arc\ tg}\ 2\sqrt{y}\ .$$

Cette dernière expression est commode pour y pas trop petit, tandis que la forme (22) est commode pour y assez petit. Grâce à cette fonction, on peut écrire la fonction définie par (17), disons $L_1(y)$, sous la forme

$$(24)\quad L_1(y) = L(y) + \frac{1}{3}\, L\!\left(\frac{y}{3^2}\right) + \frac{1}{5}\, L\!\left(\frac{y}{5^2}\right) + \ldots + \frac{r_1}{n}\, \{L(y) - L\!\left(\frac{y}{2^2}\right) + L\!\left(\frac{y}{3^2}\right) \ldots\}\ .$$

En pratique, on peut utiliser des expressions comme les suivantes, écrites dans le cas totalement imaginaire $(r_1 = 0)$

$$(25)\quad L_1(y) \leqslant L(y) + \frac{1}{3}\, L\!\left(\frac{y}{9}\right) + \frac{1}{5}\, L\!\left(\frac{y}{25}\right) + \frac{4}{5}\, y\left(\lambda(3) - 1 - \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3}\right)$$

$$- \frac{144}{175}\, y^2 \left(\lambda(5) - 1 - \frac{1}{3^5} - \frac{1}{5^5}\right) + \frac{128}{105}\, y^3 \left(\lambda(7) - 1 - \frac{1}{3^7} - \frac{1}{5^7}\right)$$

$$\leqslant L(y) + \frac{1}{3}\, L\!\left(\frac{y}{9}\right) + \frac{1}{5}\, L\!\left(\frac{y}{25}\right) + 0{,}006\ 762\ 754 \times \frac{4}{5}\, y$$

$$- 0{,}000\ 088\ 536 \times \frac{144}{175}\, y^2 + 0{,}000\ 001\ 502 \times \frac{128}{105}\, y^3\ .$$

Ces inégalités sont justes, avec une perte de qualité de l'ordre de grandeur de $0{,}55\ 10^{-7}\ y^4$, donc très acceptables si n n'est pas trop petit.

Ceci étant, la formule (13) s'écrit encore, dans le cas actuel :

$$(26)\qquad \frac{1}{n}\log|d| \geqslant \gamma + \log 4\pi + \frac{r_1}{n} - \frac{12\pi}{5n\sqrt{y}} - L_1(y)\ .$$

Cette inégalité est valable pour tout y positif, mais optimisée par le minimum de $\frac{12\pi}{5n\sqrt{y}} + L_1(y)$. Le meilleur y peut être obtenu en résolvant l'équation dérivée; pour les grands degrés, il est voisin de la valeur fournie par (21). Quoi qu'il en soit, toute valeur de y, reportée dans (26) au moyen d'une approximation comme (25), donne une inégalité valable. Par exemple, pour $n = 8$, $r_1 = 0$, $y = 1{,}7242$, on trouve par (23) les approximations

$$L(y) < 0{,}594\ 568\ 2$$

$$\frac{1}{3}\, L(\tfrac{y}{9}) < 0{,}043\ 159\ 5$$

$$\frac{1}{5}\, L(\tfrac{y}{25}) < 0{,}010\ 323\ 3$$

d'où, par (25), l'inégalité $L_1(y) < 0{,}657\ 172\ 1$ et, par (26), la minoration $\frac{1}{8}\log|d| > 1{,}733\ 311$, d'où $|d|^{1/8} > 5{,}659\ 36$.

En procédant ainsi, il est aisé d'établir des tables telles que celle qui est donnée ci-après. A titre de comparaison, il a été indiqué à droite des exemples de valeurs connues et relativement petites de $|d|^{1/n}$. La plupart de ces exemples concernent des corps de classes de corps quadratiques imaginaires, et ont été calculés par Gilles ROBERT. A la lecture de cette table se confirme l'impression que l'hypothèse de Riemann généralisée est d'autant plus utile que le degré est plus grand, la table actuelle étant relativement satisfaisante pour les bas degrés.

Effet des contributions locales. - La formule (8), transformée comme ci-dessus (Cf. (26)) devient

$$\frac{1}{n}\log|d| \geqslant \gamma + \log 4\pi + \frac{r_1}{n} - \frac{12\pi}{5n\sqrt{y}} - L_1(y) + \frac{4}{n}\sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\log N\mathfrak{p}}{1 + N\mathfrak{p}^m}\, f(m \log N\mathfrak{p}) \ .$$

Donnons ici une idée de l'effet numérique du dernier terme dans le cas particulier où tous les idéaux $\mathfrak{p}$ au-dessus d'un nombre premier p ont le même indice de ramification e et le même degré résiduel f (que nul ne confondra avec la fonction notée f), donc la même norme $q = p^f$. La contribution de p à la correction est alors

$$\frac{4\log p}{e}\sum_m \frac{f(m\log q)}{1+q^m} = \text{ disons } \frac{4\log p}{e}\, C(q) \ .$$

Par exemple, pour $n = 8$, $r_1 = 0$, on peut estimer ces termes en gardant $y = 1{,}7242$ (c'est-à-dire en renonçant à affiner l'extremum) et l'on trouve les valeurs suivantes pour $p = 2$:

$C(2) = 0{,}403\ 589$	correction :	$\frac{4}{e} \times 0{,}279\ 746$
$C(2^2) = 0{,}101\ 343$	:	$\frac{4}{e} \times 0{,}007\ 119$
$C(2^4) = 0{,}001\ 682$	:	$\frac{4}{e} \times 0{,}001\ 166$
$C(2^8) = 2{,}3\ 10^{-6}$	:	$6{,}3\ 10^{-6}$

On observe que pour le corps (signalé par H. W. LENSTRA) de discriminant $2^8\, 17^3$, on a $e = 2$, $f = 4$. Pour un tel corps, la correction relative à $p = 2$ est $0{,}002\ 331$ amenant $\frac{1}{n}\log|d|$ à être supérieur à $1{,}733\ 311 + 0{,}002\ 331 = 1{,}735\ 642$, donc $\sqrt[n]{|d|}$ à être supérieur à $5{,}672$ au lieu de $5{,}659$. On voit aussi que, s'il existe un corps de degré 8, totalement imaginaire, de discriminant plus petit que le précédent, il est impossible que $f = 1$, et aussi, si $f = 2$, que $e = 1$.

Par ces exemples apparaît le profit, déjà signalé par A. M. ODLYZKO, qu'il y a à introduire les corrections locales.

Discriminants des corps totalement imaginaires

$n =$	$\|d\|^{1/n} \geq$	Exemples connus $\|d\|^{1/n} =$	Exemples connus $\|d\| =$
2	1.722 119	1.732	3
4	3.254 561	3.289	117
6	4.557 067	4.796	23^3
8	5.659 362	5.786	$2^8\ 17^3$
10	6.600 341	6.841	$3^5\ 31^4$
12	7.412 879	7.774	$3^9\ 19^5$
14	8.122 437	8.468	$2^{14}\ 29^6$
16	8.748 418		
18	9.305 672		
20	9.805 700		
22	10.257 528		
24	10.668 331		
26	11.043 890		
28	11.388 914		
30	11.707 282		
32	12.002 218	13.181	$2^{16}\ 3^{24}\ 5^{28}$
34	12.276 431		
36	12.532 211		
38	12.771 509		
40	12.996 001		
42	13.207 134		
44	13.406 165		
46	13.594 193		
48	13.772 182	15.565	$3^{42}\ 7^{44}$
50	13.940 980		
52	14.101 342		
54	14.253 938		
56	14.399 364		
58	14.538 156		
60	14.670 796		
64	14.919 315		
68	15.147 922		
72	15.359 100		
76	15.554 920		
80	15.737 125		
84	15.907 195		
88	16.066 396		
92	16.215 816		
96	16.356 398		
100	16.488 963		
120	17.053 916		
140	17.497 409		
160	17.856 856		
180	18.155 381		
200	18.408 129		
220	18.625 485		
240	18.814 831		
260	18.981 576		
280	19.129 781		
300	19.262 565		
320	19.382 363		
340	19.491 109		
360	19.590 361		

Georges POITOU
Math., Bât. 425, Univ. Paris-Sud
91405 ORASY

(Texte reçu le 9 septembre 1977)