Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Georges Grekos

Suites d'entiers de densités données

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, n° 2 (1975-1976), exp. n° G15, p. G1-G8

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A18_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° G15, 8 p.

1 mars 1976

SUITES D'ENTIERS DE DENSITÉS DONNÉES

par Georges GREKOS

1. Les principaux résultats.

Le terme suite désigne une suite strictement croissante d'entiers positifs. En ce qui concerne la densité d'une telle suite, nous allons, dans un premier temps, utiliser comme ROHRBACH et VOLKMANN [1], la notion de densité ci-dessous.

Définition 1. - Soit une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^+$. Étant donnés une suite A, et deux nombres réels $a < b$, posons

$$F_A(a , b) = \sum_{a<j\leq b, j\in A} f(j) .$$

La densité asymptotique généralisée inférieure (resp. supérieure) de la suite A, notée $\underline{d}A$ (resp. $\overline{d}A$) sera la lim inf (resp. lim sup), lorsque n tend vers l'infini, de la quantité

$$F_A(0 , n)/F_{\mathbb{N}^*}(0 , n) .$$

Si $\underline{d}A = \overline{d}A$, on dit que A possède une densité asymptotique généralisée

$$dA = \underline{d}A = \overline{d}A .$$

Notation. - Nous allons écrire $F(a , b)$ pour $F_{\mathbb{N}^*}(a , b)$, $F_A(a)$ pour $F_A(0, a)$, et $F(a)$ pour $F_{\mathbb{N}^*}(0 , a)$.

Exemples. - Si $f(n) = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons la densité asymptotique usuelle. Si $f(n) = n^{-1}$, nous avons la densité logarithmique.

Nous allons supposer que la fonction f satisfait aux deux conditions suivantes :

(C. 1) $$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \infty ,$$

(C. 2) $$\lim_{n\to\infty} (F(n)^{-1} (f(n) + \sum_{j=1}^{n-1} |f(j) - f(j + 1)|) = 0 .$$

Remarquons que, (C. 1) étant vérifiée, chacune des conditions ci-dessous entraîne (C. 2) :

(C. 2. 1) f est décroissante,

(C. 2. 2) f est croissante et $\lim_{n\to\infty} f(n)/F(n) = 0$.

Notation. - $A(i , s)$ désigne une suite A avec $\underline{d}A = i$ et $\overline{d}A = s$, où $0 \leq i \leq s \leq 1$.

THÉORÈME 1. - Soit une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}+$ qui vérifie (C. 1) et (C. 2).

Soient i , s , i' , s' *des nombres réels tels que* $0 \leq i \leq s \leq 1$, $0 \leq i' \leq s' \leq 1$, $i' \leq i$, $s' \leq s$.

(a) *La condition*

(I) $$si' \leq s'i$$

entraîne que, quelle que soit la suite $A(i , s)$, *il existe une suite*

$$B(i' , s') \subset A .$$

(b) *Cette conditon est la meilleure possible au sens que, quels que soient* i , s *avec* $0 \leq i \leq s \leq 1$, *il existe une suite* $A(i , s)$ *telle que, pour toute sous-suite* $B(i' , s')$ *de* A , *la condition* (I) *soit valable.*

THÉORÈME 2. - *Soit une fonction* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *qui vérifie* (C. 1) *et* (C. 2). *Soient* i , s , i' , s' *des nombres réels tels que* $0 \leq i \leq s \leq 1$, $0 \leq i' \leq s' \leq 1$, $i' \leq i$, $s' \leq s$.

(a) *La condition*

(II) $$(1 - i')(1 - s) \leq (1 - i)(1 - s')$$

entraîne que, quelle que soit la suite $B(i' , s')$, il existe une suite

$$A(i , s) \supset B .$$

(b) *Cette condition est la meilleure possible au sens que, quels que soient* i', s' *avec* $0 \leq i' \leq s' \leq 1$, *il existe une suite* $B(i' , s')$ *telle que, pour toute suite* $A(i , s)$ *contenant* B , *la condition* (II) *soit valable.*

2. Résultats auxiliaires et démonstrations.

LEMME 1. - *Soit* $A(i , s)$ *une suite. Alors, quel que soit* $\theta \in [0 , 1]$, *on peut trouver une suite* $B(\theta i , \theta s)$ *contenue dans* A .

Démonstration. - Si $\theta = 0$, en utilisant le fait que $(F(n))^{-1} f(n) \longrightarrow 0$, on construit d'abord une suite $D = \{d_1 < d_2 < \ldots\}$ de densité nulle. Soit

$$B = \{b_1 < b_2 < \ldots\} \text{ une sous-suite de } A$$

telle que, entre b_j et b_{j+1} $(j = 1 , 2, \ldots)$, il y ait au moins un élément de D . La propriété (C. 2) entraîne qu'une telle suite est de densité nulle.

Si $0 < \theta \leq 1$, la suite

$$B = \{n \in \mathbb{N}^* ; [\theta.A(n)] - [\theta.A(n - 1)] = 1\} ,$$

où $A(n) = \operatorname{Card} \{a \in A ; 1 \leq a \leq n\}$, possède les propriétés voulues. On y arrive facilement en utilisant le fait que $B(n) = [\theta.A(n)]$.

LEMME 2. - *Soient* $A(i , s)$ *une suite, et* $C(i_1 , s_1)$ *une sous-suite de* A .

<u>On peut trouver une suite</u> $B(i_1, s)$ <u>telle que</u> $C \subset B \subset A$.

<u>Démonstration</u>. - Soient des entiers

$$0 = M_0 < N_1 < M_1 < N_2 < M_2 < \dots .$$

La suite

$$B = \{C \cap (\cup_{j=1}^{\infty}]M_{j-1}, N_j])\} \cup \{A \cap (\cup_{j=1}^{\infty}]N_j, M_j])\}$$

est telle que

(a) $C \subset B \subset A$,

(b) $i_1 \leqslant \underline{d}B \leqslant i$, $\quad s_1 \leqslant \bar{d}B \leqslant s$.

En choisissant convenablement les $\{M_j, N_j\}$ (plus précisément en prenant chaque M_j ou N_j suffisamment grand par rapport aux précédents) on peut s'arranger pour avoir $\underline{d}B = i_1$ et $\bar{d}B = s$.

LEMME 3. - <u>Soit</u> $A(i, s)$ <u>une suite</u>. <u>Pour chaque</u> $n \in \underset{\sim}{N}^*$, <u>appelons</u> ℓ_n <u>le nombre d'entiers conséécutifs</u> $\geqslant n + 1$ <u>qui</u> $\notin A$; <u>appelons</u>

$$\lambda = \limsup_{n \to \infty} F(n + \ell_n)/F(n) \; ; \qquad \lambda \in [1, +\infty] .$$

(a) <u>Si</u> $\lambda < +\infty$, <u>alors</u> $s \geqslant \lambda i$;

(b) <u>Si</u> $\lambda = +\infty$, <u>alors</u> $i = 0$.

<u>Démonstration</u>.

(a) Supposons que $\lambda > 1$ et $i > 0$, sinon le lemme est trivialement vrai. Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < i$. Il existe $N\varepsilon$ tel que $n \geqslant N\varepsilon$ entraîne

$$i - \varepsilon < (F(n))^{-1} F_A(n) < s + \varepsilon .$$

Soit une suite $\{n_j\} \subset \underset{\sim}{N}^*$ avec $N_\varepsilon \leqslant n_1 < n_2 < \dots$ et telle que

$$\lim_{n \to \infty} F(n_j + \ell_{n_j})/F(n_j) = \lambda .$$

Quel que soit $j \in \underset{\sim}{N}^*$, on a

$$F_A(n_j)/F(n_j) < s + \varepsilon \quad \text{et} \quad F_A(n_j + \ell_{n_j})/F(n_j + \ell_{n_j}) > i - \varepsilon .$$

En éliminant $F_A(n_j) = F_A(n_j + \ell_{n_j})$, on obtient

$$F(n_j + \ell_{n_j})/F(n_j) < s + \varepsilon / i - \varepsilon ,$$

et à la limite $j \to \infty$, $\lambda \leqslant s + \varepsilon/i - \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $s \geqslant \lambda i$.

(b) $i = \liminf_{n\to\infty} \frac{F_A(n)}{F(n)} = \liminf_{n\to\infty} \frac{F_A(n)}{F(n+\ell_n)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{F(n)}{F(n+\ell_n)} = 0$.

LEMME 4. – Étant donnés i , s tels que $0 < i \leqslant s \leqslant 1$, il existe une suite $A(i\ ,\ s)$ avec $s = \lambda i$.

Démonstration. – Nous allons construire la suite A sous la forme de deux suites (pas nécessairement croissantes) d'entiers positifs $\{p_j\ ;\ j = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\}$ et $\{\ell_j\ ;\ j = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\}$ telles que $1 \in A$, ... $p_1 \in A$, $p_1 + 1 \notin A$, ... , $p_1 + \ell_1 \notin A$, $p_1 + \ell_1 + 1 \in A$, ... , $p_1 + \ell_1 + p_2 \in A$, ... , etc.

Posons $P_j = p_1 + \dots + p_j$, $L_j = \ell_1 + \dots + \ell_j$. Pour une suite A considérée sous cette forme, on a

$$\underline{d}A = \liminf_{j\to\infty} \frac{F_A(P_j + L_j)}{F(P_j + L_j)} \quad \text{et} \quad \overline{d}A = \limsup_{j\to\infty} \frac{F_A(P_j + L_{j-1})}{F(P_j + L_{j-1})} .$$

Nous pouvons contruire une suite A telle que

$$\frac{F_A(P_j + L_j)}{F(P_j + L_j)} = i + x_j\ ,\quad j = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots \quad \text{et} \quad \frac{F_A(P_j + L_{j-1})}{F(P_j + L_{j-1})} = s + y_j\ ,\quad j = 1\ ,2,\dots$$

avec $\lim_{j\to\infty} x_j = \lim_{j\to\infty} y_j = 0$, et puisque $F_A(P_j+L_j) = F_A(P_j+L_{j-1})$, on aura $s = \lambda i$. La possibilité de choisir chaque fois p_j et ℓ_j de manière que les relations ci-dessus soient valables, découle des deux remarques suivantes :

(a) Supposons construite la partie $\mathfrak{A} \cap [1\ ,\ k]$ avec $k = P_{j-1} + L_{j-1}$, et appelons $\alpha = F_A(k)$. On aura $\alpha(F(k))^{-1} = i + x_{j-1} < s$. Prenons $k + 1 \in A$, $k + 2 \in A$, ... et considérons la quantité

$$\varphi(n) = (\alpha + F(k\ ,\ n))(F(n))^{-1}\ ,\qquad n = k + 1\ ,\ k + 2\ ,\ \dots$$

Il existe un $n \geqslant k + 1$ tel que l'on ait

$$0 < 1 - \varphi(n) \leqslant \varepsilon\ ,\ \text{si}\quad s = 1\ ,\quad \varepsilon > 0\ ;$$

$$0 < \varphi(n) - s \leqslant f(n)((F(n))^{-1}\ ,\ \text{si}\quad s < 1\ .$$

On prend $p_j = n - k$.

(b) Une remarque analogue permet de choisir ℓ_j .

Démonstration du théorème 1.

(a) Appelons

$$\theta_1 = \begin{cases} \frac{s'}{s}, & \text{si}\quad s \neq 0 \\ 0\ , & \text{si}\quad s = 0 \end{cases}$$

Il existe une suite $B_1(\theta_1 i\ ,\ \theta_1 s) \subset A$. Appelons

$$\theta_2 = \begin{cases} \frac{i'}{\theta_1 i}\ , & \text{si}\quad \theta_1 i \neq 0 \\ 0 & ,\ \text{si}\quad \theta_1 i = 0 \end{cases}$$

Il existe une suite $B_2(\theta_2\theta_1 i , \theta_2\theta_1 s) \subset B_1$. D'après le lemme 2, on peut trouver $B(\theta_2\theta_1 i , \theta_1 s)$ telle que $B_2 \subset B \subset B_1 \subset A$. Dans tous les cas, on a $\theta_2\theta_1 i = i'$ et $\theta_1 s = s'$.

(b) Si $i = 0$, (I) est valable. Supposons $0 < i \leq s \leq 1$. D'après le lemme 4, il existe une suite $A(i , s)$ avec $s = \lambda i$.

Pour toute sous-suite $B(i' , s')$ de A , si $i' = 0$, (I) est vraie, et si $i' > 0$, on a

$$\frac{s'}{i'} \geq \lambda' \geq \lambda = \frac{s}{i} ,$$

d'où on obtient (I).

Démonstration du théorème 2.

(a) Soit $B(i' , s')$ une suite. Considérons $\overline{B} = \underset{\sim}{N}^* - B$, $\overline{B}(1 - s' , 1 - i')$. Les hypothèses du théorème 1(a) sont remplies avec $1 - s'$, $1 - i'$, $1 - s$, $1 - i$ à la place de i , s , i' , s' respectivement. Donc il existe

$$C(1 - s , 1 - i) \subset \overline{B} ,$$

d'où la suite $A = \overline{C}$ est telle que l'on ait $A \supset B$ et $A(i , s)$.

(b) Dans le cas non trivial $0 \leq i' \leq s' < 1$, on a $0 < 1 - s' \leq 1 - i' \leq 1$, et il existe (lemme 4) $C(1 - s' , 1 - i')$ avec $(1 - i') = \lambda(1 - s')$. La suite $B(i' , s') = \overline{C}$ possède la propriété voulue. Car, soit $A(i , s) \supset B$; on a

$$\overline{A}(1 - s , 1 - i) \subset C$$

et, d'après le théorème 1(b), on a la condition (II).

3. Quelques compléments.

COROLLAIRE 1. - *Soit une fonction* $f : \underset{\sim}{N}^* \to \underset{\sim}{R}^+$ *vérifiant* (C. 1) *et* (C. 2). *Soient* i , s , i' , s' *des nombres réels tels que* $0 \leq i \leq s \leq 1$, $0 \leq i' \leq s' \leq 1$, $i' \leq i$, $s' \leq s$. *Au moins l'une des deux propositions suivantes est vraie* :

(P. 1) *Pour toute* $A(i , s)$, *il existe* $B(i' , s') \subset A$;

(P. 2) *Pour toute* $B(i' , s')$, *il existe* $A(i , s) \supset B$.

Démonstration. - Il s'agit d'une conséquence des théorèmes 1 et 2 et du fait que la relation $si' \geq s'i$ entraîne (II).

Voici une autre notion de densité.

Définition 2. - Soit une suite $M = \{m_1 < m_2 < \ldots\} \subset \underset{\sim}{N}^*$. Etant donnée une suite A , les *M-densités asymptotiques, inférieure et supérieure* , de la suite A , désignées par $\underline{d}_M A$ et $\overline{d}_M A$, seront les lim inf et lim sup, lorsque $j \to \infty$, de la quantité $M_j^{-1} A(M_j)$ [Rappel : $A(n) = \mathrm{Card}\{a \in A \; ; \; 1 \leq a \leq n\}$].

Remarque. — Les lemmes 1, 2, 3, 4 et les théorèmes 1, 2 restent valables si on remplace les densités asymptotiques par les M-densités.

Considérons maintenant un type de suites, qui a été étudié par DEZA et ERDÖS [2].

Définition 3. — Soit $\hat{A} = \{A_j \; ; \; j = 1, 2, \ldots\}$ une suite de parties finies de $\mathbb{N}^*$, avec $A_j \neq A_k$ lorsque $j \neq k$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, désignons par $A(n)$ le nombre des $A_j \subset \{1, \ldots, n\}$. Les densités $\underline{\delta}\hat{A}$ et $\overline{\delta}\hat{A}$ seront les lim inf et lim sup, lorsque $n \to \infty$, de $2^{-n} A(n)$.

Remarque. - Les lemmes 1, 2, 3, 4 et les théorèmes 1, 2 restent valables pour le cas décrit dans la définition 3. En effet, si à chaque partie finie $\{a_1, \ldots, a_r\}$ de $\mathbb{N}^*$ on fait correspondre le nombre naturel $2^{a_1} + \ldots + 2^{a_r}$, la suite

$$\hat{A} \subset \hat{P}_0 = \{A \subset \mathbb{N}^* \; ; \; A \text{ fini}\}$$

correspond à une suite $B \subset \mathbb{N}$. De plus, si $M = \{2^n \; ; \; n = 0, 1, 2, \ldots\}$, on aura $\underline{\delta}\hat{A} = \underline{d}_M B$ et $\overline{\delta}\hat{A} = \overline{d}_M B$. Ainsi on se ramène au cas de la définition 2.

4. Une autre notion de densité.

Définition 4. - Soit une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^+$, croissante. Étant donnée une suite A, la f-densité asymptotique inférieure (resp. supérieure) de la suite A, notée $\underline{d}_f A$ (resp. $\overline{d}_f A$), sera la lim inf (resp. lim sup), lorsque $n \to \infty$, de la quantité $(f(n))^{-1} f(A(n))$.

Exemples. - Si $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons la densité asymptotique usuelle. Si $f(n) = \log n$, $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons la densité exponentielle.

Nous allons supposer que la fonction f satisfait aux trois conditions suivantes:

(f. 1) $f : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}^+$, dérivable, où $\mathbb{R}_1 = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x > 1\}$;

(f. 2) f strictement croissante de limite ∞ ;

(f. 3) $\frac{f'}{f}$ décroissante de limite nulle.

Remarque. - Sous les autres conditions imposées sur f, la dernière affirmation que $\lim_{n\to\infty} (f(x))^{-1} f'(x) = 0$ équivaut à dire que, quel que soit $c \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} (f(x))^{-1} f(x + c) = 1 .$$

Notation. - $A(i, s)$ désigne une suite A avec $\underline{d}_f A = i$ et $\overline{d}_f A = s$.

THÉORÈME 3. - Les lemmes 1, 2, 3, 4 et le théorème 1 restent valables, si on remplace les densités asymptotiques généralisées par les f-densités.

Démonstration. - Indiquons seulement les changements essentiels qu'il faut appor-

ter aux démonstrations correspondantes.

[Lemme 1, cas où $0 < \theta \leq 1$]. Appelons n_0 le plus petit nombre naturel tel que $\theta . f(A(n_0 - 1)) \geq f(1)$. La suite qu'on cherche est

$$B = \{m \geq n_0 : [f^{-1}(\theta . f(A(m)))] - [f^{-1}(\theta . f(A(n-1)))] = 1\} .$$

Il faut vérifier que la différence prend les valeurs 0 ou 1 ; pour cela, il suffit de montrer que

$$0 \leq f^{-1}(\theta . f(k+1)) - f^{-1}(\theta . f(k)) \leq 1 ,$$

quel que soit $k \geq A(n_0 - 1)$. La première inégalité étant évidente, pour vérifier la seconde, il suffit d'avoir

$$(f^{-1}(\theta . f(x))) \leq 1 , \text{ pour } x \geq n_0 ,$$

ce qui est une conséquence de la décroissance de f'/f. On en déduit que

$$B(n) = f^{-1}(\theta . f(A(n))) + O(1) .$$

En utilisant la remarque ci-dessus (avant le théorème 3), on arrive à montrer que $\underline{d}_f B = \theta i$ et $\overline{d}_f B = \theta s$.

[Lemme 3]. On définit $\lambda = \limsup_{n\to\infty} (f(n))^{-1} f(n + \ell_n)$.

[Lemme 4]. Il faut remarquer que, si $k \leq m$, la fonction $f(k+x)/f(m+x)$ est croissante, ce qui équivaut à la décroissance de f'/f.

Par contre, le théorème 2 n'est pas toujours valable, comme on le montre dans la situation ci-dessous (qui contient comme cas spécial la densité exponentielle).

THÉORÈME 4. - Soit une fonction $f : \underset{\sim}{R}_1 \to \underset{\sim}{R}^+$, vérifiant (f. 1, 2, 3) et telle que $f(x , y) \leq f(x) + f(y)$, quels que soient $x , y \in \underset{\sim}{R}_1$. Alors, quels que soient la suite $B(i' , s')$ et les nombres réels i , s avec $s' \leq s \leq 1$, $i' \leq i \leq s$, il existe une suite $A(i , s)$ contenant B.

Ce théorème résulte immédiatement du lemme suivant.

LEMME 5 (Hypothèses du théorème 4). - Soient $B(i , s)$ une suite et i_1 tel que $i \leq i_1 \leq 1$. Alors il existe une suite

$$A(i_1 , \max (s , i_1)) \supset B .$$

Démonstration. - Considérons le cas non trivial où $i < i_1 < 1$. On construit une suite $A \supset B$ avec $\underline{d}_f A = i_1$, en ajoutant, dans B, chaque fois le plus petit nombre d'éléments. Plus précisément, on veut avoir $(f(n))^{-1} f(A(n)) \geq i_1$, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}^*$, mais si $n \notin B$, on prend $n \in A$ seulement si

$$(f(n))^{-1} f(A(n-1)) < i_1 .$$

Examinons maintenant $\overline{d}_f A$. On a $\overline{d}_f A \geq \max (s , i_1)$; donc il suffit de majorer

$A(n)$ de façon que l'on puisse en déduire l'inégalité dans le sens inverse. Pour $n \in \underset{\sim}{N}^*$ assez grand, appelons $k = k(n)$ le plus grand nombre naturel $\leq n$ tel que $k \in A$, $k \notin B$. On a $A(n) \leq A(k) + B(n)$. Majorons $A(k)$. On a

$$(f(k))^{-1} f(A(k-1)) < i_1 .$$

Donc

$$A(k) = A(k-1) + 1 \leq f^{-1}(i_1 f(k)) + 1 \leq f^{-1}(i_1 f(n)) + 1 .$$

D'autre part, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a $B(n) \leq f^{-1}((s + \varepsilon) f(n))$ pour $n \geq N_\varepsilon$. Par conséquent, pour n assez grand, on a

$$A(n) \leq f^{-1}(i_1 f(n) + 1 + f^{-1}((s + \varepsilon) f(n)) .$$

Si $i_1 > s$, on choisit $\varepsilon < i_1 - s$ et, pour n assez grand, on a

$$A(n) \leq 3 f^{-1}(i_1 f(n)) ,$$

d'où $f(A(n)) \leq f(3) + i_1 f(n)$, et $\overline{d_f} A \leq i_1$.

Si $i_1 \leq s$, on a $A(n) \leq 3 f^{-1}((s + \varepsilon) f(n))$, n assez grand. Ceci donne

$$\overline{d_f} A \leq s + \varepsilon \text{ , quel que soit } \varepsilon > 0 ;$$

donc $\overline{d_f} A \leq s$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ROHRBACH (H.) und VOLKMANN (B.). - Verallgemeinerte asymptotische Dichten, J. für reine und angew. Math., t. 194, 1955, p. 195-209.

[2] DEZA (M.) et ERDÖS (P.). - Extensions de quelques théorèmes sur les densités de séries d'éléments de N à des séries de sous-ensembles finis de N, Discrete Math., t. 12, 1975, p. 295-308 [Voir aussi : Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° 8, 2 p.].

(Texte reçu le 8 mars 1976)

Georges GREKOS
Portarias 22
VOLOS (Grèce)
et
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE