Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

DANIEL BARSKY

Fonction génératrice et congruences (application aux nombres de Bernoulli)

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1975-1976), exp. nº 21, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A19_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 21, 16 p.
8 mars 1976

FONCTION GÉNÉRATRICE ET CONGRUENCES
(APPLICATION AUX NOMBRES DE BERNOULLI)

par Daniel BARSKY

RÉSUMÉ. - On montre que la fonction génératrice des nombres de Bernoulli généralisés relatifs au caractère χ,

$$F_\chi(X) = \sum_{n\geqslant 0} B_{n,\chi}\, X^n ,$$

est, pour tout nombre premier p, un élément analytique au sens de KRASNER sur un quasi-connexe de $\underset{\sim}{C}_p$ contenant l'idéal maximal de $\underset{\sim}{C}_p$. On détermine les parties singulières de F_χ relatives aux différents trous du quasi-connexe. Ceci permet, via le théorème de Mittag-Löffler p-adique, de retrouver la théorie de KUBOTA et LÉOPOLDT sur les fonctions L p-adiques des corps de nombres abéliens totalement réels. Puis on étudie la fonction génératrice

$$J_\chi(X) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-1}\, B_{n,\chi}\, X^{n-1} ,$$

on montre que, si χ n'est pas le caractère trivial (resp. si χ_0 est le caractère trivial), J_χ (resp. $J_{\chi_0}(X) - uJ_{\chi_0}(uX)$, où $u \in \underset{\sim}{Z}_p$ et $u \equiv 1 \mod(p)$) est encore un élément analytique sur un quasi-connexe de $\underset{\sim}{C}_p$ contenant son idéal maximal. Ceci permet de montrer, via le théorème de Mittag-Löffler p-adique, que les fonctions L p-adiques sont liées à l'algèbre d'Iwasawa. La méthode employée est en fait une interprétation p-adique de la méthode de Kummer. Elle se généralise aisément.

Notations. - Soit p un nombre premier, $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{Q}$, $\underset{\sim}{Z}_p$, $\underset{\sim}{Q}_p$ ont leur signification habituelle [1], $\underset{\sim}{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$. La valeur absolue p-adique sur $\underset{\sim}{Z}_p$, $\underset{\sim}{Q}_p$, $\underset{\sim}{C}_p$, notée $|.|$, est normalisée par $|p| = p^{-1}$. On désigne par ε et ρ des nombres réels positifs. On note, si $a \in \underset{\sim}{C}_p$,

$B(a, \rho)^- = \{X \in \underset{\sim}{C}_p ;\ |X - a| < \rho\}$ (resp. $B(a, \rho)^+ = \{X \in \underset{\sim}{C}_p ;\ |X - a| \leqslant \rho\}$)

la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon ρ. On pose

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} .$$

Si $B \subset \underset{\sim}{C}_p$, on note $H(B)$ (resp. $H_0(B)$) l'ensemble des éléments analytiques sur B (resp. nuls à l'infini si B n'est pas borné), c'est-à-dire le complété pour la norme de la convergence uniforme sur B, notée $\| \|_B$, de l'espace des fractions rationnelles de $\underset{\sim}{C}_p(X)$ sans pôles dans B. Si m et n appartiennent à $\underset{\sim}{N}$, on note (m , n) le plus grand commun diviseur de m et n .

Introduction. – Les nombres de Bernoulli, $B_{n,\chi}$, relatifs au caractère de Dirichlet modulo f , χ , ont pour fonction génératrice de Hurwitz [7],

$$\widetilde{F}_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} \frac{X^n}{n!} = \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)X \exp(aX)}{\exp(fX) - 1} .$$

On note χ_0 le caractère trivial. On a $B_{n,\chi_0} = B_n$, n-ième nombre de Bernoulli ordinaire. On sait que, si $L(s , \chi) = \sum_{n\geq 1} \chi(n)n^{-s}$ est la fonction L complexe attachée au caractère χ , $L(1 - n , \chi) = - B_{n,\chi}/n$ pour tout entier $n \in \underset{\sim}{N}^*$ ($\underset{\sim}{N}^* = \underset{\sim}{N} - \{0\}$) . KUBOTA et LÉOPOLDT, suivis par de nombreux auteurs (cf. [11]), ont montré que, pour tout nombre premier p , la suite

$$n \longrightarrow -(B_{n,\chi}/n)(1 - \chi(p)p^{n-1}) = L_p(1 - n , \chi)$$

est, pour $n \in \underset{\sim}{N}^*$, $n \equiv 0 \mod (p - 1)$, la restriction d'une unique fonction $L_p(s , \chi)$, méromorphe dans le disque $B(1 , \rho)^-$ de $\underset{\sim}{C}_p$, où $\rho = p^{1-1/(p-1)}$ si $p > 2$ (resp. $\rho = 4$ si $p = 2$) , avec pour seul pôle simple le point $s = 1$ avec résidu zéro si $\chi \neq \chi_0$ et $1 - p^{-1}$ si $\chi = \chi_0$. Puis ces auteurs ont donné une expression de $L_p(1 , \chi)$ analogue à celle de $L(1 , \chi)$ connue dans le cas complexe. Ultérieurement, IWASAWA a montré que $L_p(s , \chi)$ appartient à "l'algèbre d'Iwasawa" si $\chi \neq \chi_0$ et $(p , f) = 1$, et que $(u^{s-1} - 1) L_p(s , \chi_0)$ appartient à "l'algèbre d'Iwasawa" où $u \in \underset{\sim}{Z}_p$ et $|u - 1| \leq p^{-1}$ [11] et [7].

Nous montrerons que

$$\begin{aligned} F_\chi(X) &= \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} X^n \\ &= - f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{n!X^n f^n}{(1 - aX)(1 - (a + f)X) \dots (1 - (a + nf)X)} . \end{aligned}$$

Nous en déduirons immédiatement que F_χ est un élément analytique sur un quasi-connexe de $\underset{\sim}{C}_p$ contenant $B(0 , 1)^-$. En étudiant la décomposition de F_χ en somme de ses parties singulières relatives aux différents trous du quasi-connexe (théorème de Mittag-Löffler p-adique [1] ou [10]) nous montrerons que

$$G_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}(1 - \chi(p)\, p^{n-1})\, X^n$$

est un élément analytique, pour tout entier k , sur

$$\mathcal{D}_{p,k} = \underset{\sim}{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1} \bigcup_{n=0}^{p^k-1} B(i + pn , p^{-k-1})^+ ,$$

nul à l'infini. Ce résultat nous redonnera grâce au théorème de Mittag-Löffler p-adique le fait que $L_p(1 - n , \chi) = -n^{-1} B_{n,\chi}(1 - \chi(p)\, p^{n-1})$ est la restriction, pour $n \equiv 0 \mod(p - 1)$, d'une fonction méromorphe sur $B(1 , \rho)^-$ n'ayant qu'un pôle simple en 1 avec résidu zéro si $\chi \neq \chi_0$ (resp. résidu $1 - p^{-1}$ si $\chi = \chi_0$). Nous montrerons ensuite que si $\chi \neq \chi_0$, $(p, f) = 1$,

$$J_\chi(X) = \sum_{n\geq 1} L_p(1 - n, \chi)X^{n-1} = f^{-1} \sum_{n\geq 0} a_n \frac{n!X^n}{(1 - X) \ldots (1 - nX)}$$

où $a_n \in \underset{\sim}{C}_p$ et $|a_n| \leq 1$, respectivement que, si $u \in \underset{\sim}{Z}_p$ et $|u - 1| \leq p^{-1}$,

$$uJ_{\chi_0}(uX) - J_{\chi_0}(X) = \sum_{n\geq 1}(u^n - 1)L_p(1 - n, \chi_0)X^{n-1}$$
$$= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{n!X^n}{(1 - X) \ldots (1 - nX)},$$

où a_n dépend de u et $a_n \in \underset{\sim}{Z}_p$. Ce qui nous redonnera le fait que $L_p(s, \chi)$, si $\chi \neq \chi_0$ et $(f, p) = 1$ appartient à "l'algèbre d'Iwasawa" généralisée (resp. que $(u^{s-1} - 1)L_p(s, \chi_0)$ appartient à "l'algèbre d'Iwasawa").

La méthode employée pour obtenir ces résultats est en fait une interprétation p-adique de la méthode de KUMMER [9]. Elle est fondée sur un analogue formel de la transformation de Laplace et sur le théorème de Mittag-Löffler p-adique ([1] ou [10]) qui remplace l'intégrale de Cauchy pour les fonctions de variable complexe. Cette méthode est en fait très proche de la méthode des mesures p-adiques de Katz. Elle peut s'employer dans d'autres cas, par exemple : nombres de Bell [4] et nombres de Bernoulli-Hurwitz [5].

1. Fonction génératrice des nombres de Bernoulli.

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur $f_\chi = f$. On sait que [7]

$$\tilde{F}_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} \frac{X^n}{n!} = \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)Xe^{aX}}{e^{fX} - 1}.$$

Transformons le troisième membre ; il vient

$$\tilde{F}_\chi(X) = f^{-1}\sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, e^{aX}(e^{fX} - 1)^{-1} \log(1 - (1 - e^{fX}))$$
$$= - f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, e^{aX} \sum_{n\geq 1} \frac{(1 - e^{fX})^{n-1}}{n},$$

la dernière série convergeant X-adiquement. Considérons le $\underset{\sim}{C}_p$-endomorphisme, $\mathfrak{L}$, de $\underset{\sim}{C}_p[[X]]$ continu pour la topologie X-adique et défini par

$$\tilde{f}(X) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{X^n}{n!} \in \underset{\sim}{C}_p[[X]]$$

(une telle série s'appellera une série de Hurwitz),

$$f(X) = \mathfrak{L}(\tilde{f})(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \quad (\text{cf. } [4]).$$

Remarquons que, si $k \in \underset{\sim}{C}_p$,

$$\mathfrak{L}(e^{kX}) = (1 - kX)^{-1},$$

si $\tilde{f}(X) = \sum_{n\geq 1} a_n (X^n/n!)$, alors

$$\tilde{\mathfrak{L}}(\tfrac{f}{X})(X) = \sum_{n\geq 1} n^{-1} a_n X^{n-1} .$$

On a donc

$$\tilde{\mathfrak{L}}(F_\chi)(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} X^n = F_\chi(X)$$

et

$$F_\chi(X) = - f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \sum_{n\geq 1} \mathfrak{L}(n^{-1} e^{aX}(1 - e^{fX})^{n-1}) ,$$

car $\mathfrak{L}$ est continue X-adiquement. Donc

$$F_\chi(X) = - f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \sum_{n\geq 0} (n + 1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (1 - (a + kf)X)^{-1} ,$$

soit finalement

$$(1)\quad F_\chi(X) = - f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{n!\, X^n f^n}{(1 - aX)(1 - (a + f)X) \ldots (1 - (a + nf)X)} ,$$

PROPOSITION 1. – Pour tout nombre premier p , $F_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} X^n$ est un élément analytique sur $B(0, 1)^- \subset \mathbb{C}_p$.

C'est évident sur la formule (1). En effet,

$$\inf_{X\in B(0,1)^-} |(1 - aX) \ldots (1 - (a + nf)X)| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} |(n + 1)^{-1} f^n n!| = 0,$$

donc $F_\chi \in H(B(0, 1)^-)$.

Nous allons montrer que F_χ est un élément anlytique sur des quasi-connexes strictement plus grands que $B(0, 1)^-$.

LEMME 1. – Soit $X \in \mathbb{C}_p$, $|X| \geq 1$, tel que $p^{-k} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} |(1 - nX)| < p^{-k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\left|\frac{n!X^n}{(1 - X) \ldots (1 - nX)}\right| \leq |[n/(p^k |X|)]!\, |p^k |X| ,$$

où $[\rho]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à ρ .

Posons $X = m^{-1} + xm^{-1} p^k$, où $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{C}_p - \mathbb{Z}_p$ et $0 < x \leq 1$. Donc $|m^{-1}| = |X|$.

$$(1 - X) \ldots (1 - nX) = m^{-n}(m - 1 - xp^k) \ldots (m - n - nxp^k) ,$$

or $m - n - nxp^k \geq p^{-k-1} |m|$, donc

$$|(1 - X) \ldots (1 - nX)| \geq |X^n| p^{-k} |X|^{-1} p^{-([n/(p|X|)] + \ldots + [n/(p^k|X|)])}$$

donc

$$\left|\frac{n!X^n}{(1-X)\ldots(1-nX)}\right| \leq p^k|X|\ |[n/(p^k|X|)]!|\ .$$

LEMME 2. – <u>Soit</u> $X \in \underset{\sim}{C}_p$, <u>tel que</u> $\inf_{n\in\underset{\sim}{N}}|(1-nX)| \geq 1$ <u>et</u> $p^r \leq |X| < p^{r+1}$ <u>pour</u> $r \in \underset{\sim}{N}$ (resp. $|X| < 1$), <u>alors</u>

$$\left|\frac{n!X^n}{(1-X)\ldots(1-nX)}\right| \leq |[n/p^r]!|\ p^{\theta[n/p^{r+1}]}\ ,$$

<u>où</u> θ <u>est un nombre réel tel que</u> $0 \leq \theta < 1$ (resp. $\left|\frac{n!X^n}{(1-X)\ldots(1-nX)}\right| \leq |n!|$) .

On a

$$|(1-X)\ldots(1-nX)| \geq |X|^{n-[n/p]}\ |pX|^{[n/p]-[n/p^2]}\ \ldots\ |p^rX|^{[n/p^r]-[n/p^{r+1}]}\ .$$

D'où le résultat en posant $|X| = p^{r+\theta}$ avec $0 \leq \theta < 1$.

Remarquons que, dans les lemmes 1 et 2, si $k \leq k_0$ et $r \leq r_0$, alors la dépendance de la valeur absolue est de la forme p^{-cn} , où c est une constante réelle positive non nulle.

THÉORÈME 1. – <u>Pour tout nombre premier</u> p , $F_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}X^n$ <u>est prolongeable en un élément analytique nul à l'infini sur</u>

$$\mathcal{C}_{p,k} = \underset{\sim}{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1}\bigcup_{n\geq 0}\bigcup_{m=0}^{p^k-1} B\left(\frac{i+pfm}{p^n}\ ,\ p^{n-1-k}|f|\right)^+\ ,\quad k \in \underset{\sim}{N}\ ;$$

autrement dit $F_\chi \in H_0(\mathcal{C}_{p,k})$.

Posons

$$F_\chi(X\ ,\ a) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\ (n+1)^{-1}\ \frac{n!X^n\ f^n}{(1-aX)\ldots(1-(a+nf)X)}\ ,$$

donc $F_\chi(X) = \sum_{a=1}^{f}\chi(a)\ F_\chi(X\ ,\ a)$. Effectuons dans $F_\chi(X\ ,\ a)$ le changement de variable $X = Yf^{-1}(1+aYf^{-1})^{-1}$. Si $X \in \mathcal{C}_{p,k}$ et $|X| \geq 1$, alors

$$f \leq |Y| \leq p^{k+1}|a|$$

et

$$\inf_{n\in\underset{\sim}{N}}|1-nY| = \inf_{n\in\underset{\sim}{N}}\left|\frac{1-(a+nf)X}{1-aX}\right| \geq p^{-k-1}\ \inf_{1\leq a\leq f}(|a|)\ .$$

On remarque que $|(n+1)^{-1}| \leq p^{\ell(n+1)}$, où $\ell(n+1) = \left[\frac{\log(n+1)}{\log(p)}\right]$, et on applique les lemmes 1 et 2. Ce qui prouve que $F_\chi \in H_0(\mathcal{C}_{p,k})$.

On pourrait montrer le théorème 1 (ainsi d'ailleurs que les lemmes 1 et 2) en utilisant les résultats généraux d' AMICE sur les fonctions localement analytiques [2]. En effet, on peut remarquer que

$$(-1)^n\ \frac{n!X^n\ f^n}{(1-aX)\ldots(1-(a+nf)X)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(1-(a+kf)X)^{-1}\ ,$$

ce n'est donc pas autre chose que le n-ième coefficient d'interpolation sur la base normale des polynômes $\binom{x}{n}$ de la fonction de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{C}_p$:

$$t \longrightarrow (1-(a+tf)X)^{-1} .$$

COROLLAIRE 1. - F_χ <u>est une fonction analytique sur</u> $\mathbb{C}_p - \mathbb{Z}_p^{-1}$. <u>En effet,</u>

$$\cup_{k\geq 0} \mathcal{C}_{p,k} = \mathbb{C}_p - \mathbb{Z}_p^{-1} ,$$

<u>et pour tout entier</u> k , F_χ <u>est un élément analytique sur</u> $\mathcal{C}_{p,k}$ [1] ou [10].

Rappelons que, d'après le théorème de Mittag-Löffler p-adique [1] ou [10], tout élément analytique sur un quasi-connexe $\mathcal{C}_p$ s'écrit de manière unique comme la somme de ses parties singulières relatives aux différents trous de $\mathcal{C}_p$. Considérons le quasi-connexe

$$\mathcal{B}_{p,0} = B(0\ ,\ 1)^+ - \cup_{i=1}^{p-1} B(i\ ,\ p^{-1})^+ ,$$

les trous de $\mathcal{B}_{p,0}$ sont les boules $B(i\ ,\ p^{-1})^+$, pour $1 \leq i \leq p-1$, et le trou a l'infini $\mathbb{C}_p - B(0\ ,\ 1)^+$ que l'on notera $B(\infty\ ,\ p^{-1})^+$. D'après le théorème 1, F_χ est un élément analytique sur $\mathcal{B}_{p,0}$. Notons $F_{\chi,i,0}$ la partie singulière de F_χ relative au trou $B(i\ ,\ p^{-1})^+$, $1 \leq i \leq p-1$ ou $i=\infty$, elle est caractérisée ([1] ou [10]) par le fait que $F_\chi - F_{\chi,i,0}$ est un élément analytique sur $\mathcal{B}_{p,0} \cup B(i\ ,\ p^{-1})^+$.

COROLLAIRE 2. - <u>Pour tout nombre premier</u> p , <u>la partie singulière de</u> F , <u>relative au trou</u> $B(i\ ,\ p^{-1})^+$, $1 \leq i \leq p-1$ <u>ou</u> $i=\infty$, <u>du quasi-connexe</u> $\mathcal{B}_{p,0}$, <u>a pour expression</u>

$$F_{\chi,i,0} = -f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \sum_{m\geq 0}(m+1)^{-1} \sum_k^{*}\binom{m}{k}(-1)^k (1-(a+kf)X)^{-1} ,$$

<u>où</u> $\sum_k^*$ <u>désigne une sommation sur les entiers</u> k <u>tels que</u> $|(a+kf)^{-1} - i| \leq p^{-1}$ <u>si</u> $1 \leq i \leq p-1$ (resp. sur les entiers k tels que $|a+kf| \leq p^{-1}$ si $i=\infty$) .

En effet, on reconnaît dans la quantité $\sum_k^*\binom{m}{k}(-1)^k (1-(a+kf)X)^{-1}$ le n-ième coefficient d'interpolation [2] sur la base normale des polynômes $\binom{x}{n}$ de la fonction de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{C}_p$: $t \longrightarrow f_\chi(t) = (1-(a+tf)X)^{-1}\, \Psi_i(t)$ où $\Psi_i(t)$ est la fonction caractéristique de la boule de $\mathbb{Z}_p$ de centre $(1-ia)^{-1} fi$ si $|(1-ia)^{-1} fi| \leq 1$ et $1 \leq i \leq p-1$ (resp. la fonction identiquement nulle si $|(1-ia)^{-1} fi| > 1$) et de rayon $|pf^{-1}|$, si $i=\infty$, c'est la fonction caractéristique de la boule de $\mathbb{Z}_p$ de centre $-af^{-1}$ et de rayon $|pf^{-1}|(|a| \leq |f|)$. Il est clair que cette fonction $f_\chi(t)$ est analytique sur toute boule de centre $x \in \mathbb{Z}_p$ et de rayon $|pf^{-1}|$. Elle est donc localement analytique au sens d'AMICE [2], de rayon d'analyticité locale $|pf^{-1}|$, en outre

$$\sup_{t\in B(0,1)^+} \sup_{X\in B(0,1)^-} |f_X(t)| = 1$$

(ici $t \in \underset{\sim}{C}_p$ car on peut prolonger de manière évidente $f_X(t)$ sur $B(0\ ,\ 1)^+ \subset \underset{\sim}{C}_p$).
Alors, d'après un résultat général d'AMICE [2] :

$$\|\Sigma_k^* \binom{m}{k}(-1)^k (1 - (a + kf)X)^{-1}\|_{B(0,1)^-} \leq |[m|pf^{-1}|]!\ |pf^{-1}|^{m/p} .$$

D'après les inégalités de Cauchy [1], si

$$\Sigma_k^* \binom{m}{k}(-1)^k (1 - (a + kf)X)^{-1} = P_m(X)/Q_m(X) ,$$

alors $P_m(X) \in (pf^{-1})^{m/p}\ ([m|pf^{-1}|]!)\underset{\sim}{Z}_p[X]$. Comme, pour $1 \leq i \leq p - 1$ ou $i = \infty$,

$$\|Q_m\|_{\underset{\sim}{C}_p - B(i,p^{-1})^+} \geqslant |pf^{-1}|^{-[m/p]} ,$$

on en déduit que

$$\lim_{m\to\infty} \|(-1)^m (m + 1)^{-1} P_m Q_m^{-1}\|_{\underset{\sim}{C}_p - B(i,p^{-1})^+} = 0 .$$

Donc la fonction

$$F_{\chi,i,0}(X) = - f^{-1} \Sigma_{a=1}^f \chi(a) \Sigma_{m\geq 0} (m + 1)^{-1} \Sigma_k^* \binom{m}{k}(-1)^k (1 - (a + kf)X)^{-1}$$

appartient à $H_0(\underset{\sim}{C}_p - B(i\ ,\ p^{-1})^+)$, en outre il est facile de voir que $F_\chi - F_{\chi,i,0}$ se prolonge analytiquement sur $B(i\ ,\ p^{-1})^+$. Donc, d'après l'unicité de la décomposition en parties singulières du théorème de Mittag-Löffler p-adique, on en déduit que $F_{\chi,i,0}$ est la partie singulière de F_χ relative au trou $B(i\ ,\ p^{-1})^+$.

On pourrait par le même raisonnement donner les parties singulières de F_χ relatives aux trous du quasi-connexe $\mathcal{C}_{p,k}$.

COROLLAIRE 3 (Von STAUDT - CLAUSEN). - B_n <u>est</u> p-<u>entier si</u> $p - 1$ <u>ne divise pas</u> n <u>et</u> $pB_n \equiv (-1)^p \bmod (p)$ <u>si</u> $p - 1$ <u>divise</u> n .

En effet, compte tenu de ce que $(p - 1)! \equiv -1 \bmod (p)$ et

$$(1 - X) \ldots (1 - (p - 1)X) \equiv 1 - X^{p-1} \bmod (p\underset{\sim}{Z}[X]) ,$$

$$\begin{aligned} F_{\chi_0}(X) &= \Sigma_{n\geq 0} B_n X^n \\ &= \Sigma_{n=2}^{p-2} (-1)^n (n + 1)^{-1} \frac{n!X^n}{(1 - X) \ldots (1 - (n + 1)X)} \\ &\quad + (-1)^p X^{p-1}(1 - X^{p-1})^{-1} \\ &\quad + (-1)^{2p-1} 2^{-1} X^{2p-1}(1 - X^{p-1})^{-2} \bmod (p\underset{\sim}{Z}[X]) . \end{aligned}$$

D'où le résultat.

On peut aussi obtenir à partir de la fonction génératrice F_{χ_0} d'autres congruences classiques sur les nombres de Bernoulli.

2. Etude de la fonction génératrice des nombres de Bernoulli.

Nous allons donner une autre forme pour les parties singulières de F_χ relatives aux trous de $\mathbb{C}_{p,k}$ qui nous redonnera la théorie de KUBOTA et LÉOPOLDT.

On a l'identité évidente suivante

$$\tilde{F}_\chi(X) = \Sigma_{a=1}^{f} \chi(a)\ Xe^{aX}(e^{fX} - 1)^{-1} = \Sigma_{a=1}^{p^k f} \chi(a)\ Xe^{aX}(e^{p^k fX} - 1)^{-1}, \qquad k \in \underset{\sim}{N}.$$

On en déduit facilement que, pour tout entier $k \in \underset{\sim}{N}^*$,

$$\tilde{F}_\chi(X) - p^{-1} \chi(p)\ \tilde{F}_\chi(pX) = \Sigma'^{p^k f}_{a=1} \chi(a)\ Xe^{aX}(e^{p^k fX} - 1)^{-1},$$

où Σ'_a désigne une sommation sur les indices a tels que $(a, p) = 1$.

Après transformation de Laplace formelle, il vient

$$(2) \qquad G_\chi(X) = F_\chi(X) - p^{-1} \chi(p)\ F_\chi(pX) = \Sigma_{n\geq 0} B_{n,\chi}(1 - \chi(p)\ p^{n-1})\ X^n$$

$$= - p^{-k} f^{-1} \Sigma'^{p^k f}_{a=1} \chi(a)\ \Sigma_{n\geq 0}(-1)^n (n+1)^{-1} \frac{n!\,X^n\, p^{kn}\, f^n}{(1 - aX) \ldots (1 - (a + p^k fn)X)}.$$

Montrons que G_χ est un élément analytique, nul à l'infini, sur

$$\mathbb{D}_{p,h} = \underset{\sim}{C}_p - \cup_{i=1}^{p-1} \cup_{n=0}^{p^h-1} B(i + pn, p^{-h-1})^+, \qquad h \in \underset{\sim}{N}.$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que $|f| = 1$ pour le lemme 3 seulement.

LEMME 3. - <u>Si</u> $(a, p) = 1$ <u>et si</u> $k \geqslant h$,

$$\left\|(-1)^n (n+1)^{-1} \frac{X^n f^n p^{kn}(n!)}{(1 - aX) \ldots (1 - (a + p^k fn)X)}\right\|_{\mathbb{D}_{p,h}} \leqslant \left|\frac{f^n(n!)\ p^{(k-h)n}}{n+1}\right|_p^h.$$

<u>Si</u> $(a, p) = 1$ <u>et si</u> $k < h$,

$$\left\|(-1)^n (n+1)^{-1} \frac{X^n f^n p^{kn}(n!)}{(1 - aX) \ldots (1 - (a + p^k fn)X)}\right\|_{\mathbb{D}_{p,h}} \leqslant \left|\frac{f^n(n!)}{(n+1)([n/p^k]!)}\right|_p^h.$$

La démonstration est immédiate. Donc, dans tous les cas,

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(-1)^n (n+1)^{-1} \frac{X^n f^n p^{kn}(n!)}{(1 - aX) \ldots (1 - (a + p^k fn)X)}\right\|_{\mathbb{D}_{p,h}} = 0.$$

Comme le degré du numérateur est inférieur strictement à celui du dénominateur, on en déduit que G_χ est nul à l'infini sur $\mathbb{C}_{p,h}$.

THÉORÈME 2. - <u>Pour tout nombre premier</u> p, <u>pour tout entier</u> $h \in \underset{\sim}{N}$,

$$G_\chi(X) = F_\chi(X) - p^{-1}\,\chi(p)\,F_\chi(pX) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}(1 - \chi(p)\,p^{n-1})X^n$$

<u>appartient à</u> $H_0(\mathbb{D}_{p,h})$ <u>et</u> $\|G_\chi\|_{\mathbb{D}_{p,h}} \leq p^{2h+1}|f^{-1}|$.

C'est immédiat d'après la formule (2) et les inégalités du lemme 3. On peut aussi montrer la dernière inégalité en remarquant que

$$(-1)^n \frac{n!X^n f^n p^{kn}}{(1 - aX)\ \ldots\ (1 - (a + p^k fn)X)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(-1)^j\,(1 - (a + p^k fj)X)^{-1}\,.$$

Ce théorème est le résultat-clef pour l'étude des nombres de Bernoulli. Grâce au théorème de Mittag-Löffler nous obtiendrons les résultats de KUBOTA et LÉOPOLDT.

PROPOSITION 2. - <u>Pour tout nombre premier</u> p,

$$p^{-1}\,\chi(p)\,F_\chi(Xp) = -\frac{1}{pf}\sum_{a=1}^f \chi(ap)\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}\,\frac{n!X^n p^n f^n}{(1 - aX)\ \ldots\ (1 - (a + pfn)X)}$$

$$= -f^{-1}\sum_{a=1}^f \chi(a)\sum_{n\geq 0}(n+1)^{-1}\sum_k^* \binom{n}{k}(-1)^k\,(1 - (a + kf)X)^{-1}\,,$$

où $\sum_k^*$ désigne une sommation sur les entiers $k \equiv -af^{-1} \bmod(p)$ si $|a| \leq |f|$ (sinon sommation vide).

La première égalité est évidente, la seconde provient de la propositinn 1 et de l'unicité de la décomposition en parties singulières du théorème de Mittag-Löffler p-adique.

THÉORÈME 3. - <u>Pour tout nombre premier</u> p, <u>la suite</u> $n \longrightarrow B_{n,\chi}(1 - \chi(p)\,p^{n-1})$ est, pour $n \equiv j \bmod (p-1)$, $0 \leq j \leq p-1$, <u>la restriction d'une fonction</u> $g_{j,\chi}(s)$ <u>analytique sur le disque</u> $B(0\,,\,\rho_p)^- \subset \underset{\sim}{C}_p$, <u>où</u> $\rho_p = p^{1-1/(p-1)}$ <u>si</u> $p > 2$ (resp. $\rho_2 = 4$).

Si $\chi \neq \chi_0$ ou si $j \neq 0$, $g_{j,\chi}(0) = 0$, si $\chi = \chi_0$ et $j = 0$,

$$g_{0,\chi_0}(0) = 1 - p^{-1}\,.$$

Puisque $G_\chi \in H_0(\mathbb{D}_{p,0})$, le théorème de Mittag-Löffler p-adique permet d'écrire de manière unique :

$$G_\chi(X) = \sum_{i=1}^{p-1} G_{i,\chi}(X)\,,$$

où $G_{i,\chi} \in H_0(\underset{\sim}{C}_p - B(i\,,\,p^{-1})^+)$, $G_\chi - G_{i,\chi}$ se prolonge analytiquement sur $B(i\,,\,p^{-1})^+$ et en outre :

$$\sup_i \|G_{i,\chi}\|_{\underset{\sim}{C}_p - B(i,p^{-1})^+} = \|G_\chi\|_{\mathbb{D}_{p,0}}\,.$$

La formule (2) permet même de donner une expression explicite des $G_{i,\chi}$.

Comme $G_{i,\chi} \in H_0(\underset{\sim}{C}_p - B(i\ ,\ p^{-1})^+)$, elle possède une représentation unique sur $\underset{\sim}{C}_p - B(i\ ,\ p^{-1})^+$ sous la forme

$$G_{i,\chi}(X) = \sum_{n\geq 1} \lambda_{i,n}\ i^{n-1}(1 - i^{-1}\ X)^{-n}\ .$$

Donc d'après les inégalités de Cauchy et le théorème de Mittag-Löffler, on a

$$\|G_{i,\chi}\|_{\underset{\sim}{C}_p - B(i,p^{-1})^+} = \sup_{n\geq 1} |\lambda_{i,n}| p^n \leqslant p\,|f^{-1}|\ ;$$

donc $|\lambda_{i,n}| \leqslant p^{-n+1}\,|f^{-1}|$.

Donc, en développant,

$$B_{n,\chi}(1 - \chi(p)\ p^{n-1}) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{m\geq 1} i^{-n}\ \lambda_{i,m}\binom{m+n-1}{m-1}\ .$$

Considérons la suite de fonctions

$$m \longrightarrow f_{i,m}(s) = (i^{-(p-1)})^s\ \lambda_{i,m}\binom{(p-1)s + m - 1}{m-1} \quad \text{où} \quad 1 \leqslant i \leqslant p-1\ .$$

Pour chaque m fixé, c'est une fonction analytique sur la boule $B(0\ ,\ \rho_p)^-$ si $p > 2$ (resp. sur $\underset{\sim}{C}_2$), où $\rho_p = p^{1-1/(p-1)}$ si $p > 2$, respectivement $\rho_2 = 4$ (cf. [2]). Cette suite de fonctions analytiques converge simplement vers zéro si $\lim_{m\to\infty} |\lambda_{i,m}\binom{s+m-1}{m-1}| = 0$, car $|i^{-(p-1)s}| \leqslant 1$. Il suffit que

$\lim_{m\to\infty} p^{-m+1}\,|s|^{m-1}\ |(m-1)!\,| = 0$ et donc que $|s| < \rho_p$. Si $|s| \leqslant \rho < \rho_p$, la convergence est uniforme sur $B(0\ ,\ \rho)$, et par conséquent d'après des résultats généraux [1] sur les limites uniformes de fonctions analytiques, on en déduit que $f_i(s) = \sum_{m\geq 1} f_{i,m}(s)$ est une fonction analytique sur $B(0\ ,\ \rho_p)$. On en déduit que la suite

$$r \longrightarrow B_{(p-1)r+j,\chi}(1 - \chi(p)\ p^{(p-1)r+j}) \quad \text{où} \quad r \in \underset{\sim}{N} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant j \leqslant p-1\ ,$$

est la restriction à $\underset{\sim}{N}$ de la fonction $g_{j,\chi}(s) = \sum_{i=1}^{p-1} i^{-j}\ f_i(s)$ qui est analytique sur $B(0\ ,\ \rho_p)$. Le reste du théorème découle des propriétés élémentaires de $B_{0,\chi}$ [7].

PROPOSITION 3.

$$G_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}(1 - \chi(p)\ p^{n-1}) = \lim_{k\to\infty} -p^{-k}\ f^{-1} \sum_{a=1}^{p^k f} \chi(a)(1 - aX)^{-1}\ ,$$

<u>la limite étant uniforme sur</u> $\mathfrak{D}_{p,h}$ <u>pour tout entier</u> $h \geqslant 0$.

En effet, d'après le théorème 2, on a uniformément sur $\mathfrak{D}_{p,h}$ et pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$G_\chi(X) = -p^{-k} f^{-1} \sum_{a=1}^{\prime p^k f} \chi(a)(1 - aX)^{-1}$$

$$- \sum_{a=1}^{\prime p^k f} \tfrac{1}{2}\chi(a) \frac{p^f fX}{(1 - aX)(1 - (a + p^k f)X)}$$

$$- p^{-k} f \sum_{a=1}^{\prime p^k f} \chi(a) \sum_{n \geq 2} (-1)^n (n + 1)^{-1} \frac{n! X^n p^{kn} f^n}{(1 - aX) \ldots (1 - (a + p^k fn)X)} ,$$

rappelons que $\sum_a'$ désigne une sommation sur les a tels que $(a , p) = 1$.

Or, d'après le lemme 3, le troisième terme de la formule précédente converge uniformément sur $\mathbb{O}_{p,h}$ vers zéro, le second terme converge uniformément sur $\mathbb{O}_{p,h}$ vers $\sum_{a=1}^{\prime p^k f} \frac{1}{2}\chi(a)(1 - aX)^{-2}$ qui converge uniformément vers zéro sur $\mathbb{O}_{p,h}$ lorsque k tend vers $+\infty$, car

$$\chi(a) = \chi(a + f) \quad \text{et} \quad |(1 - aX)^{-2} - (1 - a' X)^{-2}| \leq |a - a'| \, p^{4h} \quad \text{si} \quad \chi \in \mathbb{O}_{p,h} .$$

On a donc, uniformément sur $\mathbb{O}_{p,h}$,

$$G_\chi(X) = \lim_{k \to \infty} -p^{-k} f^{-1} \sum_{a=1}^{\prime p^k f} \frac{\chi(a)}{1 - aX} .$$

COROLLAIRE. - <u>On a</u>, <u>uniformément en</u> n ,

$$B_{n,\chi}(1 - \chi(p)\, p^{n-1}) = \lim_{k \to \infty} -p^{-k} f^{-1} \sum_{a=1}^{\prime p^k f} \chi(a)\, a^n .$$

Ceci découle de la proposition 3 et des inégalités de Cauchy sur $B(0 , 1)^-$ appliquées à G_χ. Le lien est donc fait avec la théorie de KUBOTA et LÉOPOLDT [7].

3. Fonctions L p-adiques.

Les résultats de la première partie vont nous servir à montrer l'existence des fonctions L p-adiques des corps de nombres abéliens totalement réels. Puis nous montrerons directement que les fonctions L p-adiques existent et qu'elles sont liées à "l'algèbre d'Iwasawa".

THÉORÈME 4. - <u>Pour tout nombre premier</u> p , <u>il existe une et une seule fonction</u> $L_p(s , \chi)$ <u>méromorphe sur le disque</u> $B(1 , \rho_p)$, <u>où</u> $\rho_p = p^{1-1/(p-1)}$ <u>si</u> $\rho > 2$, et $\rho_2 = 4$, <u>telle que</u>

(i) $L_p(1 - n , \chi) = - n^{-1} B_{n,\chi}(1 - \chi(p)\, p^{n-1})$ <u>pour</u> $n \in (p - 1)\mathbb{N}^*$.

(ii) <u>Cette fonction a dans</u> $B(1 , \rho_p)$ <u>un seul pôle simple pour</u> $s = 1$ <u>avec résidu zéro si</u> $\chi \neq \chi_0$, <u>et résidu</u> $1 - p^{-1}$ <u>si</u> $\chi = \chi_0$.

Ceci découle du théorème 3 et du principe de prolongement analytique. Nous allons montrer que $L_p(s , \chi)$, $\chi \neq \chi_0$, et $(f , p) = 1$ (resp. $(u^{s-1} - 1)L_p(s , \chi_0)$

où $u \in \underset{\sim}{Z}_p$ et $|u - 1| \leqslant p^{-1}$) appartient à "l'algèbre d'Iwasawa". Nous utiliserons la définition suivante de "l'algèbre d'Iwasawa" qui est une très légère généralisation de celle de SERRE [11] pour des raisons de commodité.

DÉFINITION 11. - <u>"L'algèbre d'Iwasawa"</u> $\bar{L}$ <u>est l'ensemble des limites uniformes pour</u> $s \in \underset{\sim}{Z}_p$ <u>des combinaisons linéaires finies d'éléments de</u>

$$U_1 = \{u \in \underset{\sim}{Z}_p \ ; \ |u - 1| \leqslant p^{-1}\} \quad \text{si} \quad p > 2$$

(resp. de $U_2 = \{u \in Z_2 \ ; \ |u - 1| \leqslant 4^{-1}\}$ si $p = 2$) <u>à coefficients dans</u> A_p <u>anneau des entiers de</u> $\underset{\sim}{C}_p$.

Cette définition équivaut à dire que $g \in \bar{L}$ si, et seulement si, sa fonction génératrice $\sum_{n\geqslant 0} g(n)X^n$ est la limite uniforme sur $B(0 , 1)^- \subset \underset{\sim}{C}_p$ de combinaisons linéaires finies à coefficients dans A_p de fractions rationnelles

$$(1 - uX)^{-1} , \text{ où } u \in U_1 \text{ (resp. } u \in U_2) \text{ si } p > 2 \text{ (resp. } p = 2 \text{) .}$$

<u>On supposera désormais que le conducteur de</u> χ <u>est premier à</u> p , $(f , p) = 1$.

La fonction génératrice de Hurwitz des $n^{-1} B_{n,\chi}$ $(n \geqslant 1)$ est

$$\tilde{\tilde{J}}_\chi(X) = \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\ e^{aX}(e^{fX} - 1)^{-1} = X^{-1} + \sum_{n\geqslant 1} B_n \frac{X^{n-1}}{n!} \text{ si } \chi = \chi_0$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} B_{n,\chi} \frac{X^{n-1}}{n!} \quad \text{si} \quad \chi \neq \chi_0$$

puisque $\sum_{a=1}^{f} \chi(a) = 0$.

On posera

$$\tilde{J}_\chi(X) = \tilde{\tilde{J}}_\chi(X) \quad \text{si} \quad \chi \neq \chi_0$$

et

$$\tilde{J}_{\chi_0}(X) = \tilde{\tilde{J}}_{\chi_0}(X) - u\tilde{\tilde{J}}_{\chi_0}(Xu) \text{ , où } u \in U_1 \text{ si } p > 2 \text{ et } u \in U_2 \text{ si } p = 2 \text{ .}$$

Après transformation de Laplace formelle, il vient

$$J_{\chi_0}(X) = \sum_{n\geqslant 1} (1 - u^n)\ n^{-1} B_{n,\chi_0} X^{n-1} \quad \text{et} \quad J_\chi(X) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-1} B_{n,\chi} X^{n-1} \quad \text{si} \quad \chi \neq \chi_0 \text{ .}$$

PROPOSITION 4. - <u>Pour tout nombre premier</u> p , J_χ <u>est un élément analytique sur</u> $\mathcal{B}_{p,0} = B(0 , 1)^+ - \bigcup_{i=1}^{p-1} B(i , p^{-1})^+$.

Faisons tout d'abord la démonstration pour $\chi \neq \chi_0$.

$$\tilde{J}_\chi(X) = \sum_{a=1}^{f} \chi(a)(e^{aX} - 1)(e^{fX} - 1)^{-1} = \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \frac{(e^X - 1 + 1)^a - 1}{(e^X - 1 + 1)^f - 1}$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} a_n(e^X - 1)^n \ ;$$

où $a_n \in \underset{\sim}{A}_p$ puisque $(f , p) = 1$. Après transformation de Laplace formelle, il vient

$$J_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{n!X^n}{(1-X)\ldots(1-nX)} ,$$

ce qui, compte tenu des lemmes 2 et 3, démontre la proposition pour $\chi \neq \chi_0$.

Si $\chi = \chi_0$, alors

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{\chi_0}(X) &= e^X(e^X-1)^{-1} - ue^{uX}(e^{uX}-1)^{-1} \\ &= \frac{(1+e^X-1)((e^X-1+1)^u - 1) - u(e^X-1+1)^u(e^X-1)}{(e^X-1)((e^X-1+1)^u-1)} \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n(e^X-1)^n ,\end{aligned}$$

où a_n dépend de u et $a_n \in \mathbb{Z}_p$, car $(e^X-1+1)^u = \sum_{n\geq 0} \binom{u}{n}(e^X-1)^n$ la convergence ayant lieu X-adiquement, et $\binom{u}{n} \in \mathbb{Z}_p$.

Donc, après transformation de Laplace formelle, il vient

$$J_{\chi_0}(X) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{n!X^n}{(1-X)\ldots(1-nX)} .$$

La proposition est démontrée.

Pour montrer que $L_p(s, \chi)$ (resp. $(1-u^{s-1})\, L_p(s, \chi_0)$) appartient à "l'algèbre d'Iwasawa", on peut, soit utiliser les résultats du paragraphe 2, l'unicité de la décomposition de Mittag-Löffler et les résultats de [6], soit raisonner directement, ce que nous ferons.

Soit alors

$$\tilde{K}_\chi(X) = \tilde{J}_\chi(X) - \chi(p)\,\tilde{J}_\chi(Xp) = \sum_{a=1}^{'pf} \chi(a)\, e^{aX}(e^{pfX}-1)^{-1} ,$$

où $\sum'_a$ désigne une sommation sur les entiers a tels que $(a, p) = 1$.

Donc après transformation de Laplace formelle $K_\chi(X) = J_\chi(X) - \chi(p)\, J_\chi(pX)$. Il est clair que K_χ est un élément analytique sur $\mathcal{B}_{p,0}$. Décomposons, K_χ, par le théorème de Mittag-Löffler, en somme de ses parties singulières relatives aux trous de $\mathcal{B}_{p,0}$. Les trous de $\mathcal{B}_{p,0}$ sont les boules

$$B(i, p^{-1})^+ \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq p-1 , \text{ et } B(\infty, p^{-1})^+ = \mathbb{C}_p - B(0, 1)^+ .$$

Soit $K_{\chi,i}$, $1 \leq i \leq p-1$ ou bien $i = \infty$, la partie singulière de K_χ relatives au trou $B(i, p^{-1})^+$, dans la décomposition de Mittag-Löffler. On a

$$K_\chi(X) = K_{\chi,1}(X) + \ldots + K_{\chi,p-1} + K_{\chi,\infty}(X) \quad \text{sur } \mathcal{B}_{p,0} .$$

On tire de la définition de $\tilde{K}_\chi$ que $(e^{pfX}-1)\,\tilde{K}_\chi(X) = \sum_{a=1}^{'pf} \chi(a)\, e^{aX}$ et, après transformation de Laplace formelle,

$$(1 - pfX)^{-1} K_\chi(\frac{X}{1 - pfX}) - K_\chi(X) = \sum\nolimits_{a=1}^{'pf} \chi(a)(1 - aX)^{-1} .$$

L'identité précédente montre que

$$(1 - pfX)^{-1} K_{\chi,\infty}(\frac{X}{1 - pfX}) - K_{\chi,\infty}(X) = 0 ,$$

LEMME 4.

$$K_{\chi,\infty}(X) = 0 , \qquad K_\chi \in H_0(\underset{\sim}{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1} \bigcup_{m=0}^{p^k-1} B(i + mp , p^{-k-1})^+) .$$

La première égalité s'obtient par dérivation successive de l'idendité précédente, et en prenant la valeur de la dérivée n-ième en zéro. La deuxième affirmation provient de ce que, d'après les lemmes 1 et 2,

$$J_\chi \in H_0(B(0 , 1)^+ - \bigcup_{i=1}^{p-1} \bigcup_{m=0}^{p^k-1} B(i + pm , p^{-k-1})^+) ,$$

donc aussi K_χ, et le résultat découle de ce que $K_{\chi,\infty} = 0$.

THÉORÈME 5. - <u>Si le conducteur du caractère</u> χ <u>est premier à</u> p, <u>alors</u> $L_p(s , \chi)$, <u>respectivement</u> $(u^{s-1} - 1) L_p(s , \chi_0)$, <u>appartient à "l'algèbre d'Iwasawa".</u>

En effet :

$$K_\chi(X) = \sum\nolimits_{n\geq 1} n^{-1} B_{n,\chi}(1 - \chi(p) p^{n-1})X^{n-1} = \sum\nolimits_{n\geq 0} a_n \sum\nolimits_k^* (- 1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{1}{(1 - kX)} ,$$

où $\sum_k^*$ désigne une sommation sur les k tels que $k \not\equiv 0 \mod (p)$, le troisième membre convergeant uniformément sur le quasi-connexe

$$\mathbb{D}_{p,k} = \underset{\sim}{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1} \bigcup_{m=0}^{p^k-1} B(i + pm , p^{-k-1})^+ .$$

La démonstration est analogue à celle du corollaire 2 du théorème 1. Décomposons K_χ sur le quasi-connexe $\mathbb{D}_{p,k}$ en somme de ses parties singulières relatives aux trous du quasi-connexe, il vient

$$K_\chi(X) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^k-1} K_{\chi,i,m}(X) ,$$

où $K_{\chi,i,m} \in H_0(\underset{\sim}{C}_p - B(i + mp , p^{-k-1})^+)$. D'après Mittag-Löffler,

$$\|K_{\chi,i,m}\|_{\underset{\sim}{C}_p - B(i+pm,p^{-k-1})^+} \leq \|K_\chi\|_{\mathbb{D}_{p,k}} .$$

Or, $\|K_\chi\|_{\mathbb{D}_{p,k}} \leq p^{k+1}$, comme il découle de la formule donnant K_χ puisque $|a_n| \leq 1$, ou bien d'après le principe du maximum

$$\|K_\chi\|_{\mathfrak{O}_{p,k}} = \|K_\chi\|_{\mathfrak{O}_{p,k}} \cap B(0\ ,\ 1)^+ ,$$

et

$$\|K_\chi\|_{\mathfrak{O}_{p,k}\cap B(0,1)^+} < \|J_\chi\|_{\mathfrak{O}_{p,k}\cap B(0,1)^+} < p^{k+1}$$

la dernière inégalité découlant du lemme 1. Or

$$K_{\chi,i,m} = \sum_{n\geq 1} \lambda_{\chi,i,m,n}(1 - (i + mp)^{-1} X)^{-n} \quad \text{avec} \quad |\lambda_{\chi,i,m,n}| < p^{k+1-n(k+1)} .$$

Donc

$$\|K_{\chi,i,m}(X) - \lambda_{\chi,i,m,1}(1 - (i + pm)^{-1} X)^{-1}\|_{B(0,1)^-} \leq p^{-k-1} \quad \text{et} \quad |\lambda_{\chi,i,m,1}| \leq 1 .$$

On a donc uniformément sur $B(0\ ,\ 1)^-$,

$$K_\chi(X) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^k-1} \lambda_{\chi,i,m,1}(1 - (i + pm)^{-1} X)^{-1} ,$$

remarquons que $\lambda_{\chi,i,m,1}$ dépend de k . Donc, d'après les inégalités de Cauchy, $L_p(1 - n\ ,\ \chi)$ est la restriction, pour $n \equiv 0 \mod (p - 1)$, d'une fonction de l'algèbre d'Iwasawa, le principe du prolongement analytique permet de conclure. La démonstration est analogue pour $(u^{s-1} - 1)\ L_p(s\ ,\ \chi_0)$. Le théorème est démontré. Ce théorème démontre, dans le cas $(f\ ,\ p) = 1$, aussi l'existence de la fonction L p-adique associée au caractère χ .

Remarque. - On peut montrer que la mesure μ , associée par KATZ à $L_p(s\ ,\ \chi)$, respectivement à $(u^{s-1} - 1)\ L_p(s\ ,\ \chi_0)$, est la mesure $\nu\varphi_1$, où φ_1 est la fonction caractéristique dans $\underset{\sim}{Z}_p$ de la couronne de $\underset{\sim}{Z}_p$, $U = \{x \in \underset{\sim}{Z}_p\ ;\ |x| = 1\}$, et où ν est la mesure qui a pour coefficient a_n sur les générateurs $\binom{x}{n}^*$ du dual $\mathcal{C}'(\underset{\sim}{Z}_p\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$ de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$, espace des fonctions continues de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$, et $(\binom{x}{n}^*\ ,\ \binom{x}{m}) = 0$ si $m \neq n$ et $= 1$ si $m = n$ (si $f \in (\underset{\sim}{Z}_p\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$, $(\nu\varphi_1\ ,\ f) = (\nu\ ,\ \varphi_1 f)$, et $(\nu\ ,\ f)$ désigne la valeur de la mesure ν au point f , $\nu \in \mathcal{C}'(\underset{\sim}{Z}_p\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection SUP "Le Mathématicien", 14).

[2] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[3] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonction zéta p-adiques des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 353-384.

[4] BARSKY (D.). - Analyse p-adique et nombres de Bell, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique (Amice-Robba), 3e année, 1975/76, n° 8 ; et C.R. Acad. Sc. Paris, t. 282, 1976, Série A, p. 1257-1259.

[5] BARSKY (D.). - Congruences de coefficients de séries de Taylor, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique (Amice-Robba), 3e année, 1975/76, n° 17.

[6] BARSKY (D.). - Prolongement analytique p-adique effectif, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 281, 1975, Série A, p. 749-752.

[7] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L-functions. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies 74).

[8] KATZ (N. M.). - The congruences of Clausen - von Staudt and Kummer for Bernoulli-Hurwitz numbers, Math. Annalen, t. 216, 1975, p. 1-4.

[9] KUMMER (E. F.). - Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwicklungscoëfficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen, J. für die reine und angew. Math., t. 41, 1851, p. 368-372.

[10] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués complets ultramétriques, "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.

[11] SERRE (J.-P.). - Formes modulaires et fonctions zéta p-adiques, "Modular function of one variable 3" ; p. 191-268. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

(Texte reçu le 13 septembre 1976)

Daniel BARSKY
Département de Mathématiques
Université de Paris-7
Tour 45-55, 5e étage
2 place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05