Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

JEAN-MARC DESHOUILLERS

Sur la constante de Šnirel'man

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1975-1976), exp. nº G16, p. G1-G6
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A19_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'études de Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° G16, 6 p.

8 mars 1976

SUR LA CONSTANTE DE ŠNIREL'MAN

par Jean-Marc DESHOUILLERS

Au milieu du 18e siècle, GOLDBACH a affirmé que tout nombre pair [supérieur à 2] est somme de deux nombres premiers ; le premier résultat significatif est celui de V. BRUN qui démontre (vers 1920) que tout entier pair assez grand est somme de deux entiers admettant chacun au plus 9 facteurs premiers ; cette voie a été suivie par différents auteurs, et le dernier résultat en date est celui de CHEN FING RUN (1966-1973) qui démontre que tout entier pair assez grand est somme d'un nombre premier et d'un nombre ayant au plus deux facteurs premiers (comptés avec multiplicité) ; le second résultat (dans l'ordre chronologique) est dû à L. G. ŠNIREL'MAN qui démontre l'existence d'un entier κ (appelé constante de Šnirel'man) tel que tout entier supérieur à 1 est somme d'au plus K nombres premiers. Les majorations successives de κ ont été (à ma connaissance) :

ŠANIN (1964) : 2.10^{10}
KLIMOV (1969) : 6.10^9
KLIMOV, PILTAI et ŠEPTITSKAJA (1972) : 115
DESHOUILLERS (1973) : 75, puis 67
VAUGHAN (1975) : 27.

En outre, VAUGHAN indique dans son article une autre méthode dont la limite théorique est 23 . En reprenant cette méthode, pour une minoration de $A(x)$ (voir ci-dessous) pour les grandes valeurs de x , nous démontrerons :

THÉORÈME. - $K \leq 26$.

La démonstration s'effectuera en 3 parties :

(I) Soit $A(x)$ le nombre d'entiers pairs inférieurs à x qui sont sommes de deux nombres premiers, on a

$$A(x) > \frac{x}{23,82} \quad \text{pour} \quad x > \exp(244) .$$

(II) On déduira alors du (I) que tout entier supérieur à $\exp(247)$ est somme de 26 nombres premiers.

(III) A l'aide des évalutations numériques de ROSSER et SCHOENFELD relatives aux nombres premiers, on montrera que tout entier, supérieur à 1 et inférieur à $\exp(250)$, est également somme d'au plus 26 nombres premiers.

Je tiens à remercier R. C. VAUGHAN qui m'a aimablement communiqué le manuscrit de son article (à paraître dans le Journal de Crelle (J. für reine und angew.

Math.)).

1re partie : Minoration de $A(x)$ pour x grand.

Dans toute cette partie, x désigne un nombre réel supérieur à $\exp(240)$, et k un nombre entier positif ou nul inférieur à 51. La lettre p (éventuellement indexée) désigne exclusivement un nombre premier impair, et on commettra l'abus d'écriture consistant à écrire $\pi(x)$ (resp. $\pi(x\,;\,k\,,\,\ell)$) pour le nombre de nombres premiers impairs inférieurs ou égaux à x (resp. et congrus à ℓ mod k) ; notons $R_k(n)$ le cardinal de l'ensemble des couples de nombres premiers $(p_1\,,\,p_2)$ appartenant à l'intervalle $\left](kx/2)\,,\,(kx/2)+x\right]$ et dont la somme vaut n ; enfin, désignons par $R(k\,,\,x)$ un majorant du nombre de nombres premiers p situés dans un intervalle de longueur x et tels que $|h-p|$ est premier, où h est un entier pair supérieur à x.

On a la majoration

$$(1)\quad \sum_n R_k(n) \leqslant \sum_{\substack{kx<n\leq(k+1)x\\ R_k(n)>0}} R(n\,,\,(n-kx)) + \sum_{\substack{(k+1)x<n\leq(k+2)x\\ R_k(n)>0}} R(n\,,\,(k+2)x-n)\,.$$

D'après le lemme 8 de VAUGHAN et la remarque qui le suit, on a

$$(2)\qquad R(h\,,\,x) < 10{,}57\ x.\log^{-2}x \prod_{p|h}\frac{p-1}{p-2} \quad \text{pour} \quad x \geqslant 10^9\,.$$

De (1), (2) et de la majoration triviale de $R(h\,,\,x)$ si x est petit, on déduit :

$$(3)\ \sum_{k=0}^{K}\sum_n R_k(n)\prod_{p|n}\frac{p-2}{p-1} < \frac{10{,}57\,x A((K+2)x)}{(1-\delta_2)^2\log^2 x} + \frac{2(K+1)10{,}57\,x^{2-2\delta_1}}{(1-\delta_2)^2\log^2 x} + (2K+2)x^{2-2\delta_2}$$

pour tous nombres réels δ_1, δ_2 satisfaisant $0<\delta_1<\delta_2<1/2$; minorons maintenant le membre de gauche de (3) en développant le produit

$$\prod_{p|n}\frac{p-2}{p-1} = \sum_{\substack{d \text{ impair}\\ d|n}}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}\ ;$$

on a :

$$\sum_n R_k(n)\prod_{p|n}\frac{p-2}{p-1} \geqslant \left(\pi(\tfrac{1}{2}kx+x)-\pi(\tfrac{1}{2}kx)\right)^2 - \sum_{\substack{d \text{ impair}\\ \mu(d)=-1}}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{n\\ d|n}} R_k(n)\,.$$

Pour expliquer les simplifications intervenant dans les cas $d=3$ et $d=5$, nous ne traiterons que le cas $k=0$ (pour des raisons évidentes d'écriture).

Pour $d=3$, on a :

$$\sum_{3|n} R_0(n) = 2\pi(x;3,1)\pi(x;3,2)+1 \leqslant \tfrac{1}{2}(\pi(x;3,1)+\pi(x;3,2))^2 + 1 \leqslant \tfrac{1}{2}(\pi(x))^2\,.$$

Pour $d=5$, on a :

$$\sum_{5|n} R_0(n) = 2[\pi(x;5,1)\pi(x;5,4) + \pi(x;5,2)\pi(x;5,3)] + 1$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}[(\pi(x;5,1) + \pi(x;5,4))^2 + (\pi(x) - \pi(x;5,4) - \pi(x;5,1))^2] \leqslant \tfrac{1}{2}(\pi(x))^2$$

on a donc :

$$\sum_n R_k(n) \prod_{p|n} \frac{p-2}{p-1} \geqslant 0,625(\pi(\tfrac{1}{2}kx + x) - \pi(\tfrac{1}{2}kx))^2 - \sum_{\substack{d \text{ impair} \geqslant 7 \\ \mu(d) = -1}} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{n \\ d|n}} R_k(n) .$$

En utilisant les majorations $((x/d) + 1)$ (trivial) et $2x/(\varphi(d) \log(x/d))$ (due à MONTGOMERY et VAUGHAN), ainsi que les estimations fournies par ROSSER et SCHOENFELD pour la fonction ψ, un calcul sans grand intérêt conduit à la minoration.

LEMME 1. - Soit $\sigma(k , x)$ un minorant de

$$(\pi(\tfrac{1}{2}kx + x) - \pi(\tfrac{1}{2}kx))x^{-1}.\log x ;$$

pour $x \geqslant \exp(240)$ et $k \leqslant 100$, on a :

(4) $$\sum_n R_k(n) \prod_{p|n} \frac{p-2}{p-1} \geqslant (x^2/\log^2 x)\sigma(k , x) \{0,625\sigma(k , x) - 0,13005\} .$$

Reprenons alors (3) et (4) avec $\delta_1 = 0,03$, $\delta_2 = 0,2$ et $K = 50$:

$$\frac{A(52x)}{52x} > \frac{(0,97)^2}{10,57.52} \sum_{k=0}^{50} \sigma(k , x) \{0,625\sigma(k , x) - 0,13005\}$$
$$- \frac{102.(0,97)^2}{(0,8)^2.52.x^{0,06}} - \frac{102.(0,97)^2.\log^2 x}{10,57.52.x^{0,42}} ,$$

soit, pour $x \geqslant \exp(240)$:

$$\frac{A(52x)}{52x} > 0,0017118 \sum_{k=0}^{50} \sigma(k , x) \{0,625\sigma(k , x) - 0,13005\} - 2.10^{-6}$$

à l'aide des estimations de ROSSER et SCHOENFELD, on trouve :

$$\sigma(k , x) \geqslant \frac{1}{1 + (\log(1 + k/2))/240} - \frac{k+1}{9120}$$

(pour k fixé, $\sigma(k , x)$ tend vers 1 quand x tend vers l'infini : c'est le théorème des nombres premiers) ; on en déduit que le Σ vaut $24,526851...$ et on a bien la minoration (I).

2e partie : Représentation de grands nombres en somme de premiers

PROPOSITION 1. - Soit s un nombre entier pair, inférieur ou égal à 24 ; si $A(x) \geqslant \frac{x}{s}$ pour $x \geqslant N_0$, tout entier supérieur à $sN_0/2 + 62$ est somme d'au plus $s + 2$ nombres premiers.

Il est clair que cette proposition implique l'étape (II). Nous la déduirons de la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - Soit $\mathcal{B}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs ou nuls, contenant 0 ; on note $B(X)$ le cardinal de l'ensemble des éléments positifs de $\mathcal{B}$ ne dépassant pas X . Si k et n_0 sont deux entiers tels que $n \geqslant n_0$ implique $k.B(n) \geqslant n$, tout entier m supérieur à $k(n_0 + 1)$ peut s'écrire comme somme de k éléments de $\mathcal{B}$ et d'un entier appartenant à $[0 , k - 1]$,

Soit en effet n_1 le plus grand entier n tel que $k.B(n) < n$, s'il existe, et 0 sinon ; on pose

$$\mathcal{B}' = \{b - n_1 \ ; \ b \in \mathcal{B} \ , \ b > n_1\} \ ;$$

pour tout entier positif n , on a

$$B'(n) = B(n_1 + n) - B(n_1) \ ,$$

et on en déduit

$$k.B'(n) > n_1 + n - n_1 = n \ .$$

D'après le théorème 3' de [2], p. 20, pour tout entier positif n , il existe un entier h inférieur ou égal à k tel que n puisse s'écrire comme la somme de h éléments de $\mathcal{B}'$: $n = b'_1 + \dots + b'_h$.

<u>1er cas</u> : $n_1 = 0$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, et on écrit

$$n = b'_1 + \dots + b'_h + (k - h).0 \ , \text{ où les } b'_i \in \mathcal{B} \ .$$

<u>2ème cas</u> : $n_1 > 0$, alors $n_1 + 1$ appartient à $\mathcal{B}$ (sinon n_1 ne serait pas maximal), alors $n + hn_1 + (k - h)(n_1 + 1)$ est somme de k éléments de $\mathcal{B}$; donc, pour tout entier positif n , un au moins des nombres $n + kn_1$, $n + kn_1 + 1$, ... $n + kn_1 + (k - 1)$ est somme de k éléments de $\mathcal{B}$, d'où la proposition 2.

Pour obtenir la proposition 1, on commence par appliquer la proposition 2 à la suite B constituée par les éléments $1/2(p_i + p_j)$, à laquelle on adjoint 0 ; on peut prendre par hypothèse : $k = s/2$ et

$$n_0 = \begin{cases} N_0/2 & \text{si } N_0 \text{ est pair} \\ N_0/2 + 1/2 & \text{si } N_0 \text{ est impair}, \end{cases}$$

il s'ensuit que tout entier supérieur à $sN_0/4 + 5s/4$ est somme de $s/2$ éléments de $\mathcal{B}$ et d'un entier appartenant à $[0 , (s/2) - 1]$, et, en multipliant par deux, tout entier supérieur à $sN_0/2 + 5s/2 + 2$ est somme d'au plus s nombres premiers et d'un entier appartenant à $[2 , s + 1]$; puisque s est inférieur ou égal à 24 , il suffit de vérifier que tout entier dans $[2 , 25]$ est somme de deux nombres premiers.

3e partie : <u>Représentation de petits nombres en somme de deux nombres premiers</u>

PROPOSITION 3. - <u>Soit m un entier supérieur ou égal à 2 : tout entier, inférieur à $\exp(17{,}70 + m10{,}21)$ et supérieur à 1 , est somme d'au plus $m + 3$ nombres premiers.</u>

La trosième étape resulte de cette proposition, avec $m = 23$.

On commence par la vérification directe de ce que tout entier positif pair, inferieur à 653, est somme de deux nombres premiers, puisque la différence entre nombres premiers consécutifs inférieurs à $2,686.10^{12}$ est au plus 652 (cf. [1]), tout entier inférieur à $2,686.10^{12}$ (et supérieur à 1) est somme d'au plus quatre nombres premiers.

Pour dépasser cette valeur, on utilise le principe suivant :

Supposons que l'on ait trois entiers X, Y et k tels que :

(a) Tout entier, supérieur à 1 et inférieur ou égal à X, est somme d'au plus k nombres premiers,

(b) Pour tout entier n dans l'intervalle $[X , Y]$, il existe un nombre premier entre $n - X$ et n ; alors tout entier inférieur à Y est somme d'au plus $k + 1$ nombres premiers.

Les estimations effectives de ROSSER et SCHOENFELD [2] nous permettent de remplacer l'étape (b) par la suivante :

(b') Pour tout entier n entre X et Y, il existe un nombre premier entre n et $n + X$ si

$$Y < X \frac{1 - \varepsilon(\log X) - 1,5/\sqrt{X}}{2\varepsilon(\log X) + 3/\sqrt{X}} ,$$

où la fonction ε est tabulée dans [3], page 267.

On peut alors démontrer la proposition 3 :

(a_1) Tout entier, supérieur à 1 et inférieur à $\exp(28,61)$, est somme d'au plus quatre nombres premiers.

(b_1) $\varepsilon(28) = 3,596.10^{-5}$, et il existe donc un nombre premier entre n et $n + \exp(28,61)$ si $n \in [\exp(28,61) , \exp(38,12)]$, d'où l'on déduit :

(a_2) Tout entier dans $[2 , \exp(38,12)]$ est somme d'au plus cinq nombres premiers.

(b_2) $\varepsilon(35) = 1,8315.10^{-5}$, et il existe donc un nombre premier entre n et $n + \exp(38,12)$ si $n \in [\exp(38,12) , \exp(48,33)]$, et on a donc :

(a_3) Tout entier dans $[2 , \exp(48,33)]$ est somme d'au plus six nombres premiers ...

... Puisque la fonction $\frac{1 - \varepsilon(\log X) - 1,5\sqrt{X}}{2\varepsilon(\log X) + 3\sqrt{X}}$ est croissante avec X, on obtiendra la proposition 3 (i. e. (a_m)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRENT (R.P.). - The first occurence of large gaps between successive primes, Math. of Comput., t. 27, 1973, p. 959-964.

[2] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences, vol I. - Oxford, Clarendon Press, 1966.

[3] ROSSER (J. B.) and SCHOENFELD (L.). - Sharper bounds for Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$, Math. of Comput., t. 29, 1975, p. 243-270.

(Texte reçu le 19 juillet 1976)

Jean-Marc DESHOUILLERS
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE