MAURICE MIGNOTTE

Sur le théorème de Thue-Siegel-Gel'fond-Dyson

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1975-1976), exp. nº G19, p. G1-G7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A21_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° G19, 7 p.

10 mai 1976

SUR LE THÉORÈME DE THUE-SIEGEL-GEL'FOND-DYSON

par Maurice MIGNOTTE

RÉSUMÉ. - On cherche à déterminer pour tout entier d un nombre $\rho_0 = \rho_0(d)$, aussi petit que possible, tel que, pour tout α algébrique de degré d , on puisse calculer toutes les solutions de l'inégalité $|\alpha - (p/q)| < q^{-\rho}$ sauf peut-être l'une d'entre elles lorsque ρ vérifie $\rho > \rho_0(d)$. Les valeurs de $\rho_0(d)$ obtenues améliorent celles de DAVENPORT et de SCHINZEL.

1. Introduction

1° Soit α un nombre algébrique de degré $d \geq 3$. LIOUVILLE a démontré qu'il existe une constante calculable $C = C(\alpha)$ telle que l'on ait $|\alpha - (p/q)| > Cq^{-d}$ pour tout rationnel p/q $(q > C)$.

Considérons l'inéquation

(1) $$|\alpha - p/q| < q^{-\rho} ,$$

où p et q sont des entiers premiers entre eux $(q > 0)$. Après les résultats de THUE, SIEGEL, DYSON, GEL'FOND, en 1955 ROTH réussit à démontrer que, pour $\rho > 2$ fixé, l'inéquation (1) n'a qu'un nombre fini de solutions. La méthode utilisée dans ces différents travaux ne conduit pas à des résultats effectifs mais permet de borner le nombre de solutions de (1) pour certaines valeurs de $\rho < d$. Nous allons étudier le problème suivant :

d étant donné supérieur à deux, déterminer $\rho_0 = \rho_0(d) < d$ tel que, pour tout α algébrique, de degré d , on sache calculer toutes les solutions de (1) sauf peut-être l'une d'entre elles lorsque ρ vérifie $\rho > \rho_0(d)$.

L'existence de $\rho_0(d)$ a été démontrée par DAVENPORT [2] et, indépendamment, par SCHINZEL (pour $d \geq 5$)) [8]. Il s'agit bien entendu de déterminer une valeur de $\rho_0(d)$ aussi petite que possible. Les valeurs obtenues figurent dans la table ci-dessous.

d	SCHINZEL	DAVENPORT	notre méthode
3		2,732	
4		3,828	3,415
5	4,743	4,236	3,646
6	5,196	4,832	4,236
7	5,612	5,238	4,622
8	6	5,899	5
9	6,364	6,357	5,677
10	6,708	6,916	6,154
11	7,305	7,326	6,563
12	7,348	7,928	6,929

2° Depuis les travaux de BAKER, on connaît des améliorations effectives du théorème de Liouville. Le meilleur résultat général est dû à BAKER [1] et FEL'DMAN [3] qui ont démontré l'existence de constantes positives effectives $C_1 = C_1(\alpha)$ et $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ telles que l'on ait

$$|\alpha - p/q| > C_1\, q^{-d+\varepsilon}$$

pour tout rationnel p/q , $q > 0$.

3° L'étude de l'inéquation (1) est très liée à la résolution de certaines équations diophantiennes. Soit en effet une équation du type

$$f(X\,,\,Y) = g(X\,,\,Y)\,, \tag{2}$$

où f est une forme binaire à coefficients entiers, irréductible (sur $\mathbb{Q}$) de degré d $(d \geqslant 3)$, et g un polynôme de degré $d' < d$. On a évidemment la majoration

$$|g(x\,,\,y)| \leqslant C_2(|x| + |y|)^{d'}\ ;$$

pour résoudre (2) on est amené à chercher une minoration de $|f(x\,,\,y)|$ lorsque x et y sont entiers. Soient $\alpha_1\,,\,\ldots\,,\,\alpha_d$ les racines du polynôme $f(x\,,\,1)$; il est facile de déterminer une constante positive C_3 telle que l'on ait

$$|f(x\,,\,y)| \geqslant C_3(|x| + |y|)^{d} \cdot \min_{1\leq i\leq d} |x/y - \alpha_i|\ .$$

S'il existe $\rho < d$ tel que, pour tout nombre algébrique α de degré d , l'équation (1) n'a qu'un nombre fini de solutions, alors (2) n'a qu'un nombre fini de solutions si d' vérifie $d' < d - \rho$.

Du théorème de Roth résulte donc que, pour $d' \leq d - 3$, l'équation (2) n'a qu'un nombre fini de solutions. En fait, SCHINZEL [7] a étendu ce résultat pour $d' < d$.

Le théorème de Baker et Fel'dman entraîne la résolution effective des équations de Thue

$$f(X, Y) = a ,$$

où a est constant.

4° Supposons qu'il existe p tel que, pour tout α algébrique de degré d, on sache déterminer $Q = Q(\alpha)$ tel que (1) possède au plus N solutions irréductibles vérifiant $q > Q(\alpha)$. Les solutions du (1) vérifiant $xy = 0$, peuvent être déterminées effectivement. Soit donc (x', y') une solution de (1), avec $y' \neq 0$. Soit t l'entier défini par la condition $x' = ty$, $y' = ty$ où x et y sont premiers entre eux, y positif. Alors t est solution d'un polynôme non nul de degré d, et prend donc au plus d valeurs. Le nombre N_1 de solutions de (2) qui vérifient $|x| + |y| > M$, est majoré par d fois le nombre de solutions de l'inégalité

$$|f(x, y)| \leq C_2(|x| + |y|)^{d'} \quad \text{avec} \quad (x, y) = 1 , \quad |x| + |y| > M .$$

Pour une solution de cette inégalité, il existe un indice i tel que l'on ait

$$|x/y - \alpha_i| \leq C_4(|x| + |y|)^{d'-d} .$$

En choisissant M assez grand, on trouve donc

$$N_1 \leq d^2 N .$$

On peut ainsi démontrer le résultat suivant (voir [5]).

Pour $d' < d - 2$, on peut déterminer toutes les solutions de (2) sauf au plus

$$2^7(d + 1)^{6,5} \log(d + 1)$$

d'entre elles.

2. Un raffinement du théorème de Gel'fond

1° En [6], chapitre II, figure le résultat suivant, qui améliore le théorème 1, chapitre I de [4].

THÉORÈME 1. - *Pour* $\rho > \sqrt{2\lambda d}$, $\lambda > 1$, *si* (1) *admet une solution irréductible* p_1/q_1, *où* $q_1 > Q(\alpha, \lambda)$ *(effectif), alors toute autre solution* p_2/q_2, *avec* $q_2 > q_1$, *vérifie*

$$\frac{\log q_2}{\log q_1} < \frac{2d(\rho - 1)}{\lambda\rho^2 - 2d} .$$

2° Considérons deux solutions irréductibles p_1/q_1 et p_2/q_2 de (1), $q_2 > q_1 > C$.

On a

$$1 \leq |p_1 q_2 - p_1 q_1| \leq q_2|p_1 - \alpha q_1| + q_1|p_2 - \alpha q_2| < q_2 q_1^{-\rho+1} + q_1 q_2^{-\rho+1} < 2q_1 q_2^{-\rho+1} ,$$

et donc $2q_2 > q_1^{\rho-1}$. Posons $\omega = \log q_2/\log q_1$. Soit $\eta > 0$ fixé, d'après l'inégalité précédente et le théorème 1, on a

$$(3) \qquad \rho - 1 - \eta < \omega < 2d(\rho - 1)(\rho^2 - 2d)^{-1} + \eta \qquad \text{si } q_1 > C_5 .$$

D'où, en particulier, la proposition suivante

PROPOSITION 1. - Soit α algébrique de degré d, alors pour $\rho > 2\sqrt{d}$, on peut déterminer toutes les solutions irréductibles de l'inéquation

$$|\alpha - p/q| < q^{-\rho}$$

sauf au plus l'une d'entre elles.

(En d'autres termes, on peut choisir $\rho_0(d) = 2\sqrt{d}$. Grâce au théorème de Gel'fond, SCHINZEL [8] obtenait $\rho_0 = 3\sqrt{d/2}$.)

3. La méthode de Thue

1° Nous aurons besoin des deux résultats ci-dessous, qui sont démontrés en [6] (chapitre II, §5).

LEMME 1. - Soit α algébrique de degré $d > 1$. Les seuls polynômes à coefficients entiers de degré au plus $d + \ell - 2$ vérifiant

$$P_0^{(i)}(\alpha) + \alpha P_1^{(i)}(\alpha) = 0 , \qquad i = 0 , 1 , \dots , \ell - 1 ,$$

où ℓ est un entier ≥ 3, sont les polynômes nuls.

LEMME 2. - Soit $h(X) = f(X)/g(X)$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{Z}$, irréductible, non nulle, de degré d (égal au maximum des degrés de f et g). Soit a un nombre rationnel tel que $f(a)\,g(a)$ soit non nul, alors il existe deux constantes positives effectives C_6 et C_7 telles que l'on ait

$$C_6\|a\|^d \leq \|h(a)\| \leq C_7\|a\|^d$$

(où, pour $x \in \mathbb{Q}$ admettant comme écriture irréductible $x = p/q$, on note

$$\|x\| = \max(|p| , |q|)) ;$$

C_6 et C_7 ne dépendent que de d et du maximum des hauteurs de f et g.

2° Rappelons que dans la méthode de Thue on construit des fonctions polynômes auxiliaires à coefficients entiers,

$$A(X , Y) = P_0(X) + YP_1(X) ,$$

où les P_i ont pour degré maximal r, et qui vérifient

$$\frac{\partial^h}{\partial X^h} A(\alpha , \alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad h = 0 , 1 , \dots , \ell - 1 \quad (\ell \geq 2) .$$

Ici il nous suffira de considérer un nombre fini de valeurs de ℓ. Il en résulte que la hauteur de A sera majorée par une constante ne dépendant que de α. Considérons à nouveau deux solutions irréductibles p_1/q_1 et p_2/q_2 de (1) vérifiant $q_2 > q_1 > C_5$. Pour aboutir à une contradiction, il nous suffit de démontrer que ω ne peut appartenir à l'intervalle (3). Soit j minimal tel que le nombre

$$\gamma = \frac{\partial^j}{\partial X^j} A(p_1/q_1 , p_2/q_2)$$

soit non nul; alors $j \leq 1$. Il est facile d'encadrer γ ; on a

$$q_1^{-r+j} q_2^{-1} \leq |\gamma| < e^{a_{\delta}} \max(q_1^{-\rho(\ell-j)} , q_2^{-\ell}) .$$

Il en résulte que ω n'appartient pas à l'intervalle

$$I_\ell = [\alpha(r , j) - \eta , \beta(r + j) + \eta] ,$$

où

$$\alpha(r , j) = (r - j)/(\rho - 1) , \qquad \beta(r , j) = \rho(\ell - j) - (r - j) ,$$

dès que q_1 vérifie $q_1 > \exp(C_8/\eta)$ (ce qu'on supposera).

La contradiction cherchée sera obtenue si on trouve une famille de tels intervalles I_ℓ qui recouvre l'intervalle (3) ; si ρ_d désigne un nombre tel que, pour $\rho > \rho_d$, cette condition ait lieu, on pourra choisir $\varphi_0(d) = \rho_d$.

3° Il nous faudra utiliser des informations précises sur les fonctions auxiliaires A. Nous ne considèrerons que des polynômes A de degré minimal ; ce qui impose que le p. g. c. d. de P_0 et P_1 est une puissance du polynôme minimal de α, et que r vérifie $r \leq [d\ell/2]$.

Notons aussi que si $A((p_2/q_1) , (p_2/q_2))$ est nul, et si $Q_0 = P_0/D$, $Q_1 = P_1/D$, on a

$$Q_0(p_1/q_1)/Q_1(p_1/q_1) = - q_2/p_2 .$$

On peut borner explicitement les hauteurs de Q_0 et de Q_1. En appliquant le lemme 2, on obtient l'implication

(4) $$(j = 1 \text{ et } q > C_9) \Rightarrow (r - \deg D - \eta < \omega < r - \deg D + \eta) ;$$

nous supposerons désormais $q > C_9$.

4° Pour simplifier, nous ne considèrerons que le cas $d = 4$; pour $d = 3$, nous renvoyons le lecteur à l'article de DAVENPORT [2].

Supposons $\rho > (3 + \sqrt{13})/2$ et q_1 assez grand. Posons

$$\alpha_\ell = 2\ell/(\rho - 1) , \qquad \beta_\ell = \ell(\rho - 2) .$$

Pour $\ell \geq 2$, on a

$$\beta_\ell - \alpha_{\ell+1} > 0 \ , \qquad \alpha_2 < \rho - 1 \ , \qquad \beta_4 > \alpha_6 \ .$$

Considérons particulièrement le cas $\ell = 6$. On a donc $\alpha(6\ ,\ j) \leq \alpha_6 < 6$. Minorons $\beta(6\ ,\ j)$. Si r est au plus égal à 11 , alors on a $\beta(6\ ,\ j) \geq \beta_5$. Sinon, on peut trouver deux solutions $A = P_0 + YP_1$, $A_1 = P_2 + YP_3$ telles que

$$\deg P_0 = \deg P_3 = 12 \quad \text{et} \quad \deg P_1 < 12 \ , \quad \deg P_2 < 12 \ .$$

Le polynôme $P_0 P_3 - P_1 P_2$ n'est pas nul, on peut donc trouver γ non nul avec $j = 0$. Dans les deux cas, on a (pour η assez petit)

$$\beta(6\ ,\ j) > 2d(\rho - 1)(\rho^2 - 2d)^{-1} + \eta$$

et donc, d'après (3),

$$\omega < \alpha_6 + \eta < 6 - \eta \ .$$

Pour $\ell = 4$, on a $6 \leq r \leq 8$ (la majoration est triviale, la minoration résulte du lemme 1), $D = 1$ car $r > 4$ pour $\ell = 3$ (appliquer à nouveau le lemme 1). La majoration $\omega < 6 - \eta$ jointe à (4) montre que j est nul. Donc

$$\omega < \alpha_4 + \eta < 5 - \eta \ .$$

Pour $\ell = 3$, on a $5 \leq r \leq 6$ et $D = 1$ (car $r \geq 4$ pour $\ell = 2$) ; la relation (4) montre encore que j est nul. Donc

$$\omega < \alpha_3 + \eta < 4 - \eta \ .$$

Pour $\ell = 2$, on a $r = 4$, $D = 1$ et $j = 0$. L'intervalle (3) est recouvert, ainsi $\rho_4 = (3 + \sqrt{13})/2$ convient. Nous avons donc démontré la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - Soit α un nombre algébrique de degré 4 . Alors, pour

$$\rho > (3 + \sqrt{13}/2) \ ,$$

on peut déterminer toutes les solutions irréductibles de l'inégalité

$$|\alpha - p/q| < q^{-\rho}$$

sauf au plus l'une d'entre elles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (A.). - A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms, II, Acta Arithm., Warszawa, t. 24, 1973, p. 33-36.

[2] DAVENPORT (H.). - A note on Thue's theorem, Mathematika, London, t. 15, 1968, p. 76-87.

[3] FEL'DMAN (N. I.). - An effective refinement of the exponent in Liouville's theorem, Math. USSR-Izvestija, t. 5, 1971, p. 985-1000 ; et [en russe] Izvest. Akad. Nauk SSSR, Serija mat., t. 35, 1971, p. 973-990.

[4] GEL'FOND (A. O.). - Transcendental and algebraic numbers. - New York, Dover Publications, 1960 ; et [en russe] Moskva, Edition d'Etat de Littérature technique, 1952.

[5] MIGNOTTE (M.). - Quelques remarques sur l'approximation rationnelle des nombres algébriques, J. für reine und angew. Math., t. 262-263, p. 341-347.

[6] MIGNOTTE (M.). - Approximation rationnelle des nombres algébriques, Cours professé à Orsay, 1975 (à paraître).

[7] SCHINZEL (A.). - An improvement of Runge's theorem on diophantine equations, Comment. Pontificia Acad. Sc., 2, 1969, n° 20, p. 1-9.

[8] SCHINZEL (A.). - Review of a paper by Hyyrö, Zentralbl. für Math., t. 137, 1967, p. 257-258.

(Texte reçu le 21 septembre 1976)

Maurice MIGNOTTE
Centre de Calcul
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX