JEAN-MARC DESHOUILLERS

# Nombres ayant de grands facteurs premiers

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 16, nº 2 (1974-1975), exp. nº G2, p. G1-G2

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° G2, 2 p. 

4 novembre 1974

# NOMBRES AYANT DE GRANDS FACTEURS PREMIERS

par Jean-Marc DESHOUILLERS

L'exposé oral avait pour but de présenter aux éléments du groupe (d'étude) quelques problèmes, résultats et méthodes, relatifs à la fonction plus grand facteur premier ; la présente rédaction s'écarte de l'exposé oral pour deux raisons :

(i) l'article de Michel LANGEVIN [2] recouvre le contenu de l'exposé oral,

(ii) l'exposé de E. PREISSMANN [3] ne sera pas rédigé et je me propose de combler ici cette lacune.

Pour les notations, je suivrai celles introduites par LANGEVIN ; le point étudié est celui mentionné dans [2] (1.7) 1°), i. e. :

<u>Déterminer un entier</u> $n_1(k)$ <u>et une minoration de</u> $P(n , k)$ <u>lorsque</u> $n$ <u>est compris entre</u> $k^{3/2}$ <u>et</u> $n_1(k)$ .

En combinant le crible de Selberg et la méthode de Van Der CORPUT pour l'estimation de sommes trigonométriques, J. RAMACHANDRA [4] démontre que l'on a :

$$P(n , k) > k^{1+2^{\lambda(n,k)}}$$

pour $\lambda(n , k) = -(8 + \log n/\log k)$ et $k^{3/2} \leqslant n \leqslant k^{\log\log k}$ .

Par la même technique, mais en utilisant les estimations de VINOGRADOV, E. PREISSMANN démontre que l'on a :

$$P(n , k) > k^{1+2^{c_1\lambda(n,k)}}$$

pour $k^{3/2} \leqslant n \leqslant k^{c_2(\log k)^{(1/4)-\varepsilon}}$ ( $\varepsilon$ positif arbitraire).

Ces résultats ont été maintenant améliorés par M. JUTILA qui a démontré récemment [1] que l'on a :

$$P(n , k) \gg k^{1+c_1\Lambda(k,n)} \tag{1}$$

où $\Lambda(k , n) = (\log k/\log n)^2$ et $k^{3/2} \leqslant n \leqslant k^{c_2(\log k)^{1/2}/\log\log k}$ .

La méthode de JUTILA étant plus simple (conceptuellement) et plus puissante, c'est la seule que nous exposerons.

La clef de la méthode est le lemme suivant.

LEMME. - <u>Soient</u> $\sigma$ <u>un nombre réel tel que</u> $0 < \sigma \leqslant 1$ , $P$ <u>un entier tel que</u> $2 \leqslant P \leqslant n$ , <u>et soit</u> $D(\sigma)$ <u>le nombre de nombres premiers</u> $p$ <u>compris entre</u> $P$ <u>et</u> $2P$ , <u>et tels que la partie fractionnaire de</u> $n/p$ (<u>notée</u> $\{n/p\}$ ) <u>soit supérieure à</u> $1-\sigma$ ; <u>on a</u> :

$$D(\sigma) = \sigma(\pi(2P) - \pi(P)) + \Delta(P , n)$$

avec

$$\Delta(P , n) = O((P^{1-c_3\Lambda(P,n)} + P^{3/2} n^{-1/2}(\log P)^{1/2}) \exp(c_4(\log\log P)^2)) .$$

Ce lemme qui concerne la discrépance de la suite $\{n/p\}$ se ramène à une estimation de sommes trigonométriques par une méthode classique (cf. le résultat d'ERDÖS-TURÁN :

$$|\Delta(P , n)| \ll (\frac{P}{H \log P} + \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{h} |\sum_{p=P}^{2P} e(hn/p)|) ),$$

lesquelles sommes trigonométriques sont évaluées par la méthode de VINOGRADOV.

Pour appliquer ce lemme à notre problème, on choisit $P = ck^{1+c_1\Lambda(k,n)}$, avec des constantes $c$ et $c_1$ telles que $D(L(P , n)) > 0$, avec

$$L(p , n) = (P^{-c_3\Lambda(P,n)} + P^{1/2} n^{-1/2}(\log P)^{1/2}) \exp(c_4 + 1)(\log\log P)^2)) ,$$

on vérifie que cela est possible si $n \leqslant k^{c_2(\log k)^{1/2}/\log\log k}$. Il en résulte qu'il existe au moins un nombre premier $p$, supérieur à $P = ck^{1+c_1\Lambda(k,n)}$ tel que :

$$1 - L(P , n) \leqslant \{n/p\} .$$

Il existe donc un entier $u$ tel que l'on ait :

$$u - L(P , n) \leqslant n/p \leqslant u ,$$

ou encore

$$pu - pL(P , n) \leqslant n \leqslant pu .$$

On a donc un entier $(pu)$, compris entre $n$ et $n + pL(P , n)$, dont le plus grand facteur premier est supérieur ou égal à $p$ ; puisque $pL(P , u)$ est inférieur à $k$, on a établi la relation (1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] JUTILA (Matti). - On number with a large prime factor, II (à paraître).

[2] LANGEVIN (Michel). - Sur la fonction plus grand facteur premier, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Groupe d'étude de théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° G22, 29 p.

[3] PREISSMANN (E.). - Calcul des grands facteurs premiers ..., Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Groupe d'étude de théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° G6 (non rédigé).

[4] RAMACHANDRA (K.). - A note on number with a large prime factor, II., J. Indian math. Soc., t. 34, 1970, p. 39-48.

(Texte reçu le 7 octobre 1975)

Jean-Marc DESHOUILLERS
UER de Mathématiques et Informatique
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE