Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Pierre Liardet

Stabilité algébrique et topologies hilbertiennes

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1975-1976), exp. nº 8, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 8, 9 p.

24 novembre 1975

STABILITÉ ALGÉBRIQUE ET TOPOLOGIES HILBERTIENNES

par Pierre LIARDET

Etant données deux parties A , B d'un corps commutatif Ω , considérons la famille $\mathcal{P}(A, B)$ des polynômes P ayant la propriété : pour presque tout a dans A (i. e. tous sauf un nombre fini), il existe un b dans B tel que $P(a, b) = 0$, et pour aucun c dans B , on a $P(X, c) \equiv_X 0$. Le problème qui nous intéresse est de montrer, par exemple, que tout élément de $\mathcal{P}(A, B)$ admet un facteur caractétistique de la propriété. Les méthodes utilisées pour étudier ce type de problème sont très variées, et ont fait l'objet de nombreux travaux dont ceux de D. J. LEWIS, W. NARKIEWICZ, S. LANG, G. RAUZY, A. SCHINZEL, C. L. SIEGEL et l'auteur entre autres.

Nous nous proposons ici, dans une première partie, d'introduire des topologies dont certaines utilisent le critère d'irréductibilité de Hilbert (Topologies hilbertiennes) qui permettent d'obtenir des inclusions $\mathcal{P}(A, B) \subset \mathcal{P}(A', B')$, où A' et B' se présentent le plus souvent comme des ensembles de points d'accumulation. Dans certaines situations intéressantes, le problème de la caractérisation des éléments de $\mathcal{P}(A', B')$ semble plus simple. Dans une deuxième partie, nous donnons quelques résultats nouveaux obtenus par cette méthode [4], notamment la caractérisation de l'ensemble $\mathcal{P}(\Xi, \Xi)$, où Ξ désigne l'ensemble des P-V éléments de BATEMAN-DUQUETTE [1], dans un corps de séries formelles de Laurent.

Dans la suite, pour tout sous-corps L de Ω , $\mathcal{P}_L(A, B)$ désignera l'ensemble des polynômes dans $\mathcal{P}(A, B)$ définis sur L .

I

1. La Θ-topologie.

Désignons par K un sous-corps du corps Ω . Nous supposerons toujours Ω algébriquement clos, et noterons $\hat{K}$ la clôture algébrique de K (dans Ω). Considérons un couple (K, M_K) , où M_K est un ensemble de valeurs absolues non triviales et non équivalentes entre elles sur K . Un couple (Ω, M_Ω) sera dit une extension valuée de (K, M_K) si M_Ω est un ensemble de valeurs absolues sur Ω satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(V_1) M_K est l'ensemble des restrictions à K des éléments de M_Ω .

(V_2) Pour tout a dans Ω et tout $|\ |$ dans M_K , l'ensemble des images $\|a\|$ de a par les valeurs absolues $\|\ \|$ de M_Ω prolongeant $|\ |$ est fini.

Remarquons que si $\Omega = \hat{K}$, la condition (V_2) est toujours satisfaite. D'autre part, le groupe $Gal(\hat{K}/K)$ des K-automorphismes de $\hat{K}$ agit de façon naturelle sur les valeurs absolues de $\hat{K}$. Une extension valuée (Ω , M_Ω) de (K , M_K) sera dite <u>saturée</u> si l'ensemble $M_{\hat{K}}$ des restrictions des valeurs absolues de M_Ω à $\hat{K}$ est stable par $Gal(\hat{K}/K)$.

<u>Les ensembles</u> W_K . - Soit $a \in \Omega$. Pour tout $\varepsilon > 0$, toute partie finie non vide Σ de M_K et tout entier $\nu > 0$, définissons l'ensemble $W_K(\varepsilon , \Sigma , \nu ; a)$ des x de Ω , algébriques sur K , tels que, pour toute valeur absolue $| \ |$ de M_Ω dont la restriction à K est dans Σ , il existe ν conjugués distincts $x^{(1)} , \ldots , x^{(\nu)}$ sur K de x satisfaisant aux inégalités

$$|a - x^{(1)}| \leqslant \varepsilon , \ldots , |a - x^{(\nu)}| \leqslant \varepsilon .$$

Notons maintenant $\mathcal{O}_K$ l'ensemble des parties U de Ω telles que, pour tout a de U , il existe un ensemble $W_K(\varepsilon , \Sigma , \nu ; a)$ contenu dans U . Les éléments de $\mathcal{O}_K$ sont les ouverts d'une topologie sur Ω que nous appellerons $\mathcal{O}_K$-topologie (ou simplement $\mathcal{O}$-topologie s'il n'y a pas de risque de confusion) associée à l'extension valuée (Ω , M_Ω) . On vérifie facilement que :

(1.1) <u>La</u> $\mathcal{O}_K$<u>-topologie sur</u> Ω <u>est identique à la</u> $\mathcal{O}_L$<u>-topologie associée à l'extension valuée</u> (Ω , M_Ω) <u>de</u> (L , M_L) <u>lorsque</u> L <u>est une extension algébrique finie de</u> K .

D'autre part, les ensembles $\{a\} \cup W_K(\varepsilon , \Sigma , \nu ; a)$ ne sont pas nécessairement des voisinages de a pour la $\mathcal{O}$-topologie, mais en fait :

(1.2) <u>Si l'extension valuée</u> (Ω , M_Ω) <u>de</u> (K , M_K) <u>est saturée, la famille des ensembles</u> $\{a\} \cup W_K(\varepsilon , \Sigma , \nu ; a)$ <u>forme un système fondamental de voisinages de</u> a <u>pour la</u> $\mathcal{O}$<u>-topologie</u>.

Lorsque (Ω , M_Ω) n'est pas saturée, nous utiliserons la notion de point de condensation. Soit $A \subset \Omega$; nous dirons que a dans Ω est un <u>point de condensation</u> de A (pour la $\mathcal{O}$-topologie) si aucune des intersections $A \cap W_K(\varepsilon , \Sigma , \nu ; a)$ n'est vide. L'ensemble des points de condensation de A sera noté A_c , celui des points d'accumulation de A sera noté A' . Lorsque l'extension valuée (Ω , M_Ω) est saturée, on a, d'après (1.2), $A' = A_c$.

<u>Exemples</u>.

(1.3) Prenons $\Omega = \hat{\underset{\sim}{Q}}$, $K = \underset{\sim}{Q}$, M_Q l'ensemble des valeurs absolues (normalisées) de $\underset{\sim}{Q}$ non triviales, et soit $(\Omega , \widetilde{M}_\Omega)$ l'extension valuée saturée de $(\underset{\sim}{Q} , M_Q)$. Munissons Ω de la $\mathcal{O}$-topologie correspondant à cette extension, alors, pour l'ensemble $\underset{\sim}{S}$ des nombres de Pisot-Vijayaraghavan, on a

$$\underset{\sim}{S}' = \underset{\sim}{U} \cup \{0\}$$

où $\underset{\sim}{U}$ désigne le groupe des racines de l'unité. D'autre part, les propriétés arithmétiques des racines de l'unité montrent que $\underset{\sim}{U}' = \emptyset$. Plus généralement, soit $\mathcal{C}$ la famille des compacts $\mathcal{K}$ de $\underset{\sim}{C}$ stables par conjugaison complexe et égaux à l'adhérence de leurs intérieurs $\mathring{\mathcal{K}}$ pour la topologie usuelle de $\underset{\sim}{C}$. Si $\Theta_m^0(A)$ désigne l'ensemble des entiers algébriques θ ayant exactement m conjugués (θ compris) sur $\underset{\sim}{Q}$ extérieurs à A et tous les autres conjugués dans A , alors pour tout $\mathcal{K}$ de $\mathcal{C}$ on a :

$$(\Theta_m^0(\mathring{\mathcal{K}}))' = (\Theta_m^0(\mathcal{K}))' = \Theta_0^0(\mathcal{K}) .$$

(1.4) Prenons ici $\Omega = \underset{\sim}{C}$ et $(\underset{\sim}{C} , \{| \ |\})$ l'extension valuée de $\underset{\sim}{Q}$ où $| \ |$ désigne la valeur absolue archimédienne usuelle de $\underset{\sim}{C}$. On obtient pour les ensembles définis ci-dessus, avec $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{C}$:

$$(\Theta_m^0(\mathring{\mathcal{K}}))_c = (\Theta_m^0(\mathcal{K}))_c = \mathcal{K} .$$

2. Θ-topologie et correspondances algébriques.

L'étude du comportement des racines des équations $P(\alpha , Y) = 0$ lorsque $\alpha \in W_K(\varepsilon , \Sigma , \nu ; a)$ pour un polynôme $P(X , Y)$ de $\mathcal{P}(A , B)$ mène en particulier au théorème suivant :

(2.1) THÉORÈME. - Pour toute Θ_K-topologie sur Ω , on a

$$\mathcal{P}_{\hat{K}}(A , B) \subset \mathcal{P}_{\hat{K}}(A_c , B_c) .$$

Donnons une application directe. Pour tout polynôme $S(X)$ à coefficients dans $\underset{\sim}{C}$, notons $\mathcal{K}_S$ l'ensemble des nombres complexes Z tels que $|S(Z)| \leq 1$. Posons $\Theta_m(\mathcal{K}) = \bigcup_{n=0}^m \Theta_n^0(\mathcal{K})$. Le corollaire suivant généralise un théorème de G. RAUZY [5] sur les nombres de Pisot-Vijayaraghavan :

(2.2) COROLLAIRE. - Soient S et T deux polynômes unitaires à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$, m , n des entiers > 0 , et A une partie de $\Theta_m^0(\mathcal{K}_S)$ telle que les éléments de $\Theta_m^0(\mathcal{K}_S) \setminus A$ soient de degrés sur $\underset{\sim}{Q}$ bornés dans leur ensemble. Alors, pour tout polynôme $P(X , Y)$ de $\mathcal{P}_{\hat{\underset{\sim}{Q}}}(A , \Theta_n(\mathcal{K}_T))$, il existe u , v entiers rationnels > 0 tels que $P(X , Y)$ ait un facteur commun avec le polynôme

$$[T(Y)]^v - [S(X)]^u .$$

Il suffit en effet de remarquer que, pour la Θ-topologie donnée en (1.3), on a $S(A') = \underset{\sim}{U} \cup \{0\}$ et $T(\Theta_m(\mathcal{K}_T)') = \underset{\sim}{U} \cup \{0\}$, puis d'appliquer un théorème de S. LANG [3] qui explicite $\mathcal{P}(\underset{\sim}{U} , \underset{\sim}{U})$.

3. Topologies hilbertiennes.

Soient (Ω , M_Ω) une extension valuée de (K , M_K) , et $f(T , X)$ un polynôme de deux variables, défini et irréductible sur K , non constant en la variable X . Nous noterons Δ_f l'ensemble des éléments t de $\hat{K}$ tels que $f(t , X)$ soit K-primaire, c'est-à-dire, qu'il existe un élément b non nul de K , un entier

$r > 0$ et un polynôme h de $K[X]$, irréductible sur K, satisfaisant à

$$\prod_\sigma f(\sigma t, X) = bh^r ,$$

le produit portant sur l'ensemble des K-isomorphismes σ de $K(t)$ dans $\hat{K}$.

Une intersection finie d'ensembles Δ_f avec une partie de Ω, de complémentaire (dans Ω) fini, sera appelée ensemble prohilbertien. Notons $\mathcal{O}_K^*$ l'ensemble des parties U de Ω telles que, pour tout a de U, il existe un ensemble $W_K(\varepsilon, \Sigma, \nu ; a)$ et un ensemble prohilbertien Δ satisfaisant à la condition

$$W_K(\varepsilon, \Sigma, \nu ; a) \cap \Delta \subset U .$$

On vérifie sans difficulté que $\mathcal{O}_K^*$ est la famille des ouverts d'une topologie sur Ω que nous appellerons $\mathcal{O}_K^*$-topologie ou topologie hilbertienne. Cette topologie ne présente aucun intérêt si des ensembles prohilbertiens sont vides ; ce cas est exclu lorsque K est un corps hilbertien au sens de S. LANG [2], car l'intersection $\Delta_f \cap K$ est un ensemble de Hilbert. D'autre part :

(3.1) Si (Ω, M_Ω) est saturée, la famille des ensembles $\{a\} \cup (W_K(\varepsilon,\Sigma,\nu;a)\cap\Delta)$ (où en particulier Δ parcourt l'ensemble des ensembles prohilbertiens) forme un système fondamental de voisinages de a pour la topologie hilbertienne.

Nous dirons que a dans Ω est un point de $*$-condensation de A $(\subset \Omega)$, si aucune des intersections $W_K(\varepsilon, \Sigma, \nu ; a) \cap \Delta \cap A$ n'est vide. Nous noterons A_* l'ensemble des points de $*$-condensation de A, et A'' celui des points d'accumulation de A pour la topologie hilbertienne.

Topologies hilbertiennes et correspondances algébriques. - Désignons par $\mathcal{P}_K^{irr}(A, B)$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{P}_K(A, B)$ irréductibles sur K, et par $\mathcal{Q}_K(A, B)$ celui des éléments $P(X, Y)$ de $\mathcal{P}_K(A, B)$ tels que, pour presque tout a de A, l'équation $P(a, Y) = 0$ ait toutes ses racines dans B. La démonstration du théorème en (2.1) permet également d'obtenir le théorème suivant.

(3.2) THÉORÈME. - Pour toute topologie hilbertienne sur Ω, on a

$$\mathcal{P}_K^{irr}(A, B) \subset \mathcal{Q}_K(A_*, B_c) ,$$

où B_c désigne l'ensemble des points de condensation de B pour la $\mathcal{O}$-topologie associée à l'extension valuée correspondante Ω de K.

4. Recherche des points de condensation.

Pour montrer qu'un élément a de Ω muni d'une $\mathcal{O}_K$-topologie est un point de condensation d'une partie A de Ω, on procède généralement de la manière suivante. Pour chaque ensemble $W = W_K(\varepsilon, \Sigma, \nu ; a)$ défini au §1, on construit un polynôme de deux variables $\Phi_W(T, Z)$ (irréductible sur K) de sorte qu'il existe un élément z de K tel que le polynôme $\Phi_W(T, z)$ admette une racine ζ dans $W \cap A$.

Ainsi, dans le cas de l'exemple (1.3), avec $A = \underset{\sim}{S}$ et a une racine de l'unité, on prend

(1) $$\Phi_W(T, Z) = H(T)^\nu T^{\nu d+1} + z \prod_\sigma (g_\sigma(T))^\nu ,$$

où $H(T)$ est le polynôme unitaire irréductible sur $\underset{\sim}{Q}$ de a, le produit portant sur les $\underset{\sim}{Q}$-isomorphismes σ de $\underset{\sim}{Q}(a)$ dans $\underset{\sim}{C}$ et chaque $g_\sigma(T)$ étant un trinôme du second degré à coefficients entiers, dont les racines, dans $\underset{\sim}{C}$, sont intérieures au disque unité et l'une d'elles, α_σ, vérifiant l'inégalité

$$|\sigma a - \alpha_\sigma| \leq \varepsilon/2 .$$

On choisit alors z entier rationnel assez grand pour lequel $\Phi_W(T, z)$ est irréductible, et $|z|_p$ assez petit en chaque valeur absolue non archimédienne $|\ |_p$ de Σ, de sorte que $\Phi_W(T, z)$ soit le polynôme irréductible unitaire d'un nombre de Pisot-Vijayaraghavan ζ dans $W(\varepsilon, \Sigma, \nu ; a)$.

Pour obtenir a point de $*$-condensation de A, nous sommes amenés par les constructions des polynômes Φ_W précédents au résultat suivant.

(4.1) <u>Principe de réciprocité : Soit</u> $f(T, X)$ (resp. $\Phi(T, Z)$) <u>un polynôme irréductible de deux variables à coefficients dans</u> K, <u>de degrés en</u> T <u>et</u> X (resp. <u>en</u> T <u>et</u> Z) <u>non nuls. Supposons</u> $\Phi(\beta, Z)$ $K(X)$-<u>primaire pour une racine</u> β <u>dans</u> $\widehat{K(X)}$ <u>de</u> $f(T, X) = 0$. <u>Alors</u> $f(\alpha, X)$ <u>est</u> $K(Z)$-<u>primaire pour toute racine</u> α <u>dans</u> $\widehat{K(Z)}$ <u>de</u> $\Phi(T, Z) = 0$.

En fait, $f(T, X)$ étant donné par (4.1), si $\Phi_W(\beta, Z)$ est $K(X)$-primaire, le polynôme $N_{K(\alpha)/K}(f(\alpha, X))$ est alors, à un facteur constant près, puissance d'un polynôme $h(Z, X)$ irréductible sur K. On est amené à chercher z dans K tel que $h(z, X)$ reste irréductible, et $\Phi_W(T, z)$ admette une racine ζ (image d'une spécialisation de β au-dessus de la spécialisation $(Z) \to (z)$ sur K) dans $W \cap A$. Alors ζ est aussi dans Δ_f sous réserve d'exclure un nombre fini de valeurs de z dans K.

Remarquons que, pour les polynômes irréductibles $\Phi_W(X, T)$ donnés en (1), $\Phi_W(\beta, T)$ est $K(Y)$-primaire quel que soit β dans $\widehat{K(Y)}$, ce qui permet de montrer que, dans le cas de l'exemple (1.3), les points de condensation de $\underset{\sim}{S}$ (et plus généralement des $\Theta_m^0(\mathcal{K})$ avec $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{C}$) sont aussi les points de $*$-condensation.

II

1. Un exemple d'ensembles de nombres algébriques "affinement stables".

Pour tout θ algébrique dans $\underset{\sim}{C}$, de conjugués θ_1 $(= \theta)$, θ_2, ..., θ_k dans $\underset{\sim}{Q}$, posons

$$\rho(\theta) = \sum_{1<i<j\leq k} |\theta_i - \theta_j|$$

lorsque $k \geq 2$ et $\rho(\theta) = 0$ lorsque $k = 1$. Soit $c > 0$, et désignons par $L(c)$ l'ensemble des entiers algébriques θ tels que $\rho(\theta) \leq c$. Il est clair que toute transformation affine à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$ transforme $L(c)$ en un ensemble $L(c')$; plus généralement :

(1.1) THÉORÈME. - <u>Soient</u> c <u>et</u> c' <u>des nombres réels</u> > 0. <u>Il y a équivalence entre les deux propositions suivantes</u> :

(i) $P(X, Y)$ <u>est élément de</u> $\mathcal{P}_{\hat{Q}}(L(c) ; L(c'))$.

(ii) <u>Il existe des entiers rationnels</u> a, b <u>tels que</u> $a \neq 0$, $c|a| \leq c'$ <u>et</u> $P(x, ax+b) \equiv_x 0$.

En fait, on peut remplacer $L(c)$ dans (i) par une partie A telle que les éléments de $L(c) \setminus A$ soient de degrés sur $\underset{\sim}{Q}$ bornés dans leur ensemble. La démonstration de (1.1) s'appuie sur la propriété suivante. Soit Ω_0 l'extension valuée saturée $\hat{\underset{\sim}{Q}}$ de $(\underset{\sim}{Q}, M_{\underset{\sim}{Q}})$ envisagée dans (I-1.3) muni de la Θ-topologie associée. Soient, pour ℓ nombres premiers $p_1, \dots, p_\ell$ les extensions valuées saturées $\Omega_i = \hat{\underset{\sim}{Q}}$ de $(\underset{\sim}{Q}, |\ |_{p_i})$, où $|\ |_{p_i}$ désigne la valeur absolue p_i-adique usuelle sur $\underset{\sim}{Q}$, et soit E l'espace topologique produit $\Omega_0 \times \Omega_1 \times \dots \times \Omega_\ell$. Plongeons $\Omega = \hat{\underset{\sim}{Q}}$ suivant la diagonale $\pi : \Omega \to E$, alors pour tout $\delta > \delta' > 0$, on a

(1) $$[\pi(L(\delta) \setminus L(\delta'))]' = \underset{\sim}{Z} \times D_{p_1} \times \dots \times D_{p_\ell},$$

où les D_{p_i} sont des parties de Ω dont on retient seulement la propriété

$$\underset{\sim}{Z} \subset D_{p_i} \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \dots, \ell.$$

On se contente alors, dans un premier pas, de montrer que si g est une transformation polynomiale à coefficients rationnels telle que l'ensemble

$$(L(\delta) \setminus L(\delta')) \cap g^{-1}(L(c'))$$

ait une infinité de points d'accumulation dans Ω_0, alors g est linéaire. Puis, on utilise le résultat bien connu que, pour tout polynôme F de $\mathcal{P}_{\underset{\sim}{Q}}(\underset{\sim}{Z}, \underset{\sim}{Z})$, il existe un polynôme $g(X)$ à coefficients rationnels sur $\underset{\sim}{Q}$ tels que

$$F(x, g(x)) \equiv_x 0,$$

pour factoriser P sous la forme $(g_1(X) - Y) \dots (g_\ell(X) - Y)P_0(X, Y)$, où les $g_i(X)$ sont linéaires et à coefficients rationnels. Si aucun des g_i n'est à coefficients entiers, en utilisant (1) on obtient P_0 dans $\mathcal{P}_{\underset{\sim}{Q}}(\underset{\sim}{Z}, \underset{\sim}{Z})$. Ceci mène à l'existence de $g_k(X) = a_k X + b_k$, à coefficients entiers et des choix successifs convenables des δ et δ' assurent pour l'un de ces g_k la majoration $|a_k| c \leq c'$.

2. Stabilité algébrique et les " P-V éléments" de Bateman - Duquette.

Soit $L = k\{x^{-1}\}$ le corps des séries formelles de Laurent muni de la valeur absolue à l'infini $|\ |_\infty$, prolongée à $\hat{L}$. Désignons par Ξ l'ensemble des $\xi \in L$, entiers algébriques sur $k[x]$ tels que $|\xi|_\infty > 1$ et $|\xi'|_\infty < 1$ pour tous les autres conjugués de ξ sur $k(x)$. Alors, on a le théorème suivant.

(2.1) THÉORÈME. - Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $P(X, Y)$ est élément de $\mathcal{P}_{k(x)}(\Xi ; \Xi)$.

(ii) $P(X, Y)$ admet un facteur irréductible

$$Y^m + Xq_1(X)\, Y^{m-1} + \dots + Xq_m(X)$$

dans $k[X, Y]$, tel que $d^0 q_1 > d^0 q_i$ pour tout $i = 2, \dots, m$.

Il est facile de voir par les polygônes de Newton que (ii) entraîne (i). La réciproque s'obtient en faisant intervenir les $\mathcal{O}$- et $\mathcal{O}^*$-topologies, de la manière suivante :

Désignons par N un ensemble de valeurs absolues non triviales sur $K = k(x)$, triviales sur k, non équivalentes entre elles, et possédant la propriété

$$\bigcap_{|\ |_v \in N} A_{(v)} = k[x] ,$$

où $A_{(v)}$ est le sous-anneau de K des entiers pour $|\ |_v$. N ne contient pas $|\ |_\infty$. Envisageons $\hat{K} = \Omega$ comme l'extension valuée saturée Ω_1 (resp. Ω_∞) de (K, N) (resp. de $(K, \{|\ |_\infty\})$, et munissons Ω_1 (resp. Ω_∞) de la topologie hilbertienne correspondante. Notons alors E l'espace topologique produit $\Omega_1 \times \Omega_\infty$, et plongeons Ω dans E suivant la diagonale $\pi : \Omega \longrightarrow E$. Notons encore A' les points d'accumulation d'une partie A de E. On montre alors le résultat suivant.

(2.2) LEMME. - Avec les notations précédentes, on a :

(a) Pour la $\mathcal{O}$-topologie sur Ω_1, Ξ' est égal à la clôture intégrale $\mathfrak{a}$ de $k[x]$ dans Ω.

(b) Pour la $\mathcal{O}$-topologie sur Ω_∞, Ξ' est égal à la clôture intégrale Π_∞ dans Ω de l'idéal premier associé à $|\ |_\infty$ dans $A_{(\infty)}$.

(c) Dans E, $(\pi(\Xi))' = \mathfrak{a} \times \Pi_\infty$.

Notons au passage que (c) utilise le fait que $k[x]$ est hilbertien [2].

Voyons brièvement comment utiliser le lemme de manière profitable. Soit $P(X, Y)$ vérifiant (i) ; on peut supposer que $P(X, Y) = P_0 \dots P_\ell$, où les P_i sont irréductibles sur $k(x)$, à coefficients dans $k[x]$ et de degrés non nuls en Y. Soit $\varepsilon > 0$ (avec $\varepsilon < 1/2$). Construisons dans $(\pi(\Xi))'$ une suite de points $w_i = (u_i, v_i)$ pour $i = 1, \dots, (\ell + 1)\sigma$ (σ entier > 0) telle que les u_i

soient dans $k[x]$, distincts deux à deux, et les v_i vérifiant $1-\varepsilon \leq |v_i - v_j|_\infty \leq 1$ pour $i \neq j$. Notons B_j l'ensemble des $a \in \Xi$ tels qu'il existe une solution de $P_j(a, Y) = 0$ dans Ξ . Dans E , on a $(\pi(\Xi))' = \bigcup_{i=0}^{\ell}(\pi(B_j))'$ et par le "principe des tiroirs" l'un des $(\pi(B_j))'$, disons $(\pi B_0)'$ contient σ éléments w_i que nous pouvons supposer être $w_1, \ldots, w_\sigma$. Posons $P_0(X,Y) = p_0(x,X)Y^m + \ldots + p_m(x,X)$ avec

$$p_j(x, X) = h_{j,0}(x) X^{n_j} + \ldots + h_{j,n_j}(x) .$$

On peut supposer les polynômes $p_j(x, X)$ en X premiers entre eux (à coefficients dans $k[x]$). Dans Ω_1 les u_i $(i = 1, \ldots, \sigma)$ sont des points de $*$-condensation de B_0 , et toutes les racines de $P_0(u_i, Y) = 0$ sont dans $\mathfrak{a}$ sous réserve d'exclure un nombre fini de points dans B_0' (I-3.2 théorème). On en déduit alors que $p_0(x, X)$ est en fait constant en X et peut être finalement choisi égal à 1 . D'autre part, dans Ω_∞ , les v_i $(i = 1, \ldots, \sigma)$ sont des points de $*$-condensation de B_0 et sauf pour un nombre fini d'entre eux (que l'on peut écarter d'avance) toutes les solutions des $P_0(v_i, Y) = 0$ sont dans Π_∞ . Prenons $\sigma > n_j$, et regardons les $h_{j,i}(x)$ comme les inconnues du système

$$\begin{cases} p_j(x, v_i) = y_{j,i} \\ i = 1, \ldots, n_j + 1 \end{cases}$$

où les $y_{j,i}$ sont dans Π_∞ . La résolution de ce système permet de majorer $|h_{ij}(x)|_\infty$ par $(1/(1-\varepsilon))^{((nj+1)(nj+2))/2}$ qui assure finalement $|h_{i,j}(x)|_\infty \leq 1$ et les h_{ij} sont donc des constantes . Ainsi $P(X, Y)$ admet un facteur irréductible de la forme $P_0(X, Y) = Y^m + p_1(X) Y^{m-1} + \ldots + p_m(X)$, l'étape finale se fait en remarquant que $B_0 \cap \Delta_{P_0}$ n'est pas vide.

3. Cas des ensembles $\Theta(\mathcal{K})$.

Soient m , n deux entiers ≥ 1 , $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ deux compacts de $\mathcal{C}$ (notation de (I-1.2)), et f une transformation rationnelle à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}$. G. RAUZY a établi [6], pour $m \leq n$, l'équivalence des deux propositions suivantes :

(i) $f(\Theta_m^0(\mathcal{K})) \subset \Theta_n(\mathcal{L})$

(ii) $f(\mathcal{K}) \subset \mathcal{L}$ et f est un polynôme à coefficients entiers.

En utilisant des Θ-topologies et des topologies hilbertiennes sur $\hat{\underset{\sim}{Q}}$, on montre [4] le résultat suivant.

(3.1) THÉORÈME. - Soient r , s deux entiers ≥ 1 , $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ deux compacts de $\mathcal{C}$. Supposons $r \leq s$; alors tout polynôme $P(X, Y)$ dans $\mathcal{P}_{\underset{\sim}{Q}}(\Theta_r^0(\mathring{\mathcal{K}}), \Theta_s(\mathcal{L}))$ admet un facteur absolument irréductible de la forme

$$Q(X, Y) = Y^m + q_1(X) Y^{m-1} + \ldots + q_m(X)$$

tel que

(a) <u>Les</u> $q_i(X)$ <u>sont à coefficients entiers algébriques</u> ;

(b) <u>Si</u> $i_0 = \max\{i \; ; \; \forall\, j < i \, , \, d^0 q_j < d^0 q_i\}$, <u>alors</u> $i_0 r \leqslant s$;

(c) $Q(X , Y)$ <u>est élément de</u> $\mathfrak{Q}_{\hat{\underset{\sim}{Q}}}(\mathcal{K} \; ; \mathcal{L})$.

<u>Si de plus</u> $r = s$, <u>alors les</u> $q_i(X)$ <u>sont à coefficients entiers rationnels.</u>

Ce théorème est une extension de celui cité de G. RAUZY. D'autre part, tout comme dans le cas des fractions rationnelles, si $r < s$, l'ensemble

$$\mathcal{P}_{\hat{\underset{\sim}{Q}}}(\Theta_r^0(\mathring{\mathcal{K}}) \; , \; \Theta_s(\mathcal{L}))$$

est vide. Remarquons enfin que ce théorème soulève le problème de la détermination de $\mathfrak{Q}_{\underset{\sim}{C}}(\mathcal{K} \; ; \mathcal{L})$ pour des compacts $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ de $\underset{\sim}{C}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BATEMAN (P.) et DUQUETTE (A.). - The analogue of Pisot-Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 594-606.

[2] LANG (S.). - Diophantine geometry. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 11).

[3] LANG (S.). - Division points on curves, Annali di Mat. pura ed appl., Serie 4, t. 70, 1965, p. 229-234.

[4] LIARDET (P.). - Sur la stabilité rationnelle ou algébrique d'ensembles de nombres algébriques, Thèse Sc. math., Marseille 1975.

[5] RAUZY (G.). - Transformations rationnelles pour lesquelles l'ensemble des nombres de Pisot-Vijayaraghavan est stable, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 305-307 ; et Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, 1968/69 (non publié).

[6] RAUZY (G.). - Ensembles de nombres algébriques et transformations rationnelles, "Colloque de théorie des nombres [1969. Bordeaux]", p. 165-168, Bull. Soc. math. France, Mémoire 25, 1971, 188 p.

(Texte reçu le 19 janvier 1976)

Pierre LIARDET
Université de Provence
3 place Victor Hugo
13331 MARSEILLE CEDEX 3