Jean-Marc Deshouillers

Sur la fonction de répartition de certaines fonctions arithmétiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1975-1976), exp. nº 4, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 4, 2p.

27 octobre 1975

SUR LA FONCTION DE RÉPARTITION DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Jean-Marc DESHOUILLERS

Cet exposé est la suite de celui donné ici même il y a six ans (cf. [1]), et présente le résultat principal de [2] ; j'avais formulé la conjecture suivante :

Soit g une fonction multiplicative à valeurs dans $]0 , 1]$, telle que la fonction de répartition G des nombres $g(p - 1)$ existe et soit continue ; il y a identité entre les intervalles sur lesquels G croît strictement et ceux qui sont inclus dans l'adhérence de l'ensemble des $g(p - 1)$, où la fonction de répartition G est définie (si elle existe) par

$$G(x) = \lim_{N\to\infty} (\log N)/N \, \#\{p \leq N ; \; g(p - 1) \leq x\}.$$

Cette conjecture est maintenant démontrée, et on a même le résultat plus précis suivant :

THÉORÈME. - Si la fonction G de répartition des nombres $g(p - 1)$, où p décrit l'ensemble des nombres premiers, existe et est continue, on a l'équivalence entre les assertions :

(i) $G(x) < G(y)$;

(ii) il existe un nombre premier impair p_0 tel que $x < g(p_0 - 1) < y$.

Si, en outre, la série de terme général $1 - g(p)$ diverge tandis que son terme général $\to 0$, la fonction G est strictement croissante sur $]0, \sup_{k\in\mathbb{N}^*} g(2^k)[$, on a

$$G(\sup_{k\in\mathbb{N}^*} g(2k)) = 1$$

La démonstration utilise d'abord une caractérisation (due à ELLIOTT, DABOUSSI et DELANGE) des fonctions multiplicatives g , à valeurs dans $]0 , 1]$, dont la fonction de répartition G associée existe et est continue.

On construit ensuite (on reconnaîtra le principe fondamental de [1], encore que les détails soient assez différents) une progression arithmétique A_ε telle que la moyenne des valeurs $g(p - 1)$, quand p appartient à A_ε , soit proche de $g(p_0 - 1)$, et telle que, pout tout p dans A_ε , la valeur $g(p - 1)$ ne dépasse pas $g(p_0 - 1) + \varepsilon$.

Mentionnons enfin que l'on étudie dans [2] la répartition des nombres $g(F(p))$, où F est un polynôme à coefficients entiers et à valeurs positives.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DESHOUILLERS (J.-M.). - Sur la fonction de répartition de certaines fonctions arithmétiques définies sur l'ensemble des nombres premiers moins un, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 11e année, 1969/70, n° 17, 13 p.

[2] DESHOUILLERS((J.-M.). - Sur la croissance de certaines fonctions de répartition, Compositio Math., Groningen, t. 31, 1975, p. 259-284.

[3] ELLIOTT (P. D. T. A.). - On the limiting distribution of $f(p + 1)$ for non-negative additive functions, Acta Arithm., Warszawa, t. 25, 1974, p. 259-264.

(Texte reçu le 19 juillet 1976)

Jean-Marc DESHOUILLERS
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE