Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Marie-José Bertin

De nouveaux ensembles fermés de nombres algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1975-1976), exp. nº 31, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 31, 9 p.

14 juin 1976

DE NOUVEAUX ENSEMBLES FERMÉS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Marie-José BERTIN

L'idée de départ de cette étude est un résultat d'Alain CONNES, exposé au Séminaire Delange-Pisot-Poitou en 1970/71 [3].

CONNES a en effet montré comment ses travaux sur les ordres faibles permettaient d'obtenir des résultats sur l'ensemble Λ des nombres algébriques réels positifs dont tout les conjugués ont leur partie réelle strictement négative.

Je me contenterai ici de dégager le résultat, obtenu par CONNES dans la démonstration de l'un de ses théorèmes, qui mènera à la caractérisation de l'ensemble Λ, puis à celle de l'ensemble Σ des nombres algébriques θ, $\theta > 1$, ayant tous leurs conjugués situés dans le disque D, où $D = \{z \; ; \; z \in \underset{\sim}{C} , |z| < 1\}$.

Rappels. - Λ désigne donc l'ensemble des nombres algébriques réels positifs dont tous les conjugués ont leur partie réelle strictement négative.

Ω désigne le domaine simplement connexe formé des nombres complexes z à partie réelle strictement positive.

On dira qu'une fraction rationnelle $F(x_1, \ldots, x_n)$ appartient à $\omega(x_1, \ldots, x_n)$, si elle est obtenue à partir des x_i par itération finie des opérations.

$$(F_1 , F_2) \mapsto \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 \quad \text{avec} \quad \lambda_i \in Q^+ \quad \text{et} \quad F_1 \mapsto 1/F_1 .$$

CONNES montre alors que, si λ appartient à Λ, il existe deux nombres rationnels positifs μ_1 et μ_2 et un nombre réel u, $u > 0$, tel que $\lambda = \mu_1 + (1/(\mu_2 + u))$, puis que l'on a

$$u = G(\lambda) \quad \text{avec} \quad G(\lambda) \in \omega(\lambda , \frac{1}{\lambda} , 1) .$$

Par suite, on a

$$\lambda = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + G(\lambda)} = F(\lambda) ,$$

et λ est racine d'une équation du type $z = F(z)$, où $F(z)$ est une fraction rationnelle à coefficients entiers.

A partir de ce résultat, on peut énoncer ainsi la caractérisation de l'ensemble Λ, puis celle de l'ensemble Σ.

PROPOSITION 1.

(i) Soit λ un nombre algébrique appartenant à Λ. Alors il existe une fraction rationnelle $F(z) = A(z)/Q(z)$, où $A(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers possédant les propriétés suivantes :

(a) $F(z)$ est holomorphe dans Ω ,

(b) $F(\Omega) \subset \Omega$,

(c) $F(\Omega)$ est relativement compact dans Ω ,

et telle que λ soit racine de l'équation $z = F(z)$.

(ii) Réciproquement, une équation de la forme $z = F(z)$, où $F(z)$ est une fonction rationnelle de la forme $A(z)/Q(z)$, où $A(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers, possédant les propriétés (a), (b) et (c), possède une racine unique λ appartenant à Λ .

Les affirmations (i) (a) et (b) se démontrent à partir du résultat de CONNES en remarquant que les éléments $H(z)$ de $\omega(z , (1/z) , 1)$ sont holomorphes dans Ω , et vérifient l'inclusion $H(\Omega) \subset \Omega$.

Pour démontrer (i) (c), on remarque que λ étant racine de

$$z = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + G(z)} = F(z) ,$$

on a donc

$$F(\Omega) \subset \overline{B}(a ; \frac{1}{2\mu_2}) ,$$

où $\overline{B}(a , (1/2\mu_2))$ désigne la boule fermée de centre $a = (\mu_1 + (1/\mu_2) , 0)$ et de rayon $1/2\mu_2$.

La réciproque (ii) utilise le théorème suivant, conséquence du théorème de Rouché:

"Soit D un domaine simplement connexe de $\underset{\sim}{C}$, G une application holomorphe de D dans D telle que $G(D)$ soit relativement compact dans D , alors G admet un point fixe et un seul".

Pour conclure, et montrer que l'unique racine λ située dans Ω de l'équation $z = F(z)$ appartient à Λ , il suffit de remarquer que l'équation $z = F(z)$ ne peut avoir de racines sur l'axe imaginaire à cause de l'inclusion $F(\overline{\Omega}) \subset \overline{F(\Omega)} \subset \Omega$, obtenue grâce aux conditions (a), (b), (c).

Cette caractérisation de l'ensemble Λ entraîne celle de l'ensemble Σ .

PROPOSITION 2. - Soit θ un nombre algébrique appartenant à Σ . Alors, il existe des polynômes $A(Z)$ et $Q(Z)$ à coefficients entiers rationnels tels que l'on ait $A(0) \neq 0$, $A(Z)/Q(Z)$ holomorphe dans $|Z| \leq 1$ vérifiant $|A(Z)/Q(Z)| \leq h < 1$ pour $|Z| < 1$ et tels que $1/\theta$ soit l'unique racine de module inférieur à 1 de l'équation $Z = A(Z)/Q(Z)$.

Réciproquement, toute équation de la forme $Z = A(Z)/Q(Z)$ avec $A(Z)$ et $Q(Z)$ polynômes à coefficients entiers vérifiant les conditions précédentes, possède une racine unique $1/\theta$ dans $|Z| < 1$ dont l'inverse ou l'opposé de l'inverse appartient à Σ.

La proposition 2 se déduit de la proposition 1 en utilisant la transformation conforme $z = (1 + Z)/(1 - Z)$ qui transforme

$$D = \{Z \; ; \; |Z| < 1\} \quad \text{en} \quad \Omega = \{z \; ; \; \operatorname{Re} z > 0\} .$$

On peut alors définir les familles suivantes de nombres algébriques.

DÉFINITION 1. - Un nombre algébrique θ appartient à la famille $\Sigma_{q,h}$ où q est un entier, $q \geq 2$, h un réel, $0 < h < 1$, si l'on a $\theta > 1$ et si $1/\theta$ est l'unique racine située dans $|z| < 1$ d'une équation de la forme $z = A(z)/Q(z)$, où $A(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers vérifiant $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q$ entier fixé, $A(z)/Q(z)$ holomorphe dans $|z| \leq 1$ telle que

$$|A(z)/Q(z)| \leq h < 1 \quad \text{sur} \quad |z| = 1 .$$

Remarques.

1° D'après la proposition 2, on a

$$\Sigma = \bigcup_{q,h,q\geq 2;0<h<1} \Sigma_{q,h} .$$

En effet, si θ appartient à Σ, $1/\theta$ est racine de $z = A(z)/Q(z)$. Si l'on avait $Q(0) = q < 0$, il suffirait de remarquer que $1/\theta$ est également racine de

$$z = - A(z)/- Q(z) .$$

Comme $A(z)/Q(z)$ est holomorphe dans $|z| \leq 1$, on a, d'après le principe du maximum, $|A(0)|/q < 1$, et comme $A(0)$ est entier, cela entraîne $q \geq 2$.

2° La fonction $f(z) = A(z)/Q(z)$, étant holomorphe dans $|z| \leq 1$, et vérifiant $|f(z)| \leq h < 1$ sur $|z| = 1$, possède un développement en série de Taylor convergeant dans $|z| \leq 1$, de la forme :

$$f(z) = u_0 + u_h z^h + \dots + u_n z^n + \dots$$

Par suite, la fonction

$$f_1(z) = \frac{f(z) - u_0}{z^h[1 - u_0 f(z)]}$$

possède les mêmes propriétés que la fonction $f(z)$. On a donc $|f_1(1/\theta)| < 1$, et ceci est équivalent aux inégalités :

$$- (1/\theta^h) [1 - u_0(1/\theta)] < (1/\theta) - u_0 < (1/\theta^h)[1 - u_0(1/\theta)] .$$

L'inégalité de droite montre que l'on a $u_0 > 0$ soit $A(0) > 0$, si θ appartient à $\Sigma_{q,h}$.

3° L'ensemble $\Sigma_{q,h}$ contient en particulier des entiers algébriques, donc des nombres de Pisot ; mais il contient aussi des nombres appartenant aux divers ensembles S_k, $1 \leqslant k \leqslant q-1$, introduits par exemple dans PISOT [7].

La famille de nombres algébriques $\Sigma_{q,h}$ possède certaines propriétés topologiques intéressantes.

THÉORÈME 1. - <u>L'ensemble des nombres</u> $\Sigma_{q,h}$ <u>est fermé</u>.

La démonstration utilise la famille $\mathfrak{F}(q\ ,\ 0)$ de fractions rationnelles, introduite par PISOT [6], famille compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $|z| < 1$. (On désigne par $\mathfrak{F}(q\ ,\ 0)$ l'ensemble des fractions rationnelles $\varphi(z) = A(z)/Q(z)$, où $A(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers vérifiant $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q$ entier fixé, $\varphi(z)$ holomorphe dans $|z| < 1$ et vérifiant $|\varphi(z)| \leqslant 1$ sur $|z| = 1$.)

On peut alors penser à étudier les ensembles dérivés des ensembles $\Sigma_{q,h}$. On peut montrer que le premier ensemble dérivé $(\Sigma_{q,h})'$ n'est pas vide pour h assez grand, que l'ensemble dérivé seconde $(\Sigma_{q,h})''$ n'est pas vide pour $q \geqslant 3$ et h assez grand, et plus précisément on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - <u>Si un nombre algébrique</u> θ <u>appartient au n-ième ensemble dérivé</u> $(\Sigma_{q,h})^{(n)}$ <u>de l'ensemble</u> $\Sigma_{q,h}$, <u>alors</u> $1/\theta$ <u>est l'unique racine inférieure à</u> 1 <u>d'une équation de la forme</u> $z = A(z)/Q(z)$, <u>et la valeur moyenne de</u> $|A(z)/Q(z)|^2$ <u>sur</u> $|z| = 1$ <u>est au plus égale à</u> $h^2 - (n/q^4)$.

On en déduit aussitôt le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - <u>Le n-ième ensemble dérivé de</u> $\Sigma_{q,h}$ <u>est vide pour</u> $n \geqslant q^4$, <u>et ceci quel que soit</u> h, $0 < h < 1$.

Citons enfin deux résultats qui ressemblent à des résultats obtenus précédemment pour les ensembles S_q [1].

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> θ <u>un nombre algébrique de</u> $\Sigma_{q,h}$ <u>tel que</u> $1/\theta$ <u>soit racine de l'équation</u> $z = A(z)/Q(z)$, <u>alors, si</u> θ <u>n'est pas racine de la même équation, pour tout multiple</u> q_1 <u>de</u> q, <u>il existe un nombre réel</u> h', $0 < h \leqslant h' < 1$, <u>tel que</u> θ <u>appartienne à l'ensemble dérivé de</u> $\Sigma_{q_1,h'}$.

PROPOSITION 4. - <u>Si</u> θ <u>est un nombre de Pisot appartenant à</u> $\Sigma_{q,h}$ <u>et pour lequel on a</u> $A(0) = 1$, <u>alors pour tout multiple</u> q_1 <u>de</u> q, <u>il existe</u> h', $0 < h \leqslant h' < 1$, <u>tel que</u> θ <u>appartienne à l'ensemble dérivé de</u> $\Sigma_{q_1,h'}$.

Nous allons maintenant généraliser les ensembles $\Sigma_{q,h}$ et définir des ensembles $\mathcal{C}_q$ contenant tous les $\Sigma_{q,h}$ pour tous les h, $0 < h < 1$.

DÉFINITION 2. - <u>Un nombre algébrique</u> θ, $\theta > 1$, <u>appartient à</u> $\mathcal{C}_q$ <u>si</u> $1/\theta$ <u>est l'unique racine de module inférieur à</u> 1 <u>d'une équation de la forme</u> $z = A(z)/Q(z)$, <u>où</u> $A(z)$ <u>et</u> $Q(z)$ <u>sont des polynômes à coefficients entiers, vérifiant</u> $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q$ <u>entier</u> > 0 <u>fixé,</u> $A(z)/Q(z)$ <u>holomorphe dans</u> $|z| < 1$ <u>telle que l'on</u>

ait $|A(z)/Q(z)| \leq 1$ sur $|z| = 1$.

On peut montrer que :

- Les ensembles $\mathcal{E}_q$ contiennent en particulier des nombres de Salem,
- Les ensembles $\mathcal{E}_q$ sont fermés.

On remarque, en outre, que la fraction rationnelle $f(z) = A(z)/Q(z)$ introduite dans la définition d'un nombre algébrique θ de l'ensemble $\mathcal{E}_q$, est une fonction de Schur, c'est-à-dire une fonction holomorphe dans $|z| < 1$, bornée par 1 sur $|z| = 1$.

Soit donc $f(z)$ une fonction de Schur dont le développement en série de Taylor dans $|z| < 1$ est

$$f(z) = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$$

avec les u_i réels. SCHUR a montré qu'étant donné une telle fonction, vérifiant

$$f(0) = u_0 \quad \text{avec} \quad |u_0| < 1 ,$$

on peut former la fonction

$$f_1(z) = \frac{f(z) - u_0}{z[1 - u_0 f(z)]}$$

et que la fonction $f_1(z)$ est une nouvelle fonction de Schur.

Si $|u_0| = 1$, alors $f(z)$ est constante.

Plus généralement, SCHUR a défini par récurrence, la suite de fonctions

$$f_{n+1}(z) = \frac{f_n(z) - f_n(0)}{z[1 - f_n(0) f_n(z)]} .$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

- ou bien $|f_i(0)| < 1$, pour tout $i \geq 0$. La fonction de Schur $f(z)$ est dite de rang infini,
- ou bien, il existe un entier $s \geq 0$, tel que $|f_i(0)| < 1$ pour $1 \leq i < s$ et $|f_s(0)| = 1$. La fonction de Schur $f(z)$ est dite de rang s .

SCHUR a montré qu'une condition nécessaire et suffisante, pour que le fonction de Schur $f(z)$ soit de rang s , est qu'il existe deux polynômes de degré s , $D_s(z)$ et $E_s(z)$ premiers entre eux, vérifiant $E_s(z) = \pm z^s D_s(1/z)$, $E_s(z)$ ayant tous ses zéros extérieurs au cercle unité et tels que $f(z) \equiv D_s(z)/E_s(z)$.

SCHUR a également montré le théorème suivant :

THÉORÈME S. - <u>Soit</u> $f(z)$ <u>une fonction de Schur de rang</u> s , <u>fini ou infini, dont le développement en série de Taylor au voisinage de l'origine est</u>

$$f(z) = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$$

1° <u>Il existe pour tout entier</u> n , $1 \leq n \leq s + 1$, <u>un couple unique de polynômes</u>

$D_n(z)$ et $E_n(z)$, de degré n, premiers entre eux, vérifiant $E_n(0) = 1$,

$$E_n(z) = -z^n D_n(1/z) ,$$

$E_n(z)$ ayant tous ses zéros dans $|z| > 1$, la fraction rationnelle $D_n(z)/E_n(z)$ ayant au voisinage de l'origine le développement en série de Taylor :

$$D_n(z)/E_n(z) = u_0 + u_1 z + \dots + u_{n-1} z^{n-1} + w_n z^n + \dots$$

2° De même, il existe, pour tout entier n, $1 \leq n \leq s+1$, un couple unique de polynômes premiers entre eux, $D^*_n(z)$ et $E^*_n(z)$, de degré n, vérifiant $E^*_n(0) = 1$,

$$E^*_n(z) = z^n D^*_n(1/z) ,$$

$E^*_n(z)$ ayant tous ses zéros dans $|z| > 1$, et tels que la fraction rationnelle $D^*_n(z)/E^*_n(z)$ possède dans $|z| \leq 1$ un développement :

$$D^*_n(z)/E^*_n(z) = u_0 + u_1 z + \dots + u_{n-1} z^{n-1} + w^*_n z^n + \dots$$

3° On a de plus, les inégalités $w_n < u_n < w^*_n$ pour $n < s$,

$$w_s < u_s = w^*_s \ \text{ si } \ f(1) = 1 \ \text{ et } \ w_s = u_s < w^*_s \ \text{ si } \ f(1) = -1 .$$

4° Les polynômes $D_n(z)$, $E_n(z)$, $D^*_n(z)$, $E^*_n(z)$ vérifient des relations de récurrence :

$$(4.a) \quad D_{n+1}(z) = \frac{w^*_n - u_n}{w^*_n - w_n}(1+z)\, D_n(z) + \frac{u_n - w_n}{w^*_n - w_n}(1-z)\, D^*_n(z) ,$$

$$(4.b) \quad D_{n+2}(z) = (1+z)\, D_{n+1}(z) - \frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n}\, z\, D_n(z) .$$

5° On a enfin la relation

$$f_n(z) = \frac{[E_n(z) + E^*_n(z)]\, f(z) - [D_n(z) + D^*_n(z)]}{[E_n(z) - E^*_n(z)]\, f(z) - [D_n(z) - D^*_n(z)]} .$$

On peut alors montrer le théorème suivant qui permet une approximation des nombres θ de $\mathcal{C}_q$ et la détermination des deux plus grands éléments de cet ensemble.

THÉORÈME 3. - Soit θ un élément de $\mathcal{C}_q$ tel que $1/\theta$ soit racine de

$$z = A(z)/Q(z) = f(z) ,$$

où la fonction de Schur $f(z)$ a le développement en série de Taylor au voisinage de l'origine :

$$f(z) = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$$

Alors, si $f(z)$ est de rang infini,

1° Pour tout entier n, $n \geq 1$, les équations $z = D_n(z)/E_n(z)$, où les $D_n(z)$ et $E_n(z)$ sont les polynômes définis précédemment, possèdent une racine unique τ_n dans $|z| \leq 1$, vérifiant $0 < \tau_n < 1$ et $\tau_n < 1/\theta$.

De plus, la suite des $1/\tau_n$ est décroissante et tend vers θ quand n tend vers l'infini.

2° Il existe un entier n_0 (éventuellement infini) tel que, pour tout $n \geq n_0$, les équations $z = D_n^*(z)/E_n^*(z)$, où les polynômes $D_n^*(z)$ et $E_n^*(z)$ sont ceux définis précédemment, possèdent une racine unique τ_n^* dans $|z| \leq 1$, vérifiant $0 < \tau_n^* < 1$ et $1/\theta \leq \tau_n^*$.

De plus, la suite des $1/\tau_n^*$, définie pour $n \geq n_0$, est croissante et tend vers θ quand n tend vers l'infini.

(On a un théorème analogue si $f(z)$ est de rang fini s.)

On va donner un schéma de démonstration du 1°.

Cette démonstration est basée sur l'interprétation des inégalités :

$$|f_n(1/\theta)| < 1 .$$

(a) On remarque que l'inégalité $|f_1(1/\theta)| < 1$ est équivalente à

$$\left|\frac{1/\theta - u_0}{1/\theta(1 - u_0(1/\theta))}\right| < 1 ;$$

et comme $1/\theta(1 - u_0(1/\theta)) > 0$, ceci est équivalent aux deux inégalités :

$$- 1/\theta \ (1 - u_0(1/\theta)) \underset{(1)}{<} (1/\theta) - u_0 \underset{(2)}{<} 1/\theta \ (1 - u_0(1/\theta)) .$$

L'inégalité (2) s'écrit $u_0(1 - (1/\theta^2)) > 0$ et entraîne $u_0 > 0$.

L'inégalité (1) s'écrit $u_0(1/\theta^2) - (2/\theta) + u_0 < 0$. Or le polynôme

$$g(X) = u_0 X^2 - 2X + u_0$$

possède une racine unique τ_1 dans $|z| < 1$ avec $0 < \tau_1 < 1$, puisque

$$g(0) = u_0 > 0 \quad \text{et} \quad g(1) = 2(u_0 - 1) < 0 .$$

D'où l'existence de la racine τ_1 vérifiant $\tau_1 < 1/\theta$.

(b) L'inégalité $|f_2(1/\theta)| < 1$ est équivalente aux inégalités :

$$\begin{cases} D_2(1/\theta) - (1/\theta)\, E_2(1/\theta) < 0 , \\ D_2^*(1/\theta) - (1/\theta)\, E_2^*(1/\theta) > 0 . \end{cases}$$

On peut montrer que le polynôme $V_2(z) = D_2(z) - z\, E_2(z)$ possède dans $|z| < 1$, une racine unique τ_2, $0 \leq \tau_2 < 1$, vérifiant $\tau_2 < 1/\theta$ et $\tau_1 < \tau_2$.

(c) De la formule :

$$f_n(1/\theta) = \frac{[E_n(1/\theta) + E_n^*(1/\theta)](1/\theta) - [D_n(1/\theta) + D_n^*(1/\theta)]}{[E_n(1/\theta) - E_n^*(1/\theta)](1/\theta) - [D_n(1/\theta) - D_n^*(1/\theta)]} ,$$

on déduit que l'inégalité $|f_n(1/\theta)| < 1$ est équivalente aux deux inégalités :

$$D_n(1/\theta) - (1/\theta)E_n(1/\theta) < 0 \ ,$$
$$D^*_n(1/\theta) - (1/\theta)E^*_n(1/\theta) > 0 \ .$$

Or le polynôme $V_n(z) = D_n(z) - z\,E_n(z)$ possède au plus une racine dans $|z| < 1$, et l'on a en outre

$$V_n(0) = u_0 > 0 \quad \text{et} \quad V_n(1) = 2D_n(1) \ .$$

D'après la formule (4.a), il vient

$$D_n(1) = \frac{w^*_{n-1} - u_{n-1}}{w^*_{n-1} - w_{n-1}} \, 2D_{n-1}(1) \ ,$$

et puisque $D_{n-1}(1)$ a le signe de $D_1(1) = u_0 - 1$, on a $V_n(1) < 0$.

Par suite, le polynôme $V_n(z)$ possède une racine unique dans $|z| < 1$, notée τ_n, $0 < \tau_n < 1$, vérifiant $\tau_n < 1/\theta$, car l'on a $D_n(1/\theta) - (1/\theta)E_n(1/\theta) < 0$.

Si l'on suppose alors : $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \tau_{n+1}$, on va montrer l'inégalité $\tau_{n+1} < \tau_{n+2}$.

En effet, la formule (4.b) nous entraîne

$$V_{n+2}(\tau_{n+1}) = -\frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n} \, \tau_{n+1} \, V_n(\tau_{n+1}) \ .$$

De plus, les inégalités, $\tau_n < \tau_{n+1}$, $V_n(0) > 0$ et $V_n(1) < 0$ entraînent

$$V_n(\tau_{n+1}) < 0 \ , \ \text{d'où} \ V_{n+2}(\tau_{n+1}) > 0 \ ,$$

et par suite $\tau_{n+1} < \tau_{n+2}$.

La suite des $1/\tau_n$ est donc une suite décroissante, minorée par θ ; elle converge alors vers une limite τ. Il suffit de voir que $\tau = \theta$. Pour cela, on considère la suite $(1/z^n)[(D_n(z)/E_n(z)) - f(z)]$ de fonctions holomorphes dans $|z| \leq 1$, bornées par 2 sur $|z| = 1$. On voit donc que la suite de fractions rationnelles $D_n(z)/E_n(z)$ converge vers $f(z)$ uniformément sur tout compact de $|z| < 1$. En prenant un compact contenant les τ_n, $1/\tau$ et $1/\theta$ et en passant à la limite, on en déduit que $D_n(\tau_n)/E_n(\tau_n)$ tend vers $f(1/\tau)$, lorsque n tend vers l'infini, d'où $f(1/\tau) = 1/\tau$. Comme l'équation $z = f(z)$ possède une racine unique dans $|z| < 1$, on a $\tau = \theta$.

De ce théorème, on déduit plusieurs corollaires.

COROLLAIRE 2. – <u>Les éléments de</u> $\Sigma_{q,h}$ <u>pour</u> q <u>fixé et</u> h <u>quelconque</u>, $0 < h < 1$, <u>sont tous bornés par</u> $q + \sqrt{q^2 - 1}$.

COROLLAIRE 3. – <u>Les plus grands éléments de</u> $\Sigma_{q,h}$ <u>sont des nombres de Pisot</u>.

COROLLAIRE 4. – <u>Les deux plus grands éléments de</u> $\mathcal{T}_q$ <u>sont par ordre décroissant, la racine supérieure à</u> 1 <u>de l'équation</u> $z = (1 - qz)/(q - z)$, <u>puis le nombre de</u>

Salem τ, racine de l'équation

$$z = \frac{1 + (2 - q) z - 2(q - 1) z^2 - qz^3}{q + 2(q - 1) z - (2 - q)z^2 - z^3} .$$

Pour terminer, nous allons indiquer brièvement deux directions où l'on peut généraliser les nombres de $\Sigma_{q,h}$ et de $\mathcal{T}_q$.

Tout d'abord, on peut considérer l'ensemble $\Sigma^i(2)$ des nombres algébriques imaginaires θ, $|\theta| > 1$, dont tous les conjugués autres que l'imaginaire conjugué, sont de module strictement inférieur à 1.

On peut alors démontrer à partir d'un résultat de CONNES [3], que si θ appartient à $\Sigma^i(2)$, alors $1/\theta$ et $1/\bar{\theta}$ sont les seules racines de module strictement inférieur à 1, d'une équation de la forme $z^2 = A(z)/Q(z)$.

On peut donc classer les éléments de $\Sigma^i(2)$ en familles $\Sigma^i_{q,h}(2)$. On obtient alors un résultat analogue à celui de Kelly concernant les entiers algébriques [5]: tout nombre imaginaire, limite de nombres de $\Sigma^i_{q,h}(2)$, appartient à $\Sigma^i_{q,h}(2)$.

Enfin, on a une généralisation p-adique des nombres de $\mathcal{T}_q$:

- dans $\underset{\sim}{Q}_p$, on obtient des ensembles fermés de nombres algébriques,

- dans V_I, anneau des I-adèles rationnels, on obtient des sous-ensembles fermés contenus dans l'ensemble S_I introduit par A. DECOMPS [4], et contenus dans les ensembles $S_I^{(p')}$ introduits par F. BERTRANDIAS [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTIN (Marie-José). - Caractérisation de l'ensemble dérivé de l'ensemble S_q, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 279, 1974, p. 251-254.

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, 98 p.

[3] CONNES (A.). - Ordres faibles et localisation de zéros de polynômes, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 18, 11 p.

[4] DECOMPS (Annette). - Généralisation des nombres de Salem aux adèles, Acta Arithm., Warszawa, t. 16, 1970, p. 265-314.

[5] KELLY (J.). - A closed set of algebraic integers, Amer. J. of Math., t. 72, 1950, p. 565-572.

[6] PISOT (C.). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.

[7] PISOT (C.). - Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques. - Montréal, Université de Montréal, Dép. de Math., 1963 (Séminaire de Math. sup., été 1963, 5).

(Texte reçu le 25 octobre 1976)

Marie-José BERTIN
16 avenue du Général Malleret-Joinville
94140 ALFORTVILLE