

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL LANGEVIN

Quelques applications de nouveaux résultats de van der Poorten

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, n° 2 (1975-1976),
exp. n° G12, p. G1-G11

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A16_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES APPLICATIONS DE NOUVEAUX RÉSULTATS DE VAN DER POORTEN

par Michel LANGEVIN

1. Introduction ; les travaux de VAN DER POORTEN.

Au cours de sa conférence [17], A. J. VAN DER POORTEN a donné des minorants (les meilleurs actuellement) entièrement explicites pour les modules des formes linéaires de logarithmes à coefficients rationnels, aussi bien dans le cas complexe que dans le cas p -adique (cf. références [20] et [21] de [17]). Le but de cet exposé est de fournir des applications simples du corollaire suivant de ces résultats :

(C) Soient a_1, a_2, \dots, a_n des rationnels > 0 , satisfaisant à une hypothèse technique (H), de hauteurs majorées par A_1, A_2, \dots, A_n respectivement (avec $e^2 \leq A_i, i = 1, 2, \dots, n$) et b_1, b_2, \dots, b_n des rationnels de hauteurs toutes majorées par B (avec $e^2 \leq B$) tels que

$$L = |b_1 \log a_1 + b_2 \log a_2 + \dots + b_n \log a_n| \neq 0.$$

Alors :

$$(C.1) \quad L \geq \exp(-((2^5(n+1))^{6n+7} \prod_{1 \leq i \leq n} \log A_i (\log(\prod_{1 \leq i \leq n} \log A_i)) \log B)).$$

De plus, si B ne désigne plus qu'un majorant des hauteurs de b_1, b_2, \dots, b_{n-1} et si l'on note B' un majorant de celle de b_n ($\neq 0$) (avec $20 \leq B, B'$) ,

$$(C.2) \quad L \geq \sup_{0 < d < 0,99} \exp(- (2^5(n+1))^{6n+9} \prod_{1 \leq i \leq n} \log A_i (\log(\prod_{1 \leq i \leq n} \log A_i))^2 \log(B' d^{-1}) - d(B/B')).$$

On s'attachera en particulier à montrer l'importance de la "dépendance en n " dans (C). On ne tiendra pas compte dans la suite de (H). Cela est sans grand inconvénient car dans les applications des § 2 et 4, (H) est vérifiée ; comme l'a montré BAKER, (H) est non indispensable et a pour but de simplifier les calculs ; enfin, la complication introduite par l'absence de (H) n'apporte pas de modification des ordres de grandeurs des constantes figurant dans (C) (cf. introduction de la référence [20] de [17]).

2. Plus grand facteur premier d'entiers voisins.

La lettre p est réservée aux nombres premiers. On note, comme d'habitude,

$$P(n) = \sup_{p|n} p, \quad \omega(n) = \sum_{p|n} 1, \quad \pi(n) = \sum_{p \leq n} 1;$$

(p_k) désigne la suite des nombres premiers ; on note $\|x\|$ la distance de x à \mathbb{Z} ; on écrit \log_2 pour $\log \log \dots$

THEOREME 1. Soit k_n une suite d'entiers $\neq 0$, vérifiant

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\log |k_n|) (\log n)^{-1} < 1,$$

alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\sup(P(n), P(n + k_n)) / \log_2 n) \geq 1/6.$$

Démonstration. - On se ramène aisément au cas où k_n est une suite d'entiers > 0 . Par hypothèse, il existe un réel $t < 1$ tel qu'on ait, à partir d'un certain rang, $|k_n| < n^t$. Par suite, on a, d'une part,

$$(1) \quad \log((n + k_n)/n) < k_n/n < n^{t-1},$$

d'autre part, en décomposant le rationnel $(n + k_n)/n$ en facteurs premiers,

$$(2) \quad \exp(- (2^5 (\bar{\omega} + 1))^{6\bar{\omega}+7} (\log \bar{P})^{\bar{\omega}} (\bar{\omega} \log_2 \bar{P}) \log(\sup(e^2, B))) \leq \log(n + k_n)/n$$

avec $\bar{\omega} = \omega((n + k_n)/n)$, $\bar{P} = P((n + k_n)/n)$, $B = \log 2n / \log 2$.

Les inégalités (1) et (2) montrent que \bar{P} tend vers l'infini avec n puisque $p_{\bar{\omega}} \leq \bar{P}$; plus précisément, d'après le théorème 3 de [8], $\bar{\omega} \log \bar{\omega} \leq p_{\bar{\omega}} \leq \bar{P}$. Donc, le terme prépondérant dans le membre de gauche de (2) est $\bar{\omega} \log \bar{\omega}$, d'où le résultat.

Remarque. - Sous des hypothèses plus fortes, on peut trouver, dans le théorème 1, un résultat meilleur que $1/6$: par exemple, si

$$|k_n| \leq (\log n)^t \quad (\text{resp. } |k_n| < (\log n)^{t/2})$$

avec $t < 1$, on obtient $(1-t)/5$ (resp. $(1-t)/4$) (cf. [3]); si

$$|k_n| = 1 \text{ ou } 2,$$

on obtient 2 (cf. D. H. LEHMER [5] ou SCHINZEL [9]).

Soit f un polynôme à coefficients entiers ayant au moins deux zéros distincts. L'inégalité

$$(3) \quad P(f(n)) > C(f) \log_2 n$$

est maintenant établie dans tous les cas (cf. (3.4), (3.5), (3.6) dans [4]). Le théorème 1 est seulement un cas particulier de ce résultat quand la suite (k_n) est constante (on peut même améliorer le $1/6$ en $1/4$, cf. [2]). La constante $C(f)$, effectivement calculable, figurant dans (3) est toujours apparue, quand on a su l'expliciter, comme une fonction décroissante du degré du polynôme f (exposant -9 dans [13], -2 dans [2]). Le corollaire suivant du théorème 1 montre un cas où il n'en est pas ainsi :

COROLLAIRE. - Soit f un polynôme à coefficients entiers ayant au moins deux zéros distincts dont un rationnel, alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(f(n))/\log_2 n \geq 1/6 .$$

Démonstration. - Soient r/s un rationnel tel que $f(r/s) = 0$, d le degré de f , $m = sn - r$. On écrit $s^d f(n)$ sous la forme $m g(m)$, où g est un polynôme, de degré $d - 1$, qu'on peut écrire $am^{d-1} + O(m^{d-2})$. Il est maintenant clair qu'il suffit d'appliquer le théorème 1 pour conclure.

On peut encore voir le théorème 1 sous un angle différent. Soient p et q ($p < q$) deux entiers premiers entre eux, et (n_i) la suite croissante des entiers de la forme $p^u q^v$. TILJDEMAN (cf. [14] et [15]) a montré l'existence de deux constantes effectives C_1 et C_2 vérifiant, pour tout i ,

$$n_i / (\log n_i)^{C_1} \ll n_{i+1} - n_i \ll n_i / (\log n_i)^{C_2} .$$

On va déduire de (C) des valeurs explicites pour C_1 et C_2 .

THÉOREME 2.

$$(2^{126} \log p \log_2 p \log q)^{-1} < C_2 < C_1 < (2^{126} \log p \log_2 p \log q) .$$

Démonstration. - Pour majorer C_1 , il suffit de minorer comme précédemment le logarithme du rationnel n_{i+1}/n_i , écrit sous forme de produit de puissances de facteurs premiers. En supposant, par simplicité, $p, q \geq 8$ ($> e^2$), on obtient le résultat voulu $((2^5 \cdot 3)^{19} < 2^{126})$. Soit $n_i = p^u q^v$, et supposons, par exemple, $p^u > q^v$. Soit (r_n/s_n) la suite des rationnels convergente vers $\log p / \log q$, obtenue par développement en fraction continue. Soit n l'indice vérifiant $s_n \leq u < s_{n+1}$. L'un des rationnels r_{n-1}/s_{n-1} , r_n/s_n , soit $r_{n'}/s_{n'}$, est supérieur à $\log p / \log q$.

Par construction, $p^{u-s_{n'}} q^{v+r_{n'}}$ est entier et $> n_i$, donc $\geq n_{i+1}$. On en déduit :

$$\log(n_{i+1}/n_i) \leq \log q \|s_{n'}(\log p / \log q)\| .$$

Comme $s_{n-1} \|s_n(\log p / \log q)\| + s_n \|s_{n-1}(\log p / \log q)\| = 1$, que n' soit égal à $n - 1$ ou n , on a

$$\|s_{n'}(\log p / \log q)\| < s_n^{-1} .$$

De plus, on déduit de (C) et de l'inégalité $s_{n+1} \|s_n(\log p / \log q)\| < 1$,

$$\exp(-2^{126} \log p \log_2 p \log q \log s_n) s_{n+1} / \log q < 1 ,$$

ce qui prouve que s_n est minoré par s_{n+1}^c , c désignant une fonction de p et q seuls. En reportant, il vient :

$$\begin{aligned} \log(1 + (n_{i+1} - n_i)/n_i) \\ < \log q (2(\log p)(\log q)(\log n_i)^{-1})^{2^{-126}} (\log p)^{-1} (\log_2 p)^{-1} (\log q)^{-1} ; \end{aligned}$$

d'où le résultat.

THÉOREME 3. - Soient A et ϵ deux réels positifs. Il existe un rang $K(A, \epsilon)$ tel que, pour tout couple d'entiers (n, k) satisfaisant à $k > K(A, \epsilon)$, $n \geq \exp \exp(\log k)^A$, l'on ait :

$$\pi(P((n+1)(n+2)\dots(n+k))) > (12 + 2/A + \epsilon)^{-1} k \log_2 n / \log_3 n.$$

Démonstration. - Par l'absurde, existent donc deux réels A, ϵ tels qu'on puisse trouver des couples (n, k) d'entiers aussi grands qu'on le désire vérifiant :

$$(4) \pi(\bar{P}) \leq (12 + 2/A + \epsilon)^{-1} k \log_2 n (\log_3 n)^{-1} \quad \text{avec } \bar{P} = P((n+1)(n+2)\dots(n+k))$$

Soit (n, k) un tel couple. Montrons d'abord qu'on peut choisir parmi

$$n+1, n+2, \dots, n+k$$

deux entiers n', n'' satisfaisant à $1 \leq n'' - n' \leq 2$ et

$$\bar{\omega} = \omega(n', n'') \leq 2k^{-1} \pi(\bar{P}) + 3 \log_2 k.$$

Cela est possible puisque la quantité $2 \sum_{1 \leq i \leq k} \omega(n+i)$, qu'on écrit

$$2 \sum_{1 \leq i \leq k} \omega((n+2i-1)(n+2i)) \quad \text{si } k = 2k'$$

ou

$$2 \sum_{2 \leq i \leq k} \omega((n+2i)(n+2i+1)) + \omega((n+1)(n+2)) + \omega((n+2)(n+3)) \\ + \omega((n+3)(n+1)) \quad (+ \text{éventuellement } 1) \quad \text{si } k = 2k' - 1,$$

est égale à $2 \sum_{1 \leq i \leq k} \sum_{p|(n+i)} 1$, donc majorée par

$$2 \sum_{p \leq k} ([(k-1)/p] + 1) + \pi(\bar{P}) - \pi(k),$$

donc par $2\pi(\bar{P}) + 2k(\log_2 k + 1)$ pour k assez grand.

En appliquant (4) et l'hypothèse $A \log_2 k \leq \log_3 n$, il vient :

$$\bar{\omega} \leq (6 + A^{-1} + \frac{1}{3\epsilon}) \log_2 n (\log_3 n)^{-1} \quad \text{pour } k \text{ (et donc } n) \text{ assez grand.}$$

D'autre part, en appliquant (C) comme dans la démonstration du théorème 1 au rationnel n''/n' , on obtient :

$$(5) \log(\log n - \log 2) < (6\bar{\omega} + 7)(\log(\bar{\omega} + 1) + 5 \log 2) + \bar{\omega} \log_2 \bar{P} + \log \bar{\omega} + \log_3 \bar{P} \\ + \log_2(\log 2 n / \log 2).$$

Comme $6\bar{\omega} \log \bar{\omega}$ est majoré par $(1 + (6A)^{-1} + \epsilon/12)^{-1} \log_2 n$, l'inégalité précédente montre que \bar{P} tend vers l'infini avec k . Mais, d'après (4),

$$\log \bar{P} \leq \log k + \log_2 k + \log_3 n \leq (\log_2 n)^{(1/A) + (\epsilon/4)}$$

pour $n > N$ convenable. Il n'y a plus alors qu'à reporter dans (5) pour obtenir la contradiction cherchée.

Remarque. - Quand n est très grand devant k , on peut prouver un résultat meilleur :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P((n+1)(n+2)\dots(n+k))/\log_2 n \geq k. \quad (\text{cf. [3]}).$$

Le théorème 1 établit, en particulier, qu'étant donnés deux entiers a et c , le plus grand facteur premier de $a^b + c$ tend vers l'infini avec b . Le théorème suivant montre que ce résultat est vrai uniformément en a .

THÉORÈME 4. - Soient $t < 1$ et $\varepsilon > 0$ deux réels. Il existe un rang $B(t, \varepsilon)$ pour lequel l'inégalité $b > B(t, \varepsilon)$ implique :

$$\inf_{a \geq 2, 0 < |c| \leq a^{bt}} P(a^b + c) > ((1 - \varepsilon)/\varepsilon) \log b.$$

Démonstration. - Soit $a^b + c = \prod_{1 \leq i \leq n} p_i^{b_i}$, les p_i étant premiers. Comme dans la preuve du théorème 1, on forme

$$\log(1 + ca^{-b}) = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i \log p_i - b \log a,$$

mais on applique maintenant l'inégalité (C.2) avec

$$d = \log 2, \quad B' = b, \quad B = (b(\log a / \log 2) + 1).$$

Il vient :

$$(1 - t)b \log a \ll (2^5(n+2))^{6n+15} \log a (\prod_i \log p_i) (\log(\prod_i \log p_i))^2 \log b (\log 2)^{-1} + \log a + b^{-1} \log 2.$$

La simplification par $(\log a)$ montre l'uniformité cherchée ; la démonstration se poursuit alors comme celle du théorème 1.

Remarque. - Un résultat voisin qu'on peut prouver de façon analogue a été obtenu par SHOREY et TIJDEMAN [12] :

Soit M un réel $> C$, il existe une constante $\bar{c}(M)$, effectivement calculable, telle que les inégalités (avec $a > 1$, $b > 1$, $c \neq 0$, $d > 0$ entiers) :

$$P(da^b + c) \leq M \quad \text{et} \quad P(d) \leq M \quad \text{impliquent} \quad |c| > (da^b)^{1 - \bar{c}(M)} (\log b)/b.$$

Remarque. - Le résultat du théorème 4 est en particulier valable lorsque c est fixe. Dans ce cas, on peut aussi déduire ce résultat (sous une forme affaiblie) du théorème suivant :

THÉORÈME (SCHINZEL, TIJDEMAN [10]). - Soit f un polynôme à coefficients entiers ayant au moins deux zéros distincts. Il existe une constante $M(f)$, effectivement calculable, telle que, pour tout entier $m \geq M(f)$, l'équation diophantienne

$$y^m = f(x)$$

n'admette aucune solution.

Supposons l'existence d'un réel M_1 tel qu'on puisse trouver une infinité d'entiers b et des entiers $a(b)$ vérifiant $P(a(b)^b + c) < M_1$. Soit $f_u = ux^2 - c$, et désignons par M_2 la borne supérieure des réels $M(f_u)$ lorsque u décrit l'ensemble des entiers sans facteur carré de diviseurs premiers $< M_1$. En considérant un couple $(a(b), b)$ avec $b > M_2$, et en écrivant $a(b)^b + c$ sous la forme ux^2 , u étant sans facteur carré, on obtient la contradiction cherchée.

3. Bornes explicites pour les solutions de l'équation de Catalan.

L'équation $x^m - y^n = 1$ (x, y, m, n entiers ≥ 2) n'a que la solution $3^2 - 2^3 = 1$; cette conjecture de CATALAN (1842) n'est pas encore prouvée, mais TIJDEMAN [16] a montré récemment l'existence d'un majorant effectivement calculable pour les solutions. Grâce à (C), on va en donner une évaluation explicite.

THÉORÈME 5. - $y^n < x^m < \exp \exp \exp \exp 730$.

Démonstration. - Elle repose sur le lemme suivant.

LEMME 1. - $P(mn) < \exp 241$.

Démonstration. - Soit p (resp. q) un facteur premier de m (resp. n). L'équation $x^m - y^n = 1$ se ramène à $x^p - y^q = 1$ (p, q premiers). Les résultats arithmétiques antérieurs (cf. [6], chapitre 30) montrent que $\inf(p, q) \geq 5$, p (resp. q) divise y (resp. x). On va en déduire le lemme ci-après.

LEMME 2. - Il existe un entier a (resp. b), multiple de p (resp. q), tel que $p(x-1) = a^q$ (resp. $q(y+1) = b^p$).

Démonstration. - Le reste de la division de $(1 + x + \dots + x^{p-1})$ par $(x-1)$ étant p , il suffit pour montrer le résultat de prouver que q divise la valuation p -adique de $p(x-1)$, soit $v_p(p(x-1))$. p divisant y , on a

$$x^p = x = 1 \pmod{p};$$

par suite, $v_p(x-1) \geq 1$ et, puisque $p \neq 2$,

$$v_p(x^p - 1) = v_p\left(\left(1 + p^{v_p(x-1)} x'\right)^p - 1\right) = 1 + v_p(x-1) = v_p(p(x-1)) = qv_p(y).$$

C. Q. F. D.

On montrerait de même le résultat relatif à $q(y+1)$ en observant que, q étant impair, $(y+1)$ divise $y^q + 1$.

On applique maintenant (C) à la forme linéaire de logarithmes

$$L = |pq \log(a/b) + q \log q - p \log p|.$$

L est le logarithme de

$$p^p q^{-q} (b/a)^{pq} = (1 + (x-1)^{-1})^p (y+1)^q (y^q + 1)^{-1} > 1.$$

Il est clair que L est majoré par $p(x-1)^{-1} + qy^{-1}$.

Lorsque $q > p$ (donc $x > y$), la hauteur de a/b est b , et on peut majorer L par

$$2qy^{-1} = (2q^2/q(y+1))(1+y^{-1}) \leq 3b^{2-p}.$$

Lorsque $p > q$ (donc $y > x$), la hauteur de a/b est a (observer que $x > p^{q-1}$ et $y > q^{p-2}$), et on peut de même majorer L par $2a^{2-q}$. L'application de (C) donne alors, après simplification par $\log a$ (ou $\log b$).

$$q - 3 < 2^{177} (\log p)^3 (\log_2 p) \quad \text{si } p > q,$$

$$p - 3 < 2^{177} (\log q)^3 (\log_2 q) \quad \text{si } q > p.$$

Un calcul analogue, à partir de la forme

$$|p \log(xb^{-q}) + q \log q| \quad \text{si } p > q, \quad \text{ou} \quad |q \log(ya^{-p}) + p \log p| \quad \text{si } q > p,$$

permet d'obtenir

$$p - 3 < 2^{126} (\log p)(q \log q \log_2 q) \quad \text{si } p > q,$$

$$q - 3 < 2^{126} (\log q)(p \log p \log_2 p) \quad \text{si } q > p.$$

Il n'y a plus qu'à rapprocher les inégalités obtenues pour prouver le lemme 1.

Des résultats de BAKER [1] sur l'équation diophantienne $y^q = P(x)$ (P polynôme et q donné), on déduit alors l'inégalité $y^q < x^p < \exp \exp \exp \exp 730$.

Comme on l'a expliqué au §1, on a négligé l'hypothèse technique (H). Par suite, les résultats numériques précédents n'apparaissent qu'à titre d'ordre de grandeur pour les constantes dont TIJDEMAN a montré l'existence. On s'est borné ici à l'application directe des travaux de cet auteur. Nul doute que les valeurs numériques données ci-avant, peuvent être grandement améliorées : d'une part, par l'emploi d'un corollaire (C) meilleur dans les cas $n = 2, 3$ (VAN DER POORTEN a annoncé des résultats dans ce sens), d'autre part, par l'emploi d'un résultat mieux adapté à l'équation $y^q = x^p - 1$, que celui, très général, de BAKER (cf. [1]), dont une amélioration importante est annoncée par SPRINDŽUK.

4. Approximation diophantienne des nombres algébriques.

Soit x un nombre algébrique irrationnel. Soit (r_n/s_n) la suite des rationnels approchant x formée par développement en fraction continue. K. MAHLER a prouvé, dès 1936, que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(r_n/s_n) = \infty$. Toutefois, ce résultat est ineffectif. SHOREY et TIJDEMAN ont montré comment préciser simplement et effectivement ce résultat grâce aux minoration de formes linéaires de logarithmes (cf. [11]). Il suffit en effet d'observer que $xr_n^{-1} s_n$ est voisin de 1 (à au plus $(r_n/s_n)^{-1}$ près) de former le logarithme, d'appliquer un des résultats de VAN DER POORTEN ayant donné naissance à (C), pour obtenir aussi aisément qu'on l'a fait pour le théorème 1 une inégalité de la forme $P(r_n/s_n) \gg \log_2 s_n$.

On voit facilement que cette démonstration peut être étendue à des approximations rationnelles de moins bonne qualité que celles fournies par développement en fraction continue. Le résultat reste par exemple acquis pour toute suite r_n/s_n vérifiant $|x - (r_n/s_n)| < (s_n)^{-t}$ ($t > 0$). On va déduire maintenant du théorème 1 le théorème suivant.

THÉORÈME 6. - Soient x un nombre réel irrationnel dont une puissance soit rationnelle, t un réel positif, (x_n) une suite d'entiers vérifiant

$$|x_n - nx| < n^{1-t}.$$

Alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(nx_n)/\log_2 n \geq 1/6.$$

Démonstration. - Il existe des entiers d, r, s , tels que $x^d = r/s$. Pour n assez grand, on a

$$|(x_n/n)^d - (r/s)| < |(x_n/n) - x| d (2x)^{d-1}.$$

L'hypothèse faite sur x_n entraîne alors $|sx_n^d - rn^d| \ll n^{d-t}$, la constante sous-entendue ne dépendant que de x . En d'autres termes, sx_n^d ne diffère de rn^d que par une quantité de la forme $O(n^{1-t/d})$; il suffit donc d'appliquer le théorème 1 pour conclure.

Donnons une application de ces résultats : soit

$$x = \sum_{0 \leq i \leq k} a_i 10^{k-i} + \sum_{j > 0} b_j 10^{-j} \quad (0 \leq a_i, b_j \leq 9)$$

un réel algébrique irrationnel ; autrement dit, en notation décimale,

$$x = a_1 a_2 \dots a_k, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

Les entiers $a_1 a_2 \dots a_k, a_1 a_2 \dots a_k b_1 (\dots)$ approchent respectivement $x, 10x, \dots$ à moins de 1 près ; par conséquent,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_n)/\log n > 0.$$

Dans ce dernier résultat, puisqu'on ne modifie pas la nature de x en y ajoutant un rationnel, il n'est pas nécessaire de commencer la suite par $a_1 a_2 \dots a_k$; plus généralement, on peut écrire (tjours en notation décimale), pour tout entier m ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(b_m b_{m+1} \dots b_{m+n})/\log n > 0$$

et même remplacer la suite $b_m \dots b_{m+n}$ par une suite voisine.

On conserve les notations précédentes. La généralisation p -adique suivante du célèbre théorème de Roth :

THÉORÈME (RIDOUT [7]). - Soient x un nombre réel algébrique irrationnel, $p_1, p_2, \dots, p_k, q_1, q_2, \dots, q_\ell$ des nombres premiers donnés, d un

réel > 0 . Il existe une constante K telle qu'on ait, pour tout système

$$a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_\ell$$

et tout couple (r', s') d'entiers, en posant

$$r = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} r', \quad s = q_1^{b_1} \dots q_\ell^{b_\ell} s',$$

$$|x - (r/s)| r' s' (rs)^d > K$$

admet pour corollaire :

COROLLAIRE. - Soient (r_n/s_n) une suite de rationnels convergeant vers un réel
irrationnel algébrique x , ε un réel positif tel qu'on ait, pour tout entier n ,
 $|x - (r_n/s_n)| < s_n^{-(1+\varepsilon)}$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(s_n) = \infty.$$

Démonstration. - Pour montrer le résultat pour $P(s_n)$ (par exemple), il suffit
d'appliquer le théorème avec $r = r'$, $s' = 1$, $d < \varepsilon/2$.

Grâce à ce corollaire, on peut construire aisément des nombres transcendants :
Soit $x = a_1 a_2 \dots a_m, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ l'écriture décimale d'un réel x ; soit
 n_k la suite croissante d'entiers définie par $b_{n_k} \neq 0$ (pour tout k), $b_n = 0$
pour $n_k < n < n_{k+1}$. Par construction, $10^{n_k - n_{k+1}} < \|x 10^{n_k}\| < 10^{n_k - n_{k+1} + 1}$, donc
une condition suffisante pour que x soit transcendant et que $\limsup_{k \rightarrow \infty} (n_{k+1}/n_k) > 1$.
Dans le système binaire, où la suite (n_k) se trouve toute construite

$$x = [x] + \sum_{k \geq 0} 2^{-n_k},$$

on obtient un nombre transcendant dès que la condition précédente est réalisée.

Soient x un réel algébrique irrationnel, et (p_n/q_n) la suite d'approximations
obtenue par développement en fraction continue. Le corollaire précédent montre que
 $P(p_n)$ et $P(q_n)$ tendent vers l'infini avec n . Quand $x = d^{\frac{1}{2}}$ (d entier > 0
non carré parfait), on va prouver un résultat plus précis :

THÉORÈME 7.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(p_n)/\log_2 p_n \geq 1/4 ; \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} P(q_n)/\log_2 q_n \geq 1/4.$$

Démonstration. - $|p_n^2 - dq_n^2| = |p_n^2 - x^2 q_n^2| = \|xq_n\| |p_n + q_n x|$; cette quantité
restant bornée, p_n^2 (resp. q_n^2) apparaît comme valeur prise par un polynôme du
second degré. Le résultat est alors une conséquence du lemme de [2].

Dans le cas du théorème 7, on peut espérer obtenir de meilleurs résultats ainsi :

Le développement en fraction continue de tout irrationnel quadratique étant périodique à partir d'un certain rang, il existe un entier n tel qu'on ait

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix} = A^{[n/m]} P(n \bmod m)$$

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ q_n \end{pmatrix} = B^{[n/m]} Q(n \bmod m)$$

où A et B sont des matrices 2×2 convenables, $P(n \bmod m)$, $Q(n \bmod m)$ des matrices 2×1 ne dépendant que de la classe de n modulo m . En envisageant les suites extraites de p_n et q_n obtenues en ne conservant que les entiers n congrus à un même nombre modulo m , on obtient des suites récurrentes linéaires auxquelles il suffirait d'appliquer les énoncés annoncés par C. STEWART. Les résultats attendus sont de l'ordre de

$$\inf(P(p_n), P(q_n)) \gg (n/\log n)^c.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAKER (A.). - Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation, Proc. Camb. phil. Soc., t. 65, 1969, p. 439-444.
- [2] LANGEVIN (M.). - Plus grand facteur premier d'entiers consécutifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 1567-1570.
- [3] LANGEVIN (M.). - Plus grand facteur premier d'entiers voisins, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 281, 1975, Série A, p. 491-493.
- [4] LANGEVIN (M.). - Sur la fonction plus grand facteur premier, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Groupe d'étude de théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° G22, 29 p.
- [5] LEHMER (D. H.). - On a problem of Störmer, Illinois J. Math., t. 8, 1964, p. 57-79.
- [6] MORDELL (L. J.). - Diophantine equations. - London, New York, Academic Press, 1969 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 30).
- [7] RIDOUT (D.). - The p -adic generalization of the Thue-Siegel-Roth theorem, Mathematika, London, t. 5, 1958, p. 40-48.
- [8] ROSSER (J. B.) and SCHOENFELD (L.). - Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. Math., t. 6, 1962, p. 64-94.
- [9] SCHINZEL (A.). - On two theorems of Gel'fond and some of their applications, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1967, p. 177-236.
- [10] SCHINZEL (A.) and TIJDEMAN (R.). - On the equation $y^m = P(x)$ (à paraître).
- [11] SHOREY (T. N.) and TIJDEMAN (R.). - On the greatest prime factors of polynomials at integer points (à paraître).
- [12] SHOREY (T. N.) and TIJDEMAN (R.). - New applications of diophantine approximations to diophantine equations (à paraître).
- [13] SPRINDŽUK (V. G.). - Diviseurs sans facteurs carrés des polynômes et nombre de classes des corps de nombres algébriques [en russe], Acta Arithm., Warszawa, t. 24, 1973, p. 143-149.
- [14] TIJDEMAN (R.). - On integers with many small prime factors, Comp. Math. Groningen, t. 26, 1973, p. 319-330.
- [15] TIJDEMAN (R.). - On the maximal distance between integers composed of small

primes, *Comp. Math.*, Groningen, t. 28, 1974, p. 159-162.

- [16] TIJDEMAN (R.). - On the equation of Catalan, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 29, 1976, p. 197-209.
- [17] VAN DER POORTEN (A. J.). - Computing the lower bound for linear forms in logarithms, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres*, 17e année, 1975/76, n° 17, 9 p.

(Texte reçu le 11 octobre 1976)

Michel LANGEVIN
Ecole Normale Supérieure
Parc de Saint-Cloud
92210 SAINT CLOUD
