Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

PETER DRAXL

Corps gauches dont le groupe des commutateurs n'est pas égal au noyau de la norme réduite

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1975-1976), exp. nº 26, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 26, 5 p.

10 mai 1976

CORPS GAUCHES DONT LE GROUPE DES COMMUTATEURS N'EST PAS ÉGAL AU NOYAU DE LA NORME RÉDUITE

par Peter DRAXL

Introduction

Soit $\mathfrak{K}$ un corps commutatif, et $\mathfrak{A}$ une algèbre simple centrale sur $\mathfrak{K}$. D'après le théorème de Wedderburn, $\mathfrak{A}$ s'écrit sous la forme $\mathfrak{A} \simeq M_r(\mathfrak{D})$ avec un corps gauche $\mathfrak{D}$ de centre $\mathfrak{K}$; le nombre $i(\mathfrak{A}) := \sqrt{[\mathfrak{D} : \mathfrak{K}]}$ est appelé l'indice de $\mathfrak{A}$ (1).

Notons maintenant Nrd la norme réduite de $\mathfrak{A}$ (voir [1], chap. VIII, § 12), alors $\mathrm{Nrd} : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{K}^*$ est un homomorphisme des groupes multiplicatifs ; par conséquent, on peut étudier le sous-groupe

$$SK_1(\mathfrak{A}) := \mathrm{Ker}\ \mathrm{Nrd}/[\mathfrak{A}^* , \mathfrak{A}^*]$$

du groupe $\mathfrak{A}^*$ rendu abélien. A ce propos, on montre facilement (en utilisant les déterminants, au sens de DIEUDONNÉ ; voir [9], I)

$$SK_1(\mathfrak{A}) \simeq SK_1(\mathfrak{D}) \qquad (\mathfrak{A} \simeq M_r(\mathfrak{D})) .$$

Donc, pour étudier le groupe $SK_1(\mathfrak{A})$, on peut se restreindre au cas particulier d'un corps gauche de dimension finie sur son centre $\mathfrak{K}$.

1. Le problème d'Artin et Tannaka

En 1942/43, E. ARTIN et T. TANNAKA ont conjecturé :

(1) $$SK_1(\mathfrak{A}) = 1 .$$

En réalité, la conjecture (1) est complètement fausse (c'est V. P. PLATONOV qui a observé cela pour la première fois ; voir [5], [7] et la bibliographie) ; en effet, je vais démontrer le théorème suivant (PLATONOV a énoncé le même résultat dans quelques lettres ; dans [7], on trouve quelques résultats particuliers) :

THÉORÈME A. - Soit A un groupe abélien fini donné, alors il existe un corps gauche $\mathfrak{D}$ tel que l'on ait

$$SK_1(\mathfrak{D}) \simeq A .$$

De plus on sait (voir [8]) le résultat suivant :

THÉORÈME B. - Soit $m > 1$ un entier donné, alors il existe un corps gauche $\mathfrak{D}$ tel que l'on ait

(1) La notation := utilisée ici signifie "égale par définition".

$$\# \, SK_1(\mathfrak{D}) = \infty \quad \underline{\text{et}} \quad i(\mathfrak{D}) = m^2 \ .$$

Le théorème B ne sera pas démontré dans le cadre de cette conférence.

2. Réduction du problème

Pour la démonstration du théorème A, je vais utiliser un résultat qui est un cas particulier du "Hauptsatz" de [5], à savoir :

Soit K un corps commutatif, et soit $\mathfrak{K} := (K((X)))((Y))$ le corps des séries formelles à coefficients dans le corps des séries formelles à coefficients dans K. De plus, soient L_i/K $(i = 1 , 2)$ deux extensions cycliques avec groupes de Galois engendrés par σ_i, alors les extensions $\mathfrak{L}_i := (L_i((X)))((Y))$ sont du même type. Désignons par $L := L_1 L_2$ le composé de L_1 et L_2, et par Γ le groupe de Galois de l'extension L/K, alors on sait (dans le cas $r = 1$ voir [7], théorème 4.11 avec notation différente) :

<u>Soit</u> $\mathfrak{A}$ <u>l'algèbre définie par</u>

$$\mathfrak{A} := (X \ , \ (\mathfrak{L}_1/\mathfrak{K}) \ , \ \sigma_1) \otimes (Y \ , \ (\mathfrak{L}_2/\mathfrak{K}) \ , \ \sigma_2) \quad (^2)$$

<u>alors on a</u>

$$\mathfrak{A} \cong M_r(\mathfrak{D}) \quad \underline{\text{avec}} \quad r = |L_1 \cap L_2 : K|$$

(2) et

$$SK_1(\mathfrak{A}) \cong SK_1(\mathfrak{D}) \cong \hat{H}^{-1}(\Gamma \ , \ L^*) \quad (^3) \ .$$

En vertu de (2), pour démontrer le théorème A, il suffit de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME A bis. - <u>Soit</u> A <u>un groupe abélien fini donné</u>, <u>et soit</u> K <u>un corps de nombres</u>, <u>alors il existe deux extensions cycliques</u> L_i/K <u>telles que l'on ait</u>

$$\hat{H}^{-1}(\Gamma \ , \ L^*) \cong A \quad (L := L_1 L_2 \ , \ \Gamma := \mathrm{Gal}(L/K)) \ .$$

3. La démonstration du théorème A bis

On pose $a := \exp(A)$ (= exposant de A), c'est à dire que A s'écrit sous la forme

$$A \cong \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/a_g\mathbb{Z} \quad \text{avec} \quad a_g | \ldots | a_2 | a_1 = a \ .$$

Supposons d'abord une telle extension abélienne L/K donnée. A partir de la suite exacte

$$1 \to L^* \to \mathfrak{J}_L \to \mathfrak{C}_L \to 1$$

$$(\ \mathfrak{J}_L := \text{idèles de } L \ , \ \mathfrak{C}_L := \text{classes d'idèles de } L \ )$$

---

(2) Les facteurs dans le produit tensoriel sont des <u>algèbres cycliques</u> dans la notation de [4], V, § 5.

(3) $H^q(\cdot,\cdot)$ $(q \in \mathbb{Z})$ sont des groupes de cohomologie modifiés au sens de TATE.

on obtient une suite exacte cohomologique (voir [2], chap. VII, 11.4)

(3) $$\ldots \to \hat{H}^q(\Gamma, L^*) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} \hat{H}^{q-2}(\Gamma_{\mathfrak{p}}, \underset{\sim}{Z}) \to \hat{H}^{q-2}(\Gamma, \underset{\sim}{Z}) \to \ldots$$
$$\sum_{\mathfrak{p}} x_{\mathfrak{p}} \to \sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{cores}(x_{\mathfrak{p}}) ,$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble de toutes les places (archimédiennes et ultramétriques) de K, $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ étant le groupe de décomposition par rapport à la place $\mathfrak{p}$. Donc, si

(4) $$\Gamma_{\mathfrak{p}_0} = \Gamma \quad \underline{\text{pour au moins une place}} \quad \mathfrak{p}_0 \quad \underline{\text{de}} \quad K ,$$

la suite (3) devient une suite exacte courte scindée. Puisque $\hat{H}^{-3}(\Gamma_{\mathfrak{p}}, \underset{\sim}{Z}) = 1$ dans le cas d'un groupe de décomposition cyclique, on obtient le résultat suivant :

L'hypothèse (4) implique

(5) $$\hat{H}^{-1}(\Gamma, L^*) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_0} \hat{H}^{-3}(\Gamma_{\mathfrak{p}}, \underset{\sim}{Z}) , \text{ avec } \mathfrak{p} \ \underline{\text{ramifiée}}.$$

D'autre part, en général, si G est un groupe fini, le groupe $\hat{H}^{-3}(G, \underset{\sim}{Z})$ s'identifie au multiplicateur de Schur, et on sait (voir [10]) :

(6) $$\hat{H}^{-3}(G \times H, \underset{\sim}{Z}) \cong \hat{H}^{-3}(G, \underset{\sim}{Z}) \oplus \hat{H}^{-3}(H, \underset{\sim}{Z}) \oplus (G^{ab} \otimes_{\underset{\sim}{Z}} H^{ab}) .$$

Maintenant on procède comme indiqué ci-dessous :

1° On se restreint au cas $a = p^r$ (p = nombre premier) en utilisant convenablement le résultat (6) et la théorie des groupes de Sylow.

2° On prend un ensemble T_0 de $g+1$ places $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_g$ qui ne divisent pas $2a\infty$, tel que $K_{\mathfrak{p}}$ contienne les racines a-ièmes de l'unité.

3° On pose $q := p^s$ et $K' := K(\zeta_q)$ (ζ_q := racine primitive q-ième de l'unité) avec $s \geq r$ (voir 1°) tel que K ne contienne pas les racines (q/p)-ièmes de l'unité ; donc $a | q$ et $K' \neq K$.

4° On constuit (en utilisant le théorème de Grunwald et Wang, voir [6], (6.9)) une extension L_1/K cyclique d'ordre a, telle que l'on ait $L_1 \cap K' = K$ (voir 3°), et telle que les extensions locales $L_1^{\mathfrak{p}_i}/K_{\mathfrak{p}_i}$ soient totalement ramifiées d'ordre a_i avec $a_0 := a_1 = a$ $(i = 0, 1, \ldots, g)$ (voir 2°).

5° On pose

$T := T_0 \cup \{$places $\mathfrak{p} \notin T_0$, ramifiées dans $L_1/K\} \cup \{$places $\mathfrak{p}$, divisant $2a\infty\}$

et

$S := T \cup \{$places $\mathfrak{p} \notin T$, complètement décomposées dans $K'L_1/K\}$;

dont T est une partie finie de L-ensemble infini S.

6° Finalement on construit une extension L_2/K cyclique d'ordre q (voir 3°) telle que

$L_2^{\mathfrak{p}_i}/K_{\mathfrak{p}_i}$ soient non ramifiées d'ordre q $(i = 0, 1, \ldots, g)$

$L_2^{\mathfrak{p}} = K_{\mathfrak{p}}$ $(\mathfrak{p} \in T \setminus T_0)$, et

$L_2^{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ soit non ramifiée, si $\mathfrak{p} \notin S$.

A priori, l'existence d'une extension L_2/K suivant 6° n'est pas assurée ; en fait, on va discuter ce problème plus tard. Supposons donc l'existence d'une telle extension, alors on pose $L := L_1 L_2$, et on obtient immédiatement :

$L_1 \cap L_2 = K$,

$\Gamma := \mathrm{Gal}(L/K) \cong (\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$,

$\Gamma_{\mathfrak{p}_i} := \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{p}_i}/K_{\mathfrak{p}_i}) \cong (\mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ $(i = 0 , 1 , \ldots , g)$, et

$\Gamma_{\mathfrak{p}} := \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})$ cyclique , si $\mathfrak{p} \notin T_0$.

Compte tenu de $a_i | q$, on trouve donc (voir (5) et (6)) :

$$\hat{H}^{-1}(\Gamma , L^*) \cong \bigoplus_{i=1}^{g} \hat{H}^{-3}((\mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) , \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i=1}^{g} (\mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}) \cong A .$$

Il reste à démontrer la possibilité de la construction indiquée dans 6° : d'après le Satz (8.5) dans [6], une condition suffisante, pour que 6° soit possible, est

(7) $$K'' = K' ,$$

K''/K' étant "l'extension d'obstruction attachée à (q , T , S) " (voir 5°) au sens de NEUKIRCH.

Quelle est cette extension d'obstruction ? Supposons, pour simplifier, que

(8) $K \cap \mathbb{Q}(\zeta_q)$ soit un corps complexe dans le "cas exceptionnel" si 4 divise q ,

alors on sait (voir [6], Satz (7.3)) que :

K''/K' est l'extension abélienne maximale d'exposant divisant q , telle que

(i) K''/K' soit galoisienne,

(ii) K''/K' soit non ramifiée hors de S' ([4]),

(iii) $\mathfrak{p}'$ soit complètement décomposée dans K''/K' , si $\mathfrak{p}' \in S' \setminus T'$ ([4]), et

(iv) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K'/K)}(\mathrm{Gal}(K''/K') , \mu_q) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K''/K') , \mu_q)$ avec $\mu_q :=$ groupe des racines q-ièmes de l'unité .

On note que $\mathrm{Gal}(K'/K)$ opère sur $\mathrm{Gal}(K''/K')$ par des automorphismes intérieurs.

Puisque, d'après 5°, on a

$$\{\text{places } \mathfrak{p} \text{ de } K \text{, complètement décomposées dans } K'L_1/K\} = S \setminus T$$

(sauf pour un nombre fini de places), et puisque, d'après (iii),

$$S \setminus T \subseteq \{\text{places } \mathfrak{p} \text{ de } K \text{, complètement décomposées dans } K''/K'\} ,$$

([4]) Soit S' l'ensemble des prolongements sur K' des places dans S , et soit T' l'ensemble analogue par rapport à T .

le théorème de Bauer (voir [3]) montre $K'' \subseteq K'L_1$, donc même K''/K' est une extension abélienne.

Par conséquent, $Gal(K'/K)$ opère sur $Gal(K''/K')$ trivialement, donc, d'après (iv) :

$$\mathrm{Im}\ \Phi \subseteq \mu_q \cap K \quad \text{pour tout} \quad \Phi \in \mathrm{Hom}(Gal(K''/K')\ ,\ \mu_q)\ .$$

Comme l'exposant de $Gal(K''/K')$ divise q , on obtient (7) d'après 3°, ce qu'il fallait démontrer.

Je remercie très vivement J. NEUKIRCH [Université de Ratisbonne (Allemagne féderale)] qui a discuté avec moi quelques points difficiles de son mémoire [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.) - Algèbre. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).

[2] CASSELS (J. W. S.) and FROHLICH (A.) [Editors]. - Algebraic number theory. - London, Academic Press, 1967.

[3] DEURING (M.). - Neuer Beweis des Bauerschen Satzes, J. reine und angew. Math., t. 173, 1935, p. 1-4.

[4] DEURING (M.). - Algebren. - Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1968 (Ergebnisse der Mathematik, 41).

[5] DRAXL (P.). - SK_1 von Algebren über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen, J. reine und angew. Math. (à paraître).

[6] NEUKIRCH (J.). - Über das Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie, Inventiones Math., t. 21, 1973, p. 59-116.

[7] PLATONOV (V. P.). - Le problème de Tannaka-Artin et K-théorie réduite [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, t. 40, 1976, p. 227-261.

[8] PLATONOV (V. P.). - Sur l'infinité du groupe réduit de Whitehead [en russe], Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 227, 1976, p. 299-301.

[9] WANG (S.). - On the commutator group of a simple algebra, Amer. J. Math., t. 72, 1950, p. 323-334.

[10] YAMAZAKI (K.). - On projective representations and ring extensions of finite groups, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, t. 10, 1964, p. 147-195.

(Texte reçu le 22 juillet 1976)

Peter DRAXL
Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Postfach 8640
D-4800 BIELEFELD
(Allemagne fédérale)